

REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION

MATHÉMATIQUES

3ème année de l'enseignement secondaire

Section : Sciences de l'informatique

Coordinatrice

Hikma Smida

Professeur universitaire

Auteurs

Amor JERIDI

Inspecteur

Khalifa TURKI

Inspecteur

Mohamed Hédi ABDERRAHIM

Professeur hors grade

Farah GUETET

Professeur principal

Evaluateurs

Jâafar Ben YAZID

Inspecteur général

Sliman HASSAYOUN

Inspecteur principal

Centre National Pédagogique

Préface

Conforme aux nouveaux programmes, ce manuel est destiné aux élèves de la troisième année secondaire section sciences informatiques. Il est composé de 15 chapitres tous conçus comme suit :

■ Les paragraphes comportent dans leur presque totalité les rubriques suivantes :

● Activités préliminaires

Ce sont des activités qui aident l'apprenant à faire le point sur l'essentiel des connaissances antérieures dont il aura besoin pour pouvoir suivre et assimiler les nouvelles connaissances.

● Activités de découverte

Dans ces activités est introduit le nouvel apprentissage : définitions, méthodes de démonstration de théorèmes, justification des propriétés, des techniques de calcul ...

● L'essentiel du cours

Dans cette partie sont énoncés le contenu disciplinaire du paragraphe, les connaissances exigibles relatives aux savoirs ainsi qu'au savoir-faire essentiels. On y trouve aussi des figures qui illustrent certaines situations et qui sollicitent la mémoire visuelle.

● Auto évaluation

Il s'agit d'applications immédiates des notions introduites, conduisant à une évaluation momentanée des acquis de base et permettant à l'élève d'estimer l'état de ses connaissances.

■ Travaux pratiques

Ce sont des exercices ou problèmes à caractère intégratif qui souvent mettent en évidence quelques champs d'application des notions mathématiques introduites dans le chapitre. Les questions posées permettent à l'élève de comprendre le but de l'étude proposée et d'avancer progressivement dans la stratégie de résolution.

■ Avec l'outil informatique

Cette rubrique invite l'élève à profiter de l'outil informatique pour appliquer, illustrer, contrôler, conjecturer ou prouver certains résultats mathématiques en rapport avec le chapitre considéré.

■ Exercices et problèmes

Les exercices et problèmes proposés sont variés et correspondent en général à la progression du cours. Ils visent la consolidation des acquis, l'approfondissement des notions développées, l'intégration des connaissances et l'aptitude à la résolution des problèmes.

■ Mathématiques et culture

Le contenu de cette rubrique est relié au chapitre en cours : un aperçu historique sur un savant ou une notion mathématique, un texte ou un document tiré d'un ouvrage mathématique ancien ou d'Internet, un savoir plus ou un prolongement des notions développées dans le chapitre ...

Il est à préciser que l'ordre de présentation des rubriques de chaque paragraphe n'est pas à suivre de manière linéaire. En effet il faut effectuer des va-et-vient entre ces rubriques pour construire la connaissance. Cette progression en spirale permet en plus de la maîtrise des notions, leur intégration.

Puisse ce manuel aider les élèves à assimiler leur programme officiel et à développer leurs capacités de raisonnement tout en leur procurant le plaisir des mathématiques.

Nous tenons à adresser nos plus vifs remerciements aux collègues évaluateurs pour leur collaboration sympathique et efficace.

Les auteurs

Sommaire

Première partie

pages

1	Les suites réelles	7
2	Généralités sur les fonctions numériques à variable réelle	33
3	Limites, continuité, branches infinies	59
4	Dérivabilité d'une fonction	87
5	Fonctions dérivées -Applications-	112
6	Etude de fonctions 1 : Exemples de fonctions polynômes	136
7	Etude de fonctions 2 : Exemples de fonctions rationnelles, irrationnelles et trigonométriques	162

Deuxième partie

pages

8	Trigonométrie	193
9	Produit scalaire dans le plan	217
10	Systèmes d'équations Linéaires	241
11	La logique mathématique	265
12	Arithmétique	283
13	Systèmes de numération	305
14	Dénombrement	320
15	Probabilité	339

Première partie

Les Suites Réelles

1

PLAN DU CHAPITRE

- I) Généralités sur les suites
- II) Suites arithmétiques
- III) Suites géométriques
- IV) Limite d'une suite géométrique
- V) Suites récurrentes du type $U_{n+1} = aU_n + b$

Travaux pratiques

Avec l'outil informatique

Exercices et problèmes

Mathématiques et culture

I. Généralités sur les suites

Activités préliminaires

1. soit la suite réelle $v : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

$$n \mapsto v_n = 4n + 5$$

1) calculer v_0, v_1, v_2, v_{10} et v_{100} .

2) Exprimer v_{n+1}, v_{n-1} et v_{2n} en fonction de n

2. soit la suite réelle (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{n^2 - 3}{2}$

1) Ecrire en fonction de n chacune des expressions suivantes :

a. $A_n = u_{2n} + 2u_n + (u_n)^2$

b. $B_n = u_{n+1} + u_n + 1$

c. $C_n = u_{n-1} - u_n - 1$

2) Calculer A_n, B_n et C_n pour $n = 1$

3. Soit la suite réelle (t_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $t_n = 2 - \frac{1}{3^n}$

1) Calculer t_0 et t_1

2) Trouver une relation entre t_{n+1} et t_n indépendante de n

3) En déduire t_2, t_3, t_4 et t_5

Activités de découverte

4. La figure ci-contre permet de définir une suite réelle u à l'aide de la courbe (C)

d'équation $y = \frac{12}{1+x}$

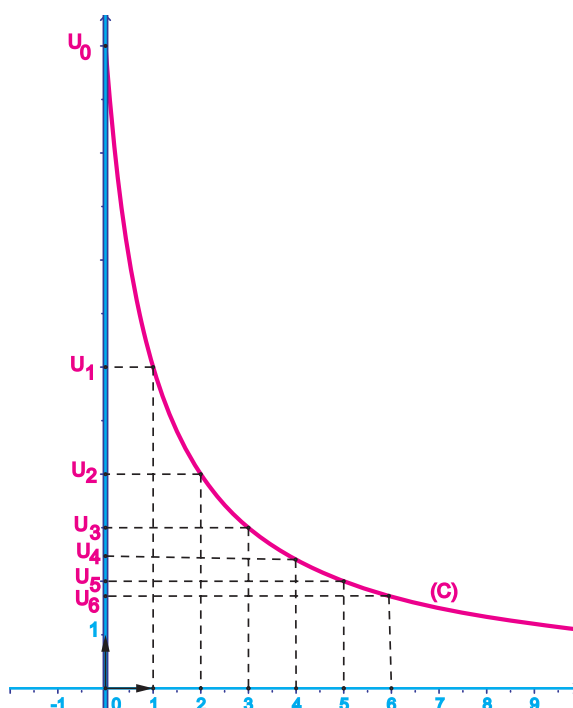
1) Expliciter u_n en fonction de n

2) Soit (v_n) la suite réelle définie pour tout entier naturel n par : $v_n = 2 - u_{2n}$

a. Exprimer v_n en fonction de n

b. Tracer la représentation graphique d'une fonction permettant la représentation des termes de la suite (v_n)

c. Représenter sur l'axe des ordonnées les six premiers termes de la suite (v_n)

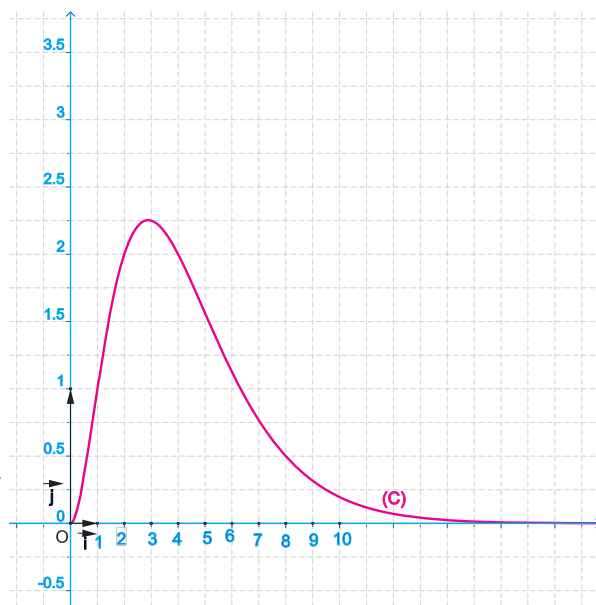


5. Sur la figure ci-contre est représentée la courbe (C) d'une fonction numérique f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Représenter sur l'axe des ordonnées les dix premiers termes de la suite (F_n) définie par $F_n = f(n)$ ($n \in \mathbb{N}$)

2) Classer par ordre croissant les termes représentés

3) Déterminer (graphiquement) deux réels a et b indépendants de n tels que pour tout entier naturel n on a : $a \leq F_n \leq b$



L'essentiel du cours

Suites réelles

Définition

On appelle suite réelle définie à partir de l'entier naturel k , toute application u de $\{k, k+1, k+2, \dots\}$ dans $\mathbb{R}$: $u : \{k, k+1, k+2, \dots\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$n \mapsto u(n)$$

Notation et vocabulaire

Dans le cas des suites on préfère la notation indicielle u_n (on lit « u indice n » à la notation fonctionnelle $u(n)$ (on lit « u de n ») u_n s'appelle terme général de la suite u .

La suite est alors notée $(u_n)_{n \geq k}$ ou tout simplement (u_n) lorsque u est définie sur $\mathbb{N}$.

Il faut alors distinguer les écritures u_n et (u_n) , la première désigne un réel alors que la seconde désigne une suite

Suites particulières

- suite constante : tous les termes de la suite sont égaux
- suite nulle : tous les termes de la suite sont égaux à 0

Représentation graphique d'une suite

Le plan étant rapporté à un repère. On appelle représentation graphique d'une suite réelle u définie sur l'ensemble $\{k, k+1, k+2, \dots\}$ ($k \in \mathbb{N}$), l'ensemble des points $M_n(n, u_n)$ où $n \in \{k, k+1, k+2, \dots\}$.

Les termes $u_k, u_{k+1}, \dots$ sont alors représentés sur l'axe des ordonnées.

Auto évaluation

1. (QCM) Cocher la réponse correcte

1) Soit la suite (u_n) définie par $u_n = 3^n$. Le terme u_{2n} est égal à :

a. 2×3^n ☐

b. 9^n ☐

c. 3×2^n ☐

2) Soit la suite (v_n) définie par $v_n = n^2 - 1$.

v_{n-1} est égal à :

a. $n^2 - 2$

b. $(n-1)^2 - 1$

c. $(n-1)^2 - 2$

v_{n+1} est égal à :

a. $n^2 + 1$

b. n^2

c. $(n+1)^2 - 1$

2. Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3(-1)^n$. Répondre par vrai ou faux:

1) u est une suite constante

2) La suite v définie par $v_n = u_{2n}$ est une suite constante

3) La suite w définie par $w_n = u_{2n+1}$ est une suite constante

4) La suite t définie par $t_n = v_n + w_n$ est la suite nulle

3. Soit la suite $v : n \mapsto v_n = \frac{2n-3}{n-4}$

1) A partir de quel entier, la suite v est-elle définie ?

2) Représenter graphiquement la suite v .

3) Vérifier graphiquement que pour tout entier n tel que v_n est défini on a $2 \leq v_n \leq 7$ puis prouver ce résultat par le calcul.

II. Suites arithmétiques

Activités préliminaires

1. Soit (U_n) et (V_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$ par : $U_n = -4n - 2$ et $V_n = n^2 + 1$

1) Calculez U_1, U_2, U_3, V_1, V_2 et V_3

2) Montrer que pour tout n la différence $U_{n+1} - U_n$ est une constante (indépendante de n).

A-t-on le même résultat pour la suite (V_n) ?

3) Quelle est la nature de la suite (U_n) ?

2. On a demandé à un élève de la 3ème année de l'enseignement de base de compter 3 par 3 en partant de 1.

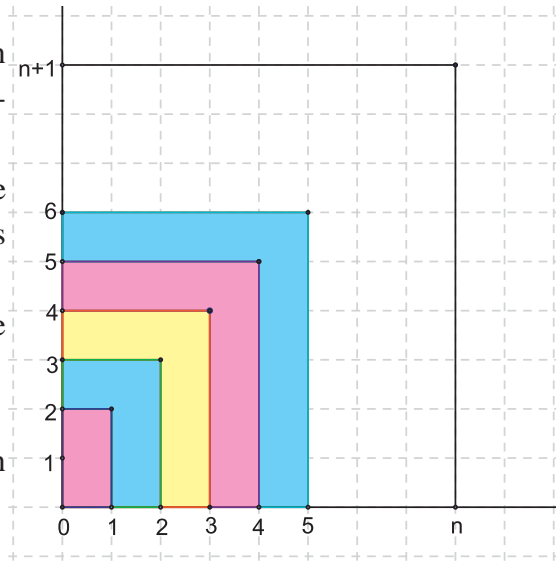
- 1) Déterminer le 5ème, le 19ème et le 24ème nombres énoncés par cet élève.
- 2) L'un de ses camarades prend la relève à partir du 24ème nombre et compte jusqu'au nombre 103. Quel est le 6ème nombre énoncé ?
- 3) a. Combien de nombres les deux camarades ont-ils donné ?
b. Vérifier tous les résultats à l'aide d'un tableur.

3. On considère la liste des nombres pairs non nuls rangés par ordre croissant. On note p_1 le premier terme, p_2 le second, ... p_n le nième terme.

1) En utilisant la figure ci-contre donner une interprétation graphique de $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ puis $p_1 + p_2, p_1 + p_2 + p_3, p_1 + p_2 + p_3 + p_4$

2) Que peut-on conjecturer sur la somme $S_n = p_1 + p_2 + \dots + p_n$?

3) a. Quelle est la nature de la suite (p_n) ?
b. En déduire alors l'expression de S_n en fonction de n



Activités de découverte

4. Soit (U_n) une suite arithmétique de raison a et de représentation graphique $\{M_n(n, u_n), n \in \mathbb{N}\}$ dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

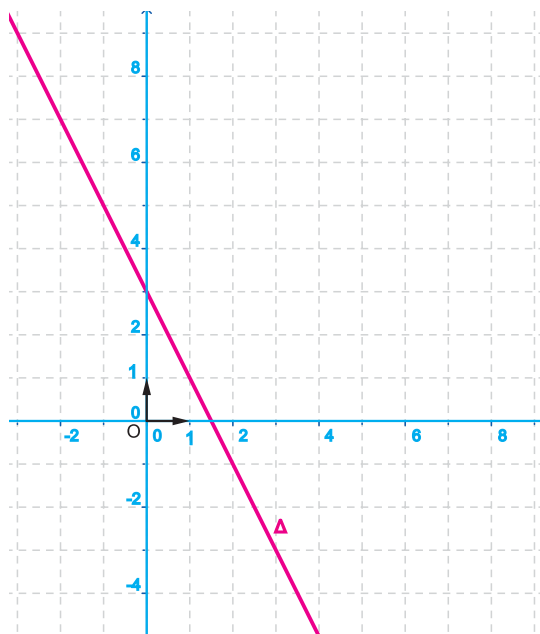
- 1) Montrer que pour tout entier naturel non nul n , les points M_{n-1} , M_n et M_{n+1} sont alignés (on pourra vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{M_n M_{n-1}}$ et $\overrightarrow{M_n M_{n+1}}$ sont colinéaires)
- 2) Plus généralement, montrer que si n, p et k sont trois entiers naturels quelconques, alors les points M_n , M_p et M_k sont alignés
- 3) En déduire que tous les points M_n sont alignés sur une même droite.

5. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 = -3$

- 1) Exprimer u_n en fonction de n
- 2) Montrer alors que les points $M_n(n, u_n)$, ($n \in \mathbb{N}$) représentant graphiquement la suite (u_n) dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ appartiennent à une même droite Δ dont on donnera l'équation cartésienne dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

6. Soit (a_n) une suite réelle représentée graphiquement par des points situés sur la droite Δ (figure ci-contre)

- 1) Déterminer a_0, a_1, a_2, a_3 et a_4
- 2) Trouver l'équation de Δ et en déduire l'expression de a_n en fonction de n
- 3) Montrer alors que (a_n) est une suite arithmétique et donner sa raison.



L'essentiel du cours

Suites arithmétiques

Définition

Une suite u définie sur $\mathbb{N}$ est dite arithmétique s'il existe un réel r tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_{n+1} = u_n + r$
 r est la raison de la suite et u_0 est son premier terme

Terme général d'une suite arithmétique

si (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r et si n et p sont deux entiers naturels alors on a :

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

En particulier :

$$u_n = u_0 + nr$$

Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

Si (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r et si n et p sont deux entiers naturels tels que $p \leq n$ alors on a :

$$u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = \frac{(n-p+1)(u_p + u_n)}{2}$$

■ $(n-p+1)$ est le nombre de termes de la somme

■ u_p est le premier terme de la somme

■ u_n est le dernier terme de la somme

En particulier

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$$

Représentation graphique des termes d'une suite arithmétique :

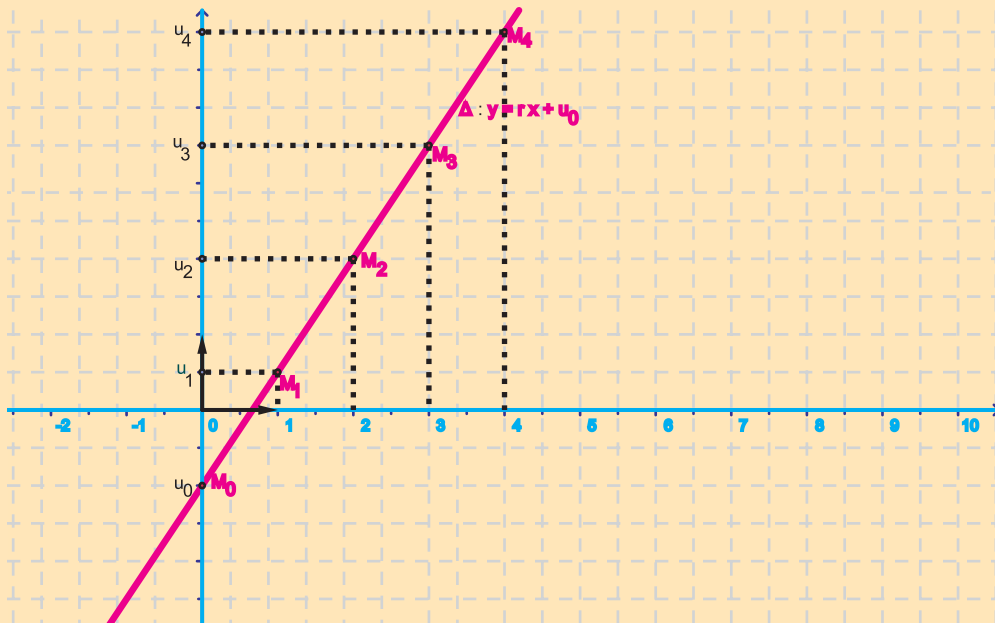
Soit u une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = nr + u_0$ donc u est la restriction sur $\mathbb{N}$ de l'application affine :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto rx + u_0$$

dont la représentation selon un repère du plan est la droite $\Delta : y = rx + u_0$

par suite les points $M_n(n, u_n)$ sont alignés et les termes de (u_n) sont les ordonnées des points de Δ dont les abscisses sont des entiers naturels.



Auto évaluation

Cocher la réponse correcte (exercices 1 et 2)

1. Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r et (v_n) la suite définie par $v_n = u_{2n}$ alors :

- a. (v_n) n'est pas une suite arithmétique ☐
- b. (v_n) est une suite arithmétique de raison r ☐
- c. (v_n) est une suite arithmétique de raison $2r$ ☐

2. Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r et (v_n) la suite définie par $v_n = u_n + a$ ($a \in \mathbb{R}$) alors :

- a. (v_n) n'est pas une suite arithmétique ☐
- b. (v_n) est une suite arithmétique de raison a ☐
- c. (v_n) est une suite arithmétique de raison r ☐
- d. (v_n) est une suite arithmétique de raison $a + r$ ☐

3. Calculer

- 1) La somme des nombres impairs compris entre 100 et 200
- 2) La somme $S = 2 + \frac{7}{4} + \frac{3}{2} + \frac{5}{4} + 1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$
- 3) La somme $T = 13,207 + 13,305 + 13,403 + 13,501 + 13,599 + 13,697$

4. Calculer le nombre des années bissextiles depuis 1600 jusqu'à 2004

	"Année bissextile : année qui comporte un jour de plus en février, soit 366 jours, et qui revient tout les quatre ans. • Pour être bissextile, une année doit avoir son millésime divisible par 4. Toutefois celles dont le millésime est divisible par 100 ne sont bissextiles, 1700, 1800 et 1900 ne l'ont pas été" <i>D'après "Le petit Larousse".</i>
---	--

5. (a_n) est une suite arithmétique de raison α et de premier terme a_1

- 1) Calculer a_{20} lorsque $a_5 = 10$ et $\alpha = 2$
- 2) Calculer α lorsque $a_{22} = 0$ et $a_9 = 169$

6. Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}^*$. On pose $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ et on suppose que $S_n = 3n^2 + 5n$

- 1) Calculer u_1 , u_2 et u_3
- 2) a. Exprimer S_{n-1} en fonction de n
b. Exprimer u_n en fonction de n
- 3) Montrer alors que (u_n) est une suite arithmétique dont on donnera la raison et le premier terme
- 4) Représenter, dans un même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, les deux suites (u_n) ($n \in \mathbb{N}^*$) et (S_n) ($n \in \mathbb{N}^*$)

III. Suites géométriques

Activités préliminaires

1. Soit (U_n) et (V_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$ par : $U_n = -3(1,2)^n$ et $V_n = 3 - n^2$

- 1) Calculez U_1, U_2, U_3, V_1, V_2 et V_3
- 2) Montrer que pour tout n le quotient $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ est une constante (indépendante de n).
A-t-on le même résultat pour la suite (V_n) ?
- 3) Quelle est la nature de la suite (U_n) ?
- 4) Soit la suite (W_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $W_n = U_{2n}$. Montrer que (W_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

2. A l'âge de dix ans un palmier a atteint 2m de hauteur. A partir de cet âge jusqu'à 25 ans, sa hauteur augmente annuellement de 10%

1) Modéliser la situation à l'aide d'une suite géométrique

2) Calculer les hauteurs du palmier respectivement à l'âge de 11, 12, 15, 20 et 25 ans. (on utilisera une calculatrice et on donnera les résultats sous forme d'arrondis à deux décimales).

3) A quel âge la hauteur du palmier dépassera-t-elle le double de sa hauteur à l'âge de 10 ans ?

3. Les réels a, b, c, d, e, f, g et h désignent des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

1) Exprimer f, g et h en fonction de a puis a, b et c en fonction de e

2) On suppose que $e = 1$. Calculer alors a puis chacune des sommes :

$$S_n = a + b + c + d + e + f + g + h \quad \text{et} \quad T_n = a - b + c - d + e - f + g - h$$

Activités de découverte

4. Soit la suite géométrique u de premier terme $u_0 = 9$ et de raison $q = \frac{2}{3}$

1) Tracer dans le plan muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les droites $D : y = \frac{2}{3}x$ et $\Delta : y = x$

2) Représenter les cinq premiers termes de la suite u de la manière suivante :

- Placer u_0 sur l'axe des abscisses ; u_1 est l'ordonnée du point de D d'abscisse u_0 ; en utilisant la droite Δ reporter u_1 sur l'axe des abscisses.
- u_2 est l'ordonnée du point de D d'abscisse u_1 ; reporter u_2 sur l'axe des abscisses à l'aide de Δ ; ...

5. Utiliser une méthode analogue à l'activité 4 pour représenter les cinq premiers termes de la suite géométrique u de premier terme $u_0 = 9$ et de raison $q = -\frac{2}{3}$

L'essentiel du cours

Suites géométriques

Définition

Une suite u définie sur $\mathbb{N}$ est géométrique s'il existe un réel q tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$

On a : $u_{n+1} = q u_n$

q est la raison de la suite et u_0 est son premier terme

Terme général d'une suite géométrique

Si (u_n) est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q non nul et si n et p sont deux entiers naturels alors on a :

$$u_n = q^{n-p} u_p$$

En particulier :

$$u_n = q^n u_0$$

Somme des termes d'une suite géométrique

Si (u_n) est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison $q \neq 0$ et si n et p sont deux entiers naturels tels que $p \leq n$ alors on a :

• pour $q \neq 1$
$$u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$

u_p est le premier terme de la somme

$(n-p+1)$ est le nombre de termes de la somme

En particulier
$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

• pour $q = 1$, (u_n) est une suite constante et on a :

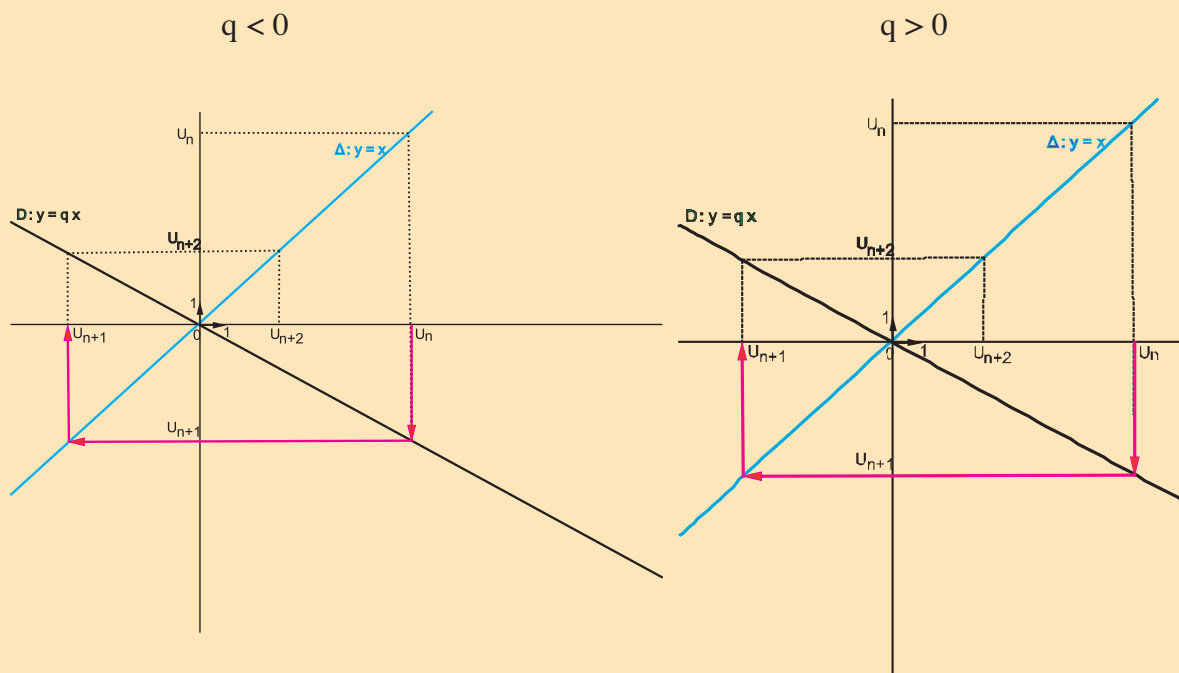
$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n+1)u_0$$

$$u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = (n-p+1)u_p$$

Représentation graphique des termes d'une suite géométrique :

Soit u une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison $q \neq 0$

On considère les droites $D : y = qx$ et $\Delta : y = x$ selon un repère du plan et on représente les termes de la suite u sur les axes du repère de la manière suivante :



Auto évaluation

Cocher la réponse correcte (exercices 1, 2 et 3)

1. Si (u_n) est une suite géométrique de raison q et (v_n) la suite définie par $v_n = u_{2n}$ alors:

- a. (v_n) n'est pas une suite géométrique
- b. (v_n) est une suite géométrique de raison q
- c. (v_n) est une suite géométrique de raison q^2

2. La suite (u_n) définie par $u_n = \frac{3^{2n} \times 5^{3n}}{2^n}$ est une suite :

- a. arithmétique
- b. géométrique
- c. ni arithmétique ni géométrique

3. Soit la suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = (-2)^n v_n$

- a. (v_n) est une suite géométrique de raison $(-2)^n$
- b. (v_n) est une suite géométrique de raison -2
- c. (v_n) n'est pas une suite géométrique

4. (g_n) est une suite géométrique de raison t et de premier terme g_1

1) Calculer t sachant que $g_{45} = 100$ et $g_{50} = 3200$

2) Calculer g_{10} sachant que $g_{15} = 32$ et $t = -0,5$

5. Calculer :

a. $S = \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \dots + \frac{1}{131072}$

b. $R = \sqrt{4} + \sqrt{12} + \sqrt{36} + \dots + \sqrt{78732}$

6. On lance avec force une balle pour la faire rebondir au sol. Après le premier rebond la balle atteint 2,5 m de hauteur.

1) On suppose qu'après chaque rebond la balle perd 25% de hauteur. Au bout de combien de rebonds la hauteur de la balle sera-t-elle inférieure à 0,5cm ?

(on pourra utiliser une calculatrice ou le tableur Excel)

2) Sachant qu'on lance la balle d'une hauteur égale à 1,50 m. Quelle distance la balle aura-t-elle parcourue au total ? (On ne considère que les rebonds de hauteur supérieure à 0,5cm)

7. Représenter graphiquement sur l'axe des ordonnées les cinq premiers termes de la suite géométrique V de raison $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ et de premier terme $V_0 = \sqrt{2}$

IV. Limite d'une suite géométrique

Activités préliminaires

1. Classer par ordre croissant les réels :
 - a. $(0,9)$; $(0,9)^2$; $(0,9)^3$; $(0,9)^4$; $(0,9)^5$
 - b. $(1,4)$; $(1,4)^2$; $(1,4)^3$; $(1,4)^4$; $(1,4)^5$
- 2) Déterminer à l'aide d'une calculatrice deux entiers p et q tels que :
 $(0,9)^p < 0,1$ et $(1,4)^q > 10000$

2. Soit x un réel donné tel que $0 < x < 1$.
 - 1) Montrer que $0 < x^2 < x < 1$
 - 2) Soit p un entier naturel non nul.
 - a. Montrer que $1 - x^p = (1 - x)(1 + x + x^2 + \dots + x^{p-1})$
 - b. En déduire que $x^p < 1$
 - 3) Soient m et n deux entiers naturels tels que $0 < m < n$.
Vérifier que $x^m - x^n = x^m(1 - x^{n-m})$ et déduire que $x^n < x^m$

3. Soit z un réel donné tel que $z > 1$.
 - 1) Montrer que pour tout entier naturel n on a $z^n \leq z^{n+1}$
 - 2) Soient m et n deux entiers naturels tels que $0 < m < n$. Comparer z^n et z^m

Activités de découverte

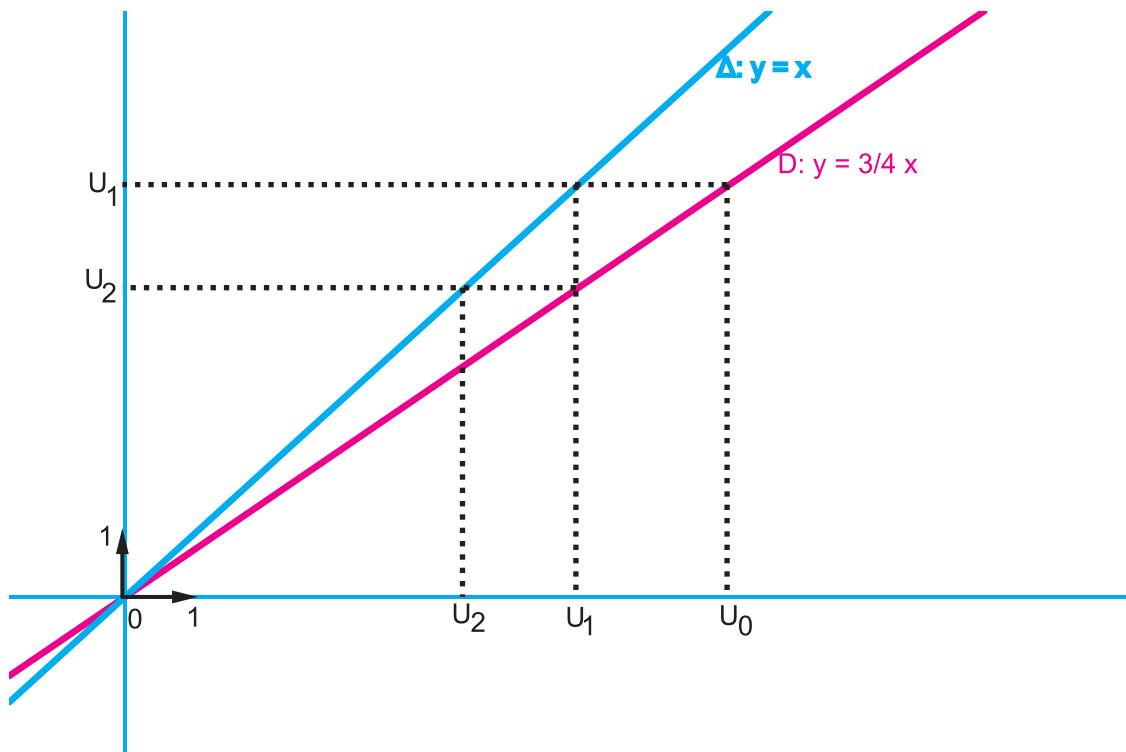
4. On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 1,1^n$
 - 1) a. Recopier et compléter le tableau suivant (utiliser une calculatrice ou un tableur et donner une valeur approchée de u_n avec deux décimales)

n	0	1	2	9	10	19	20	24	25	26	38	39	40
u_n													

- b. Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n < u_{n+1}$
- 2) Soit la suite (a_n) : $a_n = 1,1^n - n$
 - a. Montrer que pour $n \geq 25$, $a_n < a_{n+1}$. (On montre que $a_{n+1} - a_n = 0,1(1,1^n - 10)$)
 - b. Montrer que pour $n \geq 39$, on a $(1,1)^n > n$. (On remarque que $a_{39} > 0$)
- 3) Que peut-on conjecturer sur u_n pour les valeurs grandes de n ?

5. Soit (U_n) la suite géométrique définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 8 \\ U_{n+1} = \frac{3}{4} U_n \end{cases}$$

1) Sur la figure suivante sont représentés U_0 , U_1 et U_2 , reproduire la figure et compléter la représentation de U_3 , U_4 et U_5



Que peut-on prévoir sur le comportement de U_n lorsque n devient de plus en plus grand ?

2) a. Recopier et remplir le tableau suivant en se servant d'une calculatrice

n	10	20	30	40
U_n				

(on donnera les résultats sous forme de valeurs approchées décimales)

b. Vérifier, à l'aide du tableau que u_n devient de plus en plus proche de 0 lorsque n devient de plus en plus grand

3) Utiliser une calculatrice pour déterminer un entier p tel que $U_p \leq 0,001$. Vérifier que $(n \in \mathbb{N} \text{ et } n \geq p) \Rightarrow U_n < 0,001$

➤ Généralement, on montre que si ε est un réel strictement positif, il existe un entier p tel que : $(n \in \mathbb{N} \text{ et } n \geq p) \Rightarrow |U_n| < \varepsilon$

On dit que la suite u tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et on écrit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$

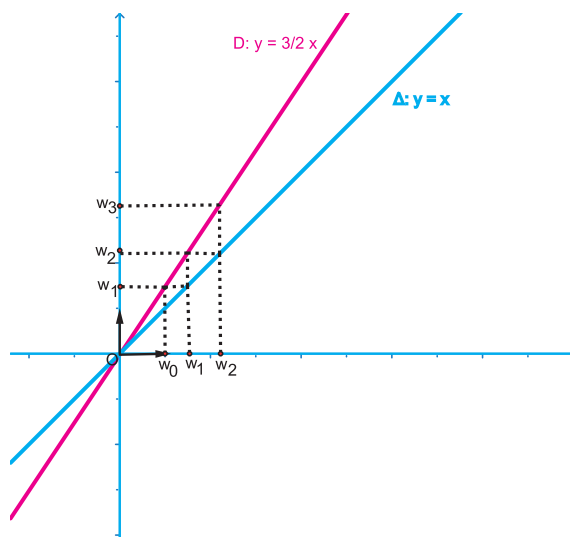
6. Soit (w_n) la suite géométrique de premier terme $w_0 = 1$ et de raison $\frac{3}{2}$

1) Sur la figure ci-contre sont représentés w_0 , w_1 , w_2 et w_3 .

Reproduire la figure et compléter la représentation de w_4 , w_5 et w_6 . Que peut-on prévoir sur le comportement de w_n lorsque n devient de plus en plus grand ? Que peut-on conjecturer sur la limite de w_n quand n tend vers $+\infty$?

2) Utiliser une calculatrice pour trouver un entier p tel que :

pour tout entier n , si $n \geq p$, alors $w_n > 10^4$



Plus généralement, on montre que si A est un réel strictement positif, il existe un entier p tel que : $(n \in \mathbb{N} \text{ et } n \geq p) \Rightarrow w_n > A$

On dit que la suite w tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ et on écrit $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = +\infty$

7. Soit (t_n) la suite géométrique de premier terme $t_0 = -\frac{1}{4}$ et de raison -2

1) Calculer t_n en fonction de n .

2) Recopier et compléter le tableau suivant :

n	1	2	3	4	20	21	22	100	101	102
t_n										

3) Que peut-on conjecturer sur la limite de $|t_n|$ quand n tend vers $+\infty$?

Peut-on dire que t_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$?

► Lorsque n dévient de plus en plus grand, $|t_n|$ augmente indéfiniment mais les termes t_n sont alternativement positifs et négatifs. La suite (t_n) n'a pas de limite

L'essentiel du cours

Théorème (admis) :

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme non nul u_0 et de raison q .

• Si $-1 < q < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

• Si $q > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } u_0 > 0 \\ -\infty & \text{si } u_0 < 0 \end{cases}$

- Si $q = 1$, alors la suite u est constante et on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u_0$
- Si $q \leq -1$, alors la suite u n'admet pas de limite lorsque n tend vers $+\infty$

En particulier, on a les résultats suivants :

- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$
- Si $q > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$
- Si $q = 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$
- Si $q \leq -1$, alors la suite (q^n) n'admet pas de limite lorsque n tend vers $+\infty$

Auto évaluation

1. On donne les suites u , v , w et x définies respectivement par :

$$u_n = (\sqrt{2})^{-n}, v_n = (-\sqrt{2})^n, w_n = -\frac{1}{5}(-1,001)^n \text{ et } x_n = -\left(\frac{\pi+1}{4}\right)^{n-1}$$

1) Vérifier que ces suites sont géométriques, on donnera pour chacune le premier terme et la raison.

2) Déterminer leurs limites éventuelles lorsque n tend vers $+\infty$

2. On considère la suite géométrique U de raison $-\frac{2}{\pi}$ et de premier terme π .
Le calcul des 26 premiers termes de U ainsi que sa représentation graphique par Excel sont consignés dans la feuille de calcul ci-dessous.

1) Vérifier graphiquement que pour tout $n \geq 4$ on a $-1 < U_n < 1$

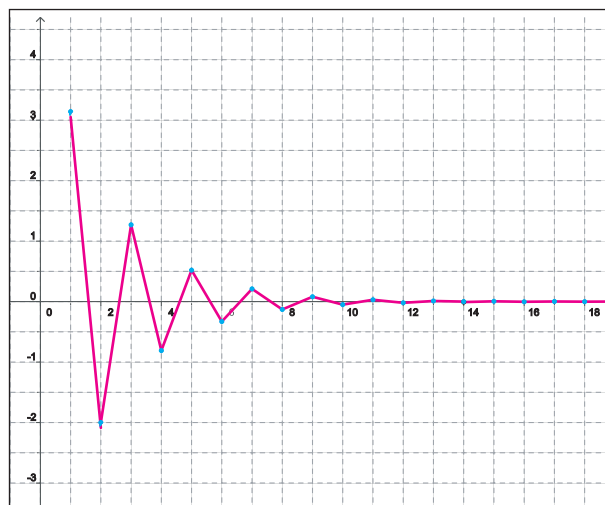
2) Pour quelles valeurs de n , a-t-on :

a. $|U_n| \leq 0,001$?

d. $|U_n| \leq 0,0001$?

3) Déterminer la limite de la suite U quand n tend vers $+\infty$

n	U_n	n	U_n
1	3.1415927	14	-0.00886322
2	-2	15	0.0056425
3	1.27323953	16	-0.00359213
4	-0.81056945	17	0.00228682
5	0.51602453	18	-0.00145583
6	-0.32851141	19	0.00092681
7	0.20913686	20	-0.00059003
8	-0.13314066	21	0.00037562
9	0.08475997	22	-0.00023913
10	-0.05395987	23	0.00015223
11	0.03435192	24	-9.6915E-05
12	-0.02186911	25	6.1698E-05
13	0.01392231	26	-3.9278E-05



V) Suites récurrentes du type $u_{n+1} = au_n + b$

Activités préliminaires

1. On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_1 = 0,9, u_2 = 0,99, u_3 = 0,999, \dots, u_n = 0,99 \dots 9 \text{ (n chiffres égaux à 9)}$$

1) Montrer que u_n est la somme de n termes d'une suite géométrique (a_n) dont on précisera la raison et le premier terme.

2) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a $u_{n+1} = \frac{1}{10}(u_n + 9)$.

3) Exprimer u_n en fonction de n

4) Déterminer la limite de (a_n) quand n tend vers $+\infty$. Que peut-on conjecturer sur la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$?

2. On définit sur $\mathbb{N}$ la suite u par la donnée de son premier terme $u_0 = 5$ et la relation

$$u_{n+1} = 2u_n - 3 \text{ pour tout entier } n \text{ (appelée relation de récurrence)}$$

1) Calculer u_1, u_2 et u_3 . Peut-on calculer directement u_{10} ?

2) Tracer dans le plan muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les droites $D : y = 2x - 3$ et $\Delta : y = x$

3) Représenter alors les cinq premiers termes de la suite u sur l'axe des abscisses

3. Soit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}} : \begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = -\frac{1}{2}U_n + 3 \end{cases}$

1) Calculer U_1 et U_2 . Vérifier que U n'est ni arithmétique ni géométrique

2) Soit $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $V_n = U_n - 2$

a. Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$

b. Ecrire V_n en fonction de n , en déduire l'expression de U_n en fonction de n

c. Calculer U_{10}

4. Soit la suite u définie par la donnée de son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = -\frac{1}{3}u_n + 4$ pour tout entier n .

1) Tracer dans le plan muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les droites $\Delta : y = x$ et $D : y = -\frac{1}{3}x + 4$ puis représenter les cinq premiers termes de la suite u

2) Que peut-on conjecturer sur la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$?

3) Soit x_0 l'abscisse du point d'intersection de D et Δ . On pose $v_n = u_n - x_0$

Montrer que (v_n) est une suite géométrique puis exprimer v_n et u_n en fonction de n

4) Déterminer la limite de v_n quand n tend vers $+\infty$. Que peut-on prévoir pour la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$?

➤ On a $u_n = v_n + x_0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ on admet que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = x_0$

Définition

Soit f une fonction numérique à variable réelle. Une suite u définie sur $\mathbb{N}$ par la donnée de son premier terme u_0 et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est dite une suite récurrente et l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$ s'appelle relation de récurrence

Remarques

- 1- Pour calculer un terme de rang donné d'une suite récurrente, il faut calculer successivement tous les termes qui le précèdent.
- 2- l'égalité $u_{n+1} = 2u_n - 3$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ peut s'écrire sous la forme :
 $u_n = 2u_{n-1} - 3$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ ou encore :
 $u_{n-1} = 2u_{n-2} - 3$ pour tout entier $n \geq 2 \dots$

Cas où f est une fonction affine

Soit la fonction affine $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto ax+b$$

et la suite u définie par son premier terme et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

Cas particuliers:

- $a = 0$, u est une suite constante
- $a = 1$, u est une suite arithmétique de raison b
- $b = 0$, u est une suite géométrique de raison a

Cas général :

$a \neq 0$, $a \neq 1$ et $b \neq 0$

L'étude de u se fait dans ce cas à l'aide d'une suite géométrique auxiliaire, l'expression du terme général de u est de la forme $u_n = v_n + \alpha$ où (v_n) est une suite géométrique et α est la constante réelle vérifiant $f(\alpha) = \alpha$, de plus :

- 1- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$
- 2- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
- 3- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

4- Si (v_n) n'admet pas une limite quand n tend vers $+\infty$ il en est de même pour la suite u

Auto évaluation

1. Cocher la réponse correcte

La suite (u_n) définie par $u_n = 5^n - 2$ est une suite :

- a. arithmétique
- b. géométrique
- c. récurrente du type $u_{n+1} = au_n + b$

2. Soit la suite (a_n) définie par son premier terme a_0 et la relation de récurrence

$$a_{n+1} = -\frac{2}{3}a_n + 5 \text{ pour tout entier naturel } n$$

1) Peut-on trouver une valeur α de a_0 telle que (a_n) soit une suite constante?

2) On suppose que $a_0 \neq \alpha$ et on pose $b_n = a_n - \alpha$ ($n \in \mathbb{N}$)

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $b_{n+1} = -\frac{2}{3}b_n$, en déduire a_n en fonction de n puis la limite de a_n quand n tend vers $+\infty$

3. Au 1er Janvier 2000, une ville compte 50.000 habitants, chaque année la population augmente de 2% et 1000 nouveaux habitants viennent s'installer définitivement dans cette ville. Utiliser une calculatrice pour calculer la population de la ville au 1er Janvier 2010 ?

4. Dans la figure ci-contre, on a représenté graphiquement les fonctions affines $x \mapsto x$ et $x \mapsto f(x)$. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

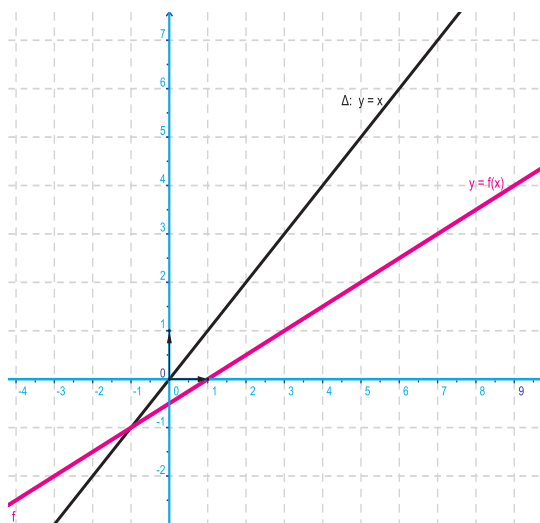
1) Représenter graphiquement u_1, u_2, u_3 et u_4 sur l'axe des abscisses

2) Expliciter $f(x)$ et calculer u_p pour $p \in \{1, 2, 3, 4\}$

3) Vérifier que : $u_{n+1} + 1 = \frac{1}{2}(u_n + 1)$

4) Déduire l'expression de u_n puis celle de $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ en fonction de n

5) Calculer les limites respectives de u_n et de S_n quand n tend vers $+\infty$.



TP1 Ecriture fractionnaire d'un rationnel connaissant son développement décimal illimité périodique:

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n = 365 \times 10^{-3n}$ et le nombre rationnel $d = 2,\underline{365}....$

- 1) a. Calculer $2 + U_1$, $2 + U_1 + U_2$ et $2 + U_1 + U_2 + U_3$
 b. Vérifier qu'on peut écrire $d = \lim_{n \rightarrow +\infty} (2 + U_1 + U_2 + \dots + U_n)$
- 2) En déduire une écriture de d sous la forme : $\frac{a}{b}$ où $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$

TP2 Une entreprise de bâtiment propose à ses ingénieurs deux types de contrats concernant les primes :

Contrat A : les primes sont données à la fin de chaque année : la 1ère année 2500 dinars, puis une augmentation de 300 dinars par an.

Contrat B : les primes sont données à la fin de chaque semestre : le 1er semestre 1000 dinars, puis une augmentation de 100 dinars par semestre. On suppose que le choix d'un type de contrat est définitif. Sachant que le contrat d'un ingénieur dure 12 ans, quel type de contrat choisit-il ?

Stratégie de résolution :

- 1) Appelons a_n la somme perçue à la fin de la n ème année avec le contrat A.
 - a. Montrer que $a_n = 300n + 2200$
 - b. Calculer en fonction de n , la somme $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$
- 2) Appelons t_n la somme perçue à la fin du n ème semestre avec le contrat B. et b_n la somme perçue à la fin de la n ème année avec le contrat B
 - a. Vérifier que $b_n = t_{2n} + t_{2n-1}$ et prouver que $b_n = 400n + 1700$
 - b. Calculer en fonction de n , la somme $T_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$
- 3) Calculer alors $T_n - S_n$ et conclure

TP3 Intérêts composés

Un capital de 10.000 dinars est placé au 1er janvier 2000 à un intérêt composé au taux t (c'est-à-dire à la fin de chaque année, les intérêts sont ajoutés au capital). On désigne par c_n le capital obtenu au 1er janvier de l'année $2000 + n$ (n entier naturel)

- 1) Montrer que (c_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison
- 2) On suppose que $t = 6\%$
 - a. Calculer à l'aide d'une calculatrice c_5 , c_{10} et c_{15}
 - b. Au bout de quelle année le capital obtenu sera-t-il supérieur au double du capital initial ?

A. Programmation

1 Soit a un réel donné et u la suite définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = (0,8) u_n + 2$, ($n \in \mathbb{N}$)

- 1) Etablir un algorithme permettant le calcul :
 - du terme u_n
 - de la somme $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ connaissant n et le premier terme a .
- 2) a. Traduire l'algorithme en un programme informatique
 b. Utiliser ce programme pour conjecturer la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$

2 Soit v la suite définie par : $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = \frac{3}{4} v_n - 2$

Etablir un algorithme de calcul permettant le calcul de la somme

$$T = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n \text{ pour } p \text{ et } n \text{ donnés.}$$

B. Utilisation d'un tableur :

3 Soit u une suite arithmétique de raison (-10) et de premier terme $u_0 = 5$.

Utiliser le tableur EXCEL pour :

- 1) Donner les valeurs de u_n pour n variant de 1 à 50
- 2) Calculer la somme $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{50}$
- 3) Représenter graphiquement la suite u .

4 Mêmes questions avec u définie par $u_0 = 2$ et $u_n = \frac{3}{8} u_{n-1} - \frac{1}{2}$

5 Un capital de 15.000 dinars est placé le 1er janvier 2000 avec un taux d'intérêt annuel de 6.5%. Tous les ans les intérêts sont cumulés au capital. On note c_n le capital correspondant au 1er janvier 2000 + n .

- 1) Recopier et compléter le tableau suivant en utilisant le tableur Excel

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Capital en 1000 D	15										

- 2) Représenter graphiquement la suite (c_n)

Exercices et problèmes

1 Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \frac{4 + (-1)^n n}{1 + n}$

- 1) Représenter les dix premiers termes de la suite u dans le plan muni d'un repère orthonormé (prendre 2 cm comme unité de longueur).
- 2) Soient les suites v et w définies sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$
 - a. Donner les expressions de v_n et w_n en fonction de n
 - b. Vérifier que pour tout entier n on a : $1 < v_n \leq 4$ et $-1 < w_n \leq \frac{3}{2}$
- 3) Dédurre alors que tous les termes de la suite u sont compris entre deux réels que l'on précisera.

2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 1)$

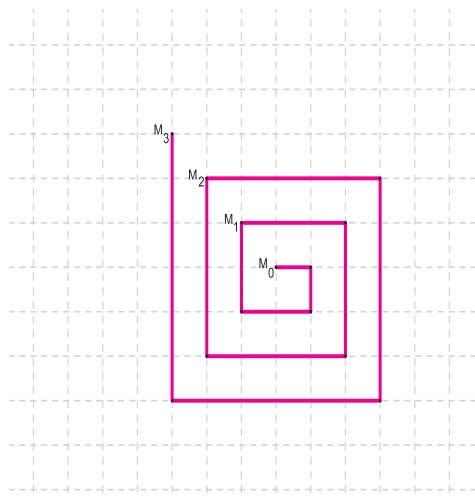
- 1) Tracer la courbe représentative (C) de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$
- 2) Soit t la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par $t_n = f(n)$.
Représenter les points $M_n(n, t_n)$ pour $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- 3) On considère les points I_n milieux des segments $[M_n M_{n+2}]$ où $n \in \mathbb{N}$
 - a. Représenter les points I_n pour $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$
 - b. Déterminer les coordonnées des points I_n pour $n \in \mathbb{N}$
 - c. Justifier que les points I_n pour $n \in \mathbb{N}$ représentent une suite réelle qu'on déterminera.

3 Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $U_n = n^2$ et (V_n) la suite définie par $V_n = U_{n+1} - U_n$.

- 1) Montrer que (V_n) est une suite arithmétique.
- 2) Calculer $S_n = V_6 + V_7 + V_8 + \dots + V_n$.
- 3) Déterminer n sachant que $S_n = 220$.

4 La figure ci-contre représente une spirale. Pour tout entier naturel non nul, on note a_n la longueur de la spirale comprise entre M_{n-1} et M_n (l'unité de longueur étant le côté d'un carreau du quadrillage)

- 1) Calculer a_1 , a_2 et a_3
- 2) Que peut-on conjecturer sur la nature de la suite (a_n)
- 3) Calculer la longueur de la spirale entre les points M_0 et M_n



5

Soit a , b et c trois réels distincts tels que $a \neq 0$. On suppose que a , b et c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q et que $3a$, $2b$ et c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique.

- 1) Montrer que $(q - 2)^2 - 1 = 0$.
- 2) Déterminer alors q .

6

Soit U une suite géométrique dont les termes sont négatifs et vérifiant :

$$U_0 < U_1 < U_2 < U_3 \dots < U_n < U_{n+1} < \dots$$

- 1) Soit q la raison de cette suite. Prouver que $q \in]0, 1[$.
- 2) On suppose que : $U_0 + U_1 + U_2 = -\frac{19}{9}$ et que $U_0 U_2 = \frac{4}{9}$
 - a. Montrer que : $6q^2 - 13q + 6 = 0$
 - b. Vérifier que $(3q - 2)(2q - 3) = 6q^2 - 13q + 6$.
 - c. Calculer alors q puis U_n en fonction de n .

7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$1 + \left(\frac{2x}{2x+1}\right) + \left(\frac{2x}{2x+1}\right)^2 + \left(\frac{2x}{2x+1}\right)^3 + \dots + \left(\frac{2x}{2x+1}\right)^9 = 0$$

8

64 joueurs participent à un tournoi individuel de tennis. Le joueur qui perd une partie est éliminé.

- 1) Quel est le nombre de parties du
 - a. 1er tour.
 - b. 2ème tour.
 - c. 3ème tour.
- 2) Quel est le nombre total de parties ?
- 3) Reprendre les mêmes questions dans le cas où le nombre de participants est égal à 2^n avec n un entier naturel non nul

9

Le 01/01/2000 un journal compte 12 000 abonnés. Le service des abonnements a noté que, chaque mois, 1 000 abonnements arrivent à échéance. Sur ces 1 000 abonnements, 750 sont renouvelés. De plus chaque mois 320 nouveaux abonnements sont souscrits.

On note u_1 ; u_2 ; ... ; u_{12} , u_{13} , ... le nombre d'abonnés aux dates respectives 01/01/2000; 01/02/2000; ...; 01/12/2000; 01/01/2001; ...

- 1) Calculer u_2 et u_3
- 2) a. Montrer que la suite (u_n) est une suite arithmétique et donner sa raison.
b. Calculer u_{12} .
- c. Déterminer le nombre d'abonnés au journal à la date du 01/12/2006

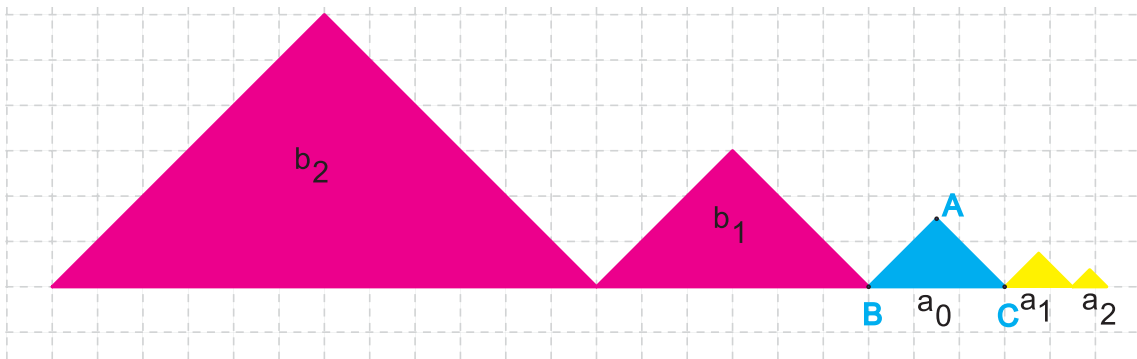
10 Un village avait 3123 habitants en 1995. Le nombre d'habitants diminue de 12% tous les ans (à cause de l'exode rural). On note P_n le nombre d'habitants

du village pour l'année n (on arrondira tous les résultats à l'entier le plus proche)

- 1) Donner les valeurs de P_{1995} , P_{1996} et P_{1997} .
- 2) Justifier que la suite (P_n) est une suite géométrique et donner sa raison.
- 3) Calculer P_{2006} .
- 4) En quelle année le nombre d'habitants commencera-t-il à diminuer du moins des deux tiers par rapport à 1995 ?
- 5) Représenter graphiquement les termes de la suite (P_n) pour n variant de 1995 à 2007.

11 Dans la figure ci – dessous, ABC est un triangle rectangle en A et tel que :

$$AB = AC = a$$



Du côté droit de ABC, on construit des triangles rectangles isocèles dont la mesure du côté de l'un est la moitié de celle du triangle qui le précède. On notera a_n la mesure de l'aire du triangle numéro n à partir de ABC. a_0 désignera la mesure de l'aire du triangle ABC.

Du côté gauche de ABC, on construit des triangles rectangles isocèles dont la mesure du côté de l'un est le double de celle du triangle qui le précède. On notera b_n la mesure de l'aire du triangle numéro n à partir de ABC.

- 1) a. Calculer a_1 et b_1 en fonction de a_0
- b. Quelle est la nature de chacune des suites (a_n) et (b_n)

2) On pose $A_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$

$$B_n = a_0 + b_1 + b_2 + \dots + b_n.$$

Calculer chacune des limites suivantes si elle existe :

a. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$

b. $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$

c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$

d. $\lim_{n \rightarrow +\infty} B_n$

12 Le vieil Ehsene vivait entouré de ses enfants, petits -enfants et arrière -petits-enfants. Ils formaient ainsi lui-même et sa descendance un groupe de 400 personnes, chacun d'eux ayant eu le même nombre d'enfants (sauf les arrière -petits- enfants qui ne se sont pas encore mariés) et tous encore en vie. Sauriez-vous combien le vieil Ehsene a eu d'enfants ?

(d'après les jeux mathématiques d'Eureka)

13 Soit la suite $\begin{cases} U_1 = 6 \\ 3U_{n+1} - 2U_n = 3 \end{cases}$

- 1) Calculer U_2 , U_3 et U_4 . Vérifier que U n'est ni arithmétique ni géométrique.
- 2) Soit $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*} : V_n = U_n - 3$
 - a. Calculer V_1 puis montrer que pour tout entier naturel n non nul on a : $3V_{n+1} - 2V_n = 0$
 - b. Déterminer la nature de la suite V puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

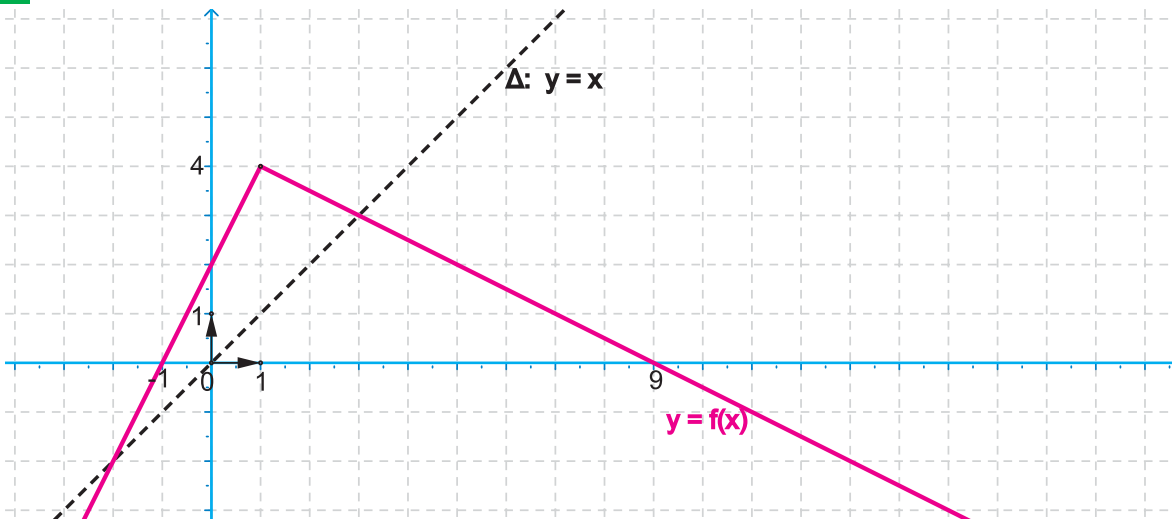
14 Soit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} U_0 = 5 \\ U_{n+1} = \frac{U_n + 4}{3} \end{cases}$

- 1) a. Représenter les cinq premiers termes de cette suite.
- b. Dédire une conjecture concernant $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$
- 2) a. Déterminer le réel α pour que le rapport $\frac{U_{n+1} - \alpha}{U_n - \alpha}$ soit constant lorsque n varie dans $\mathbb{N}$
- b. Utiliser a) pour définir à partir de (U_n) une suite géométrique (V_n) dont on précisera la raison et le premier terme V_0
- c. Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

15 Soit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} U_0 = 6 \\ 3U_{n+1} - 2U_n = 3 \end{cases}$

- 1) Calculer U_1 , U_2 . En déduire que (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
- 2) Représenter graphiquement les cinq premiers termes de cette suite.
- 3) On pose $V_n = U_n + \alpha$. $\alpha \in \mathbb{R}$.
 - a. Déterminer α pour que (V_n) soit une suite géométrique qu'on caractérisera.
 - b. Exprimer V_n puis U_n en fonction de n .
 - c. On pose $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$ et $S'_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$. Calculer S'_n puis S_n .
 - d. Déterminer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

16 Soit f la fonction représentée par le graphique suivant :



On considère la suite U définie par $U_0 = -\frac{3}{2}$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$

1) Représenter les six premiers termes de la suite U . Que peut-on conjecturer sur la limite de U quand n tend vers $+\infty$?

2) Vérifier que $f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x \leq 1 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ puis Calculer U_0, U_1, U_2, U_3, U_4 et U_5

4) Vérifier que pour $n \geq 3$ on a $U_{n+1} - 3 = -\frac{1}{2} (U_n - 3)$

5) En utilisant une suite auxiliaire convenable trouver l'expression de U_n en fonction de n puis déterminer la limite de U quand n tend vers $+\infty$

17 1) Ecrire le rationnel $a = 1,50\overline{23}$... sous forme fractionnaire (voir TP n°1)

2) a. Vérifier que le rationnel $b = \frac{25}{22}$ n'est pas décimal

b. Montrer que b est une somme infinie de nombres décimaux (c'est-à-dire que b est la limite à l'infini de la somme des n premiers termes d'une suite réelle dont les termes sont des nombres décimaux)

18 Un ouvrier vient de déménager à cause de son nouveau travail, il loue alors une maison au prix de 1200 D la première année. Le contrat de location impose une augmentation annuelle de 5% sur la totalité du montant payé l'année précédente en plus de 100 D comme frais d'entretien.

1) Modéliser la situation présentée à l'aide d'une suite récurrente.

2) On suppose que le salaire de l'ouvrier est égal à 400 D par mois la première année puis une augmentation annuelle égale à 5%. Quelle est la durée possible du contrat de location, sachant que l'ouvrier ne peut pas consacrer plus du tiers de son salaire au loyer? (on utilisera une calculatrice ou un tableur).

APERCU HISTORIQUE

• Les premières suites numériques sont étudiées chez les Grecs, par exemple la suite des nombres premiers; ARCHIMEDE travaille sur des suites numériques croisées dont les termes correspondent avec la longueur des arêtes des polygones inscrits et exinscrits dans un cercle de rayon constant, suites croisées dont la limite commune fait intervenir le nombre

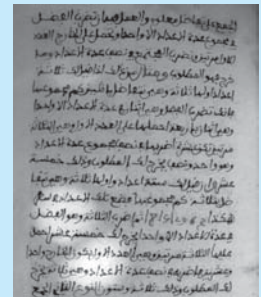
• Dans les années 1200 en Italie **LEONARDO DE PISE (FIBONACCI) (1175-1240)** crée la suite numérique récurrente qui porte son nom et définie de la manière suivante: $u_0=1$, $u_1=1$ et $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ (cette suite traduit l'évolution d'une population de lapins)



• Les suites arithmétiques et géométriques sont étudiées en France au Moyen- Age par des hommes comme **Nicolas ORESME (1320-1382)** et **Nicolas CHUQUET (1445-1500)** mais il semble bien que ces deux suites étaient connues des chinois pendant la même époque et c'est à la renaissance (en particulier en Italie) que les suites numériques (explicites ou récurrentes) qui appartiennent aussi bien à l'algèbre qu'à l'analyse furent étudiées systématiquement

• AL – KALASADI

Le document ci-joint est l'une des pages du manuscrit d'AL – KALASADI intitulé "ATTABSIRA ALWADHIHA FI MASAËL ALÂDAD AL- LAÏHA " trouvé à MATMATA au sud-ouest de GABES.



"الجمع على تفاضل معلوم والعمل فيه أن تضرب الفضل في مجموع عدة الأعداد إلا واحدا وتحمل على الخارج العدد الأول مرتين وتضرب المجتمع في نصف عدة الأعداد وما خرج فهو المطلوب ومثال من ذلك إذا قيل لك ثلاثة أعداد أولها ثلاثة وهي تتفاضل باثنين كم مجموعها فإنك تضرب الفضل وهي اثنان في عدة الأعداد إلا واحدا وهي اثنان بأربعة أحملها على العدد الأول وهي الثلاثة مرتين تكن عشرة اضربها في نصف مجموع عدة الأعداد وهو واحد ونصف يخرج لك المطلوب وذلك خمسة عشرة وإن قيل لك ستة وأولها ثلاثة وهي تتفاضل بثلاثة كم مجموعها فضع تلك الأعداد في سطر هكذا 3 6 9 12 15 18 ثم اضرب الثلاثة وهو الفضل في عدة الأعداد إلا واحدا تخرج لك خمسة عشرة أحمل عليها الثلاثة مرتين وهي العدد الأول يكون الخارج واحد وعشرين فاضربه في نصف عدة الأعداد وهي ثلاثة يخرج لك المطلوب وذلك ثلاثة وستون النوع الثاني الجمع على نسبة معلومة وهي على ضربين أحدهما الجمع على تفاضل الضعف ويسمى الجمع على مثل بيوت الشطرنج والثاني على نسبة دون الضعف والعقلية..."

Traduction

"...Si les nombres ont entre eux une différence connue, multiplie alors la raison par le nombre de termes moins un, au résultat tu ajoutes deux fois le premier terme et tu multiplies ce que tu as obtenu par la moitié du nombre des termes : le résultat est ce qui est demandé.

Par exemple si on t'a dit trois nombres dont le premier est trois et ont pour raison deux. Quelle est leur somme ?

Tu multiplies la raison qui est deux par le nombre des termes moins un qui est deux ça fait quatre que tu lui ajoutes le premier terme qui est trois deux fois : ça donne dix que tu multiplies par la moitié de nombre des termes qui est un et demi tu auras ce qui est demandé : c'est quinze.

Un deuxième exemple si on t'a dit six nombres dont le premier est trois et la raison est aussi trois. Quelle est leur somme ?

Ecris alors ces nombres sur une ligne de la manière suivante : 3 6 9 12 15 18 puis tu multiplies trois qui est la raison par le nombre des termes moins un ça fait quinze que tu lui ajoutes le double de trois (en tant que premier terme) : ça donne vingt et un que tu multiplies par la moitié de nombre des termes qui est trois tu auras ce qui est demandé : c'est soixante trois."

PLAN DU CHAPITRE

I) Fonction numérique à variable réelle

II) Sens de variation d'une fonction

III) Opérations sur les fonctions

IV) Comparaison de fonctions et extrema

V) Éléments de symétrie

Travaux pratiques

Avec l'outil informatique

Exercices et problèmes

Mathématiques et culture

I. Fonction numérique à variable réelle

Activités préliminaires

1. 1) On considère un cercle (C) de centre un point fixe O et de rayon variable r.
 - a. Dans quel ensemble peut varier le rayon r ?
 - b. Ecrire le périmètre p du cercle (C) en fonction de r.
 - c. Ecrire l'aire du disque de rayon r en fonction de p.
- 2) On considère un rectangle quelconque.
 - a. Dans quel ensemble peut varier son périmètre p ?
 - b. La donnée du périmètre p du rectangle détermine-t-elle son aire ?
 - c. Peut-on écrire l'aire d'un rectangle comme fonction de son périmètre ?

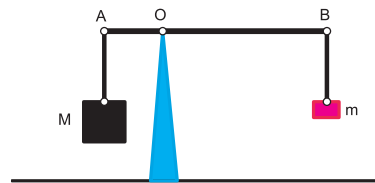
Principe du levier

2. a. On donne $m = 2\text{kg}$ et $M = 20\text{kg}$.

Si on fixe les masses m et M et on fait varier le point de contact O, déterminer, à l'équilibre, la distance OB en fonction de OA

- b. On donne $M = 15\text{ kg}$ et $OA = 20\text{ cm}$.

Si on fixe la masse M et le point O et on fait varier la masse m, déterminer à l'équilibre, la masse m en fonction de OB.



Activités de découverte

3. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Recopier et compléter le tableau suivant

$$x \mapsto x^2 - x + 2$$

1 a pour image	
3 est l'antécédent de	
$\frac{7}{4}$ est l'image de	
l'image de 0 est	
les antécédents de 2 sont	
le plus petit des réels $f(-2)$ et $f(0)$ est	
le plus grand des réels $f(0)$ et $f(2)$ est	

4. 1) Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto 2x - 5$$

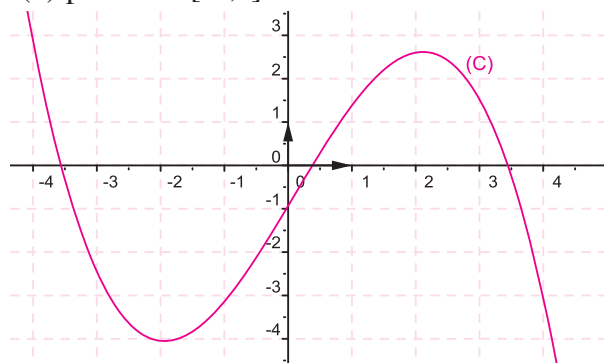
- a. Quelle est la nature de la fonction f ?
- b. Quelle est la nature de sa courbe représentative ?
- c. Tracer cette courbe dans un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

2) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 3x + 5$

Quelle est la nature de sa courbe représentative ? Tracer la dans un repère orthogonal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ du plan.

5. La courbe ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. Déterminer graphiquement

- $f(-2)$, $f(1)$ et $f(2)$
- les antécédents de 0 et de -1
- l'ordre des réels $f(-2)$, $f(0)$ et $f(2)$
- le signe de $f(x)$ pour $x \in [1, 3]$
- le nombre de solutions, dans $]-4, 3[$, de l'équation $f(x) = 0$
- * le nombre de solutions, dans $]-4, 4[$, de l'équation $f(x) = -4$.
- * l'ensemble des réels $f(x)$ pour $x \in [-3, 3]$



6. Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$f: x \mapsto 2, g: x \mapsto -3x+1, h: x \mapsto x^2-2x+5, u: x \mapsto \frac{2x+1}{3x-5} \text{ et } v: x \mapsto \sqrt{2x+3}$$

L'essentiel du cours

Définition 1

Soit D une partie de $\mathbb{R}$. On appelle fonction numérique à variable réelle f de D vers $\mathbb{R}$, un procédé qui à tout réel x de D fait correspondre au plus un réel noté $f(x)$.

Remarque : Par abus de langage, une fonction numérique à variable réelle est dite, tout simplement, fonction.

Définition 2

On appelle ensemble de définition d'une fonction f , l'ensemble de tous les réels x pour lesquels $f(x)$ existe.

Remarque

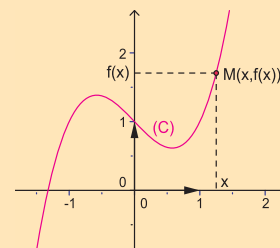
Une fonction est déterminée par son ensemble de définition et l'image de tout réel de cet ensemble.

Définition 3

Le plan est rapporté à un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Si f est une fonction définie sur un ensemble D ; l'ensemble (C) des points $M(x, f(x))$ où x est un élément de D est dit représentation graphique ou courbe représentative de la fonction f .

$$(C) = \{M(x, f(x)), x \in D\}.$$

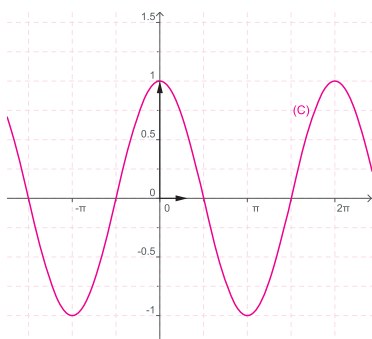
Ainsi, pour tout point $M(x, y)$ du plan, $M \in (C) \Leftrightarrow (x \in D \text{ et } y = f(x))$



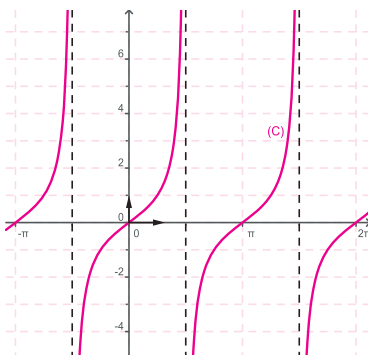
Auto évaluation

1. Parmi les courbes suivantes, lesquelles sont représentatives d'une fonction?

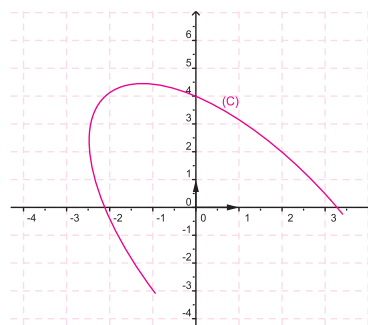
(fig.1)



(fig.2)

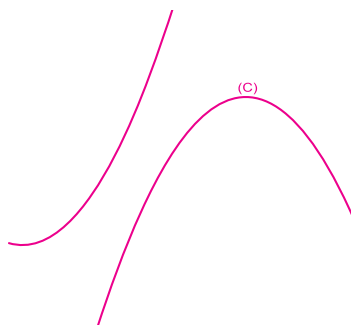


(fig.3)

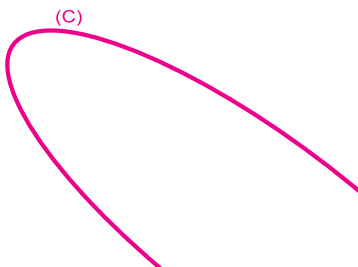


2. Pour chacune des trois courbes suivantes, tracer un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que la courbe soit la courbe représentative d'une fonction.

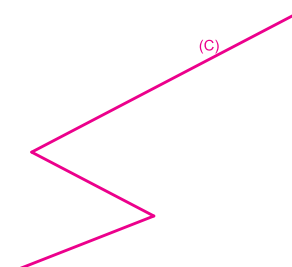
(fig.1)



(fig.2)



(fig.3)



3. Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions définies par :

a) $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x}$ b) $f(x) = \sqrt{1-x}$ c) $f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$ d) $f(x) = \frac{x+1}{|x|-2}$

e) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{2-x}$ f) $f(x) = \frac{1}{|x|+1}$ g) $f(x) = \frac{x}{x+2} - \frac{1}{x-2}$ h) $f(x) = \frac{x^2+1}{x-3}$

4. L'unité de mesure étant le centimètre, dans un rectangle ABCD de longueur $AB = 4$ et de largeur $BC = 3$, on considère un point M variable sur le segment $[AB]$ privé de A et B et on note S l'aire du disque de centre A et tangent à $[DM]$.

1) Faire une figure.

2) Si on désigne par d la distance AM, définir la fonction f qui à toute distance d associe l'aire S correspondante.

II. Sens de variation d'une fonction

Activités préliminaires

1.

- 1) Comment varie le volume d'un cylindre de base fixe, si sa hauteur augmente ?
- 2) Comment varie, en fonction du temps, la distance au sol d'un solide en chute libre ?
- 3) Comment varie l'aire d'une plaque rectangulaire, si son périmètre augmente ?

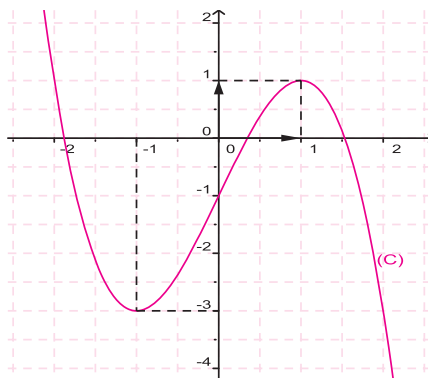
Activités de découverte

2. On considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto -6x + 4$ et $g : x \mapsto 3x^2 - 6x + 4$

- 1) a. Donner le sens de variation de chacune des fonctions f et g sur $\mathbb{R}$.
b. Comparer $f(x)$ et $g(x)$ pour x réel.
- 2) Ordonner, sans calcul, les réels suivant $f(-10)$, $g(-20)$, $f(-20)$ et $g(-30)$.

3. La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$

Utiliser cette courbe pour déterminer le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.



4. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$. Donner le sens de variation de la fonction f sur chacun des intervalles $] -\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$.

5. Soit f une fonction définie sur ensemble D .

On pose pour tout x_1 de D et tout x_2 de D tels que $x_1 \neq x_2$, $T = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

- 1) Montrer que la fonction f est croissante sur D si et seulement si pour tout x_1 de D et tout x_2 de D tels que $x_1 \neq x_2$ on a $T \geq 0$
- 2) Montrer que la fonction f est décroissante sur D si et seulement si pour tout x_1 de D et tout x_2 de D tels que $x_1 \neq x_2$ on a $T \leq 0$

L'essentiel du cours

Définitions

Soit f une fonction définie sur D .

- * La fonction f est dite strictement croissante sur D si, pour tout x_1 de D et tout x_2 de D tels que $x_1 < x_2$, on a $f(x_1) < f(x_2)$.
- * La fonction f est dite strictement décroissante sur D si, pour tout x_1 de D et tout x_2 de D tels que $x_1 < x_2$, on a $f(x_1) > f(x_2)$.
- * La fonction f est dite croissante sur D si, pour tout x_1 de D et tout x_2 de D tels que $x_1 \leq x_2$, on a $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- * La fonction f est dite décroissante sur D si, pour tout x_1 de D et tout x_2 de D tels que $x_1 \leq x_2$, on a $f(x_1) \geq f(x_2)$.
- * La fonction f est dite strictement monotone sur D si f est strictement croissante ou strictement décroissante sur D .
- * La fonction f est dite monotone sur D si f est croissante ou décroissante sur D .

Taux de variation

Soit f une fonction définie sur D .

Pour tous réels x_1 et x_2 distincts de D , le réel $T = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ est appelé taux de variation (ou d'accroissement) de f entre x_1 et x_2 .

Auto évaluation

1. (Q.C.M.) Cocher les cases convenables

(Une réponse ou plus peuvent être valables)

a. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto -2x + 3$ est

- ☐ croissante sur $\mathbb{R}^+$
- ☐ décroissante sur $\mathbb{R}^-$
- ☐ décroissante sur $\mathbb{R}$
- ☐ on ne peut rien dire sur les variations de f .

b. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto -x^2 + 1$ est

- ☐ décroissante sur $\mathbb{R}$
- ☐ croissante sur $\mathbb{R}^-$
- ☐ croissante sur $\mathbb{R}^+$
- ☐ on ne peut rien dire sur les variations de f .

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = t^3 - t^2 + t + 2$.

a. Montrer que pour tous réels x et y on a :

$$f(x) - f(y) = (x - y) \left[\left(x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(y - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} \right].$$

b. En déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

III. Opérations sur les fonctions

Activités de découverte

1. On considère les fonctions A et B définies sur $\mathbb{R}-\{2\}$ par $A(x) = \frac{-x^2 + 3x - 1}{x - 2}$ et $B(x) = x - 2$.

- 1) Calculer, pour tout x de $\mathbb{R}-\{2\}$, $A(x) + B(x)$
- 2) Vérifier que pour tout x de $\mathbb{R}-\{2\}$, $A(x) - B(x) = -2x + 3 + \frac{1}{x - 2}$
- 3) Déterminer la fonction f définie par $f(x) = A(x)B(x)$.

2. On donne les fonctions F et G définies sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^2 - 3x + 2$ et $G(x) = x^2 - 1$.

- 1) Vérifier que $F(x) = (x - 1)(x - 2)$.
- 2) Pour tout réel x tel que $G(x) \neq 0$, on pose $H(x) = \frac{F(x)}{G(x)}$. Simplifier l'expression $H(x)$ et donner l'ensemble de définition de la fonction H qui à x associe $H(x)$.

3. 1) Tracer dans un repère orthogonal La courbe représentative (C) de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 1$.

2) On considère la fonction t définie sur $\mathbb{R}$ par $t(x) = x^2 + 2x + 2$.

- a. Tracer, dans le même repère, la courbe représentative (C') de t.
- b. Ecrire $t(x)$ en fonction de $f(x)$.
- c. Comment peut-on obtenir (C') à partir de (C) ?

4. 1) Recopier la figure ci-contre.

2) La courbe (C₁) est la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x + 2$.

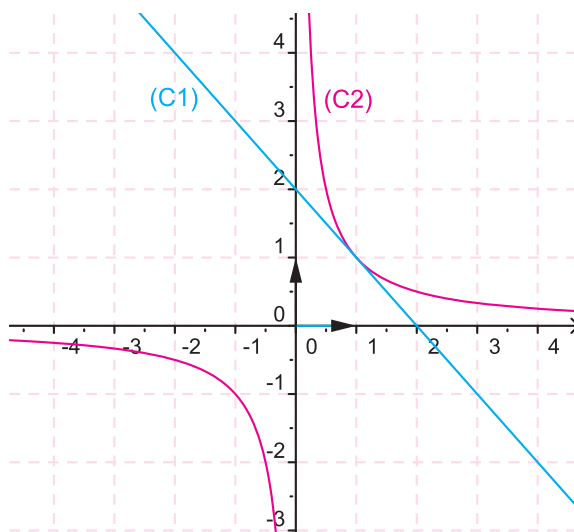
On considère la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = -3x + 6$.

- a. Tracer sa courbe représentative.
- b. Ecrire $p(x)$ en fonction de $f(x)$.

3) La courbe (C₂) est la représentation graphique de la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \frac{1}{x}$.

On considère la fonction s définie sur $\mathbb{R}^*$ par $s(x) = f(x) + g(x)$ et soit (C₃) sa courbe représentative.

- a. Donner l'allure de la courbe (C₃).
- b. Valider cette allure à l'aide d'un logiciel.



5. Soient f et g deux fonctions définies sur un ensemble D et α un réel positif. On définit sur D les fonctions R , S et P respectivement par $R(x) = -f(x)$, $S(x) = f(x) + g(x)$ et $P(x) = \alpha f(x)$.

1) Montrer que

- si f est croissante sur D alors R est décroissante sur D .
- si f est décroissante sur D alors R est croissante sur D .
- si f et g sont croissantes sur D alors S est croissante sur D .
- si f et g sont décroissantes sur D alors S est décroissante sur D .
- si f est croissante sur D alors P est croissante sur D .
- si f est décroissante sur D alors P est décroissante sur D .

2) Peut-on prévoir le sens de variation de la fonction S si f est croissante sur D et g est décroissante sur D ?

L'essentiel du cours

Somme de deux fonctions

Si f et g sont deux fonctions définies sur un ensemble de réels D , on définit sur D la fonction somme de f et g qu'on note $f+g$ par $f+g : D \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x)+g(x)$$

On a alors pour tout x de D , $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

Produit d'une fonction par un réel

Si f est une fonction définie sur un ensemble D et α un réel, on définit sur D la fonction produit de f par le réel α qu'on note αf par $\alpha f : D \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \alpha \cdot f(x)$$

On a alors pour tout x de D , $(\alpha f)(x)=\alpha \cdot f(x)$

Produit de deux fonctions

Si f et g sont deux fonctions définies sur un ensemble D , on définit sur D la fonction produit de f et g qu'on note fxg par $fxg : D \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) \cdot g(x)$$

On a alors pour tout x de D , $(fxg)(x)=f(x) \cdot g(x)$

Quotient de deux fonctions

Si f et g sont deux fonctions définies sur un ensemble D et si de plus pour tout x de D on a $g(x) \neq 0$, on définit sur D la fonction quotient de f par g qu'on note

$$\frac{f}{g} \text{ par } \frac{f}{g} : D \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{C'est-à-dire : pour tout } x \text{ de } D, \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

L'essentiel du cours

Fonctions polynômes

On appelle fonction polynôme toute fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0, \text{ où } a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \text{ sont des réels.}$$

Si $a_n \neq 0$, on dit que n est le degré de P .

Polynômes particuliers

Si $n = 1$, P est dit fonction binôme.

Si $n = 2$, P est dit fonction trinôme.

Fonctions rationnelles

On appelle fonction rationnelle toute fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}, \text{ où } u \text{ et } v \text{ sont des fonctions polynômes.}$$

Théorème

La somme de deux fonctions croissantes sur un ensemble D est croissante sur cet ensemble.

La somme de deux fonctions décroissantes sur un ensemble D est décroissante sur cet ensemble.

Le produit par un réel positif d'une fonction croissante sur un ensemble D est croissante sur cet ensemble.

Le produit par un réel positif d'une fonction décroissante sur un ensemble D est décroissante sur cet ensemble.

L'opposé d'une fonction croissante sur un ensemble D est décroissante sur cet ensemble.

Auto évaluation

1. On donne les deux fonctions f et g définies par : $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$.

- 1) Quel est l'ensemble de définition de chacune des fonctions f et g ?
- 2) Déterminer les fonctions $f + g$ et $f - g$
- 3) Déterminer la fonction fxg et tracer sa courbe dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2. Soient les deux fonctions f et g définies par:

$$f(x) = (1 - 3x)^2 - (1 - 3x)(2x - 3) \quad \text{et} \quad g(x) = (x - 2)^2 - (4x - 3)^2.$$

- 1) a. Quelle est la nature de chacune des fonctions f et g ?
b. Ecrire $f(x)$ et $g(x)$ sous forme de produits de facteurs du premier degré.
- 2) On pose $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Quelle est la nature de la fonction h ?
b. Déterminer l'ensemble de définition D de h .
c. Simplifier $h(x)$ pour $x \in D$.

- 3.1) Justifier que les fonctions f et g définies sur $]0, +\infty[$ respectivement par $f(x) = x^2 + 3x - 5$ et $g(x) = -\frac{1}{x} + 3$ sont strictement croissantes sur cet intervalle.
- 2) Soit la fonction $h : x \mapsto \frac{1}{x} - 2x^2 - 6x + 7$
- Exprimer, pour $x \in]0, +\infty[$, $h(x)$ en fonction de $f(x)$ et $g(x)$.
 - En déduire que h est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.
4. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par $f(x) = \frac{x^2 - x - 5}{x - 2}$.
- Vérifier que pour tout x de $\mathbb{R} - \{2\}$, $f(x) = x + 1 - \frac{3}{x - 2}$.
 - Donner le sens de variation de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x - 2}$ sur $]2, +\infty[$
 - En déduire que f est strictement croissante sur $]2, +\infty[$.

IV. Comparaison de fonctions et extrema

Activités préliminaires

1. 1) Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - x$ et $g(x) = x^3$

Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $f(x) \leq g(x)$.

- 2) Considérons les fonctions f , g et h définies par :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sqrt{(x - 1)^2}$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto |x - 1|$$

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x - 1$$

Vérifier que pour tout réel x , on a $f(x) = g(x)$ et $h(x) \leq f(x)$.

2. On donne les courbes (C_1) et (C_2) d'équations respectives

$$y = x^2 \text{ et } y = -x - 1.$$

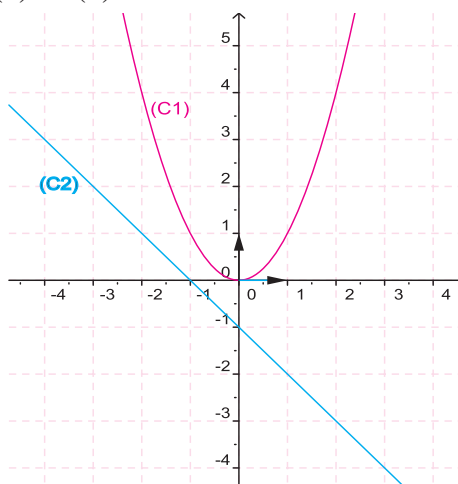
- 1) Montrer graphiquement que :

- a. l'équation $x^2 + x + 1 = 0$

n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$.

- b. pour tout réel x , $x^2 > -x - 1$.

- 2) Retrouver les résultats algébriquement.



3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4(x+1)^2 - (3x-2)^2$ et (C)

sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Étudier suivant les valeurs de x , le signe de $f(x)$. En déduire la position relative de la courbe (C) par rapport à l'axe des abscisses.

4. On considère les fonctions f , g et h définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par

$$f(x) = 2(x-3)^2, g(x) = -(x-2)^2 \text{ et } h(x) = (x-3)^3.$$

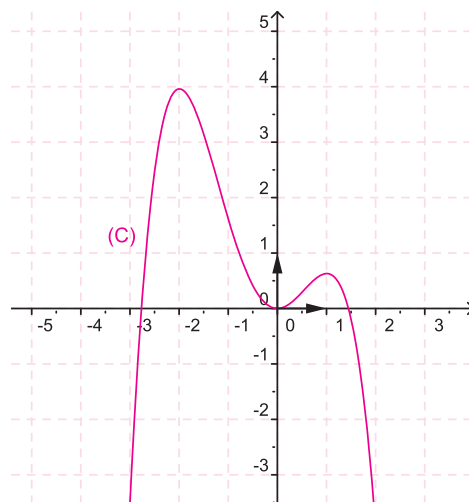
1) Comparer suivant les valeurs de x , les réels $f(x)$ et $g(x)$. Que peut-on dire des courbes représentatives de f et g ?

2) Comparer suivant les valeurs de x , les réels $f(x)$ et $h(x)$. Que peut-on dire des courbes représentatives de f et h ?

5. La courbe (C) ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

1) Déterminer, graphiquement, le réel t tel que :
pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq t$

2) Déterminer, graphiquement, un intervalle ouvert I contenant 0 tel que pour tout $x \in I$,
 $f(x) \geq f(0)$



L'essentiel du cours

Soient f et g deux fonctions définies sur D

Egalité de fonctions

Les fonctions f et g sont dites égales sur D si pour tout x de D , on a $f(x) = g(x)$.

On écrit $f = g$ sur D .

Restriction d'une fonction

Soit D' une partie de D . La fonction h définie sur D' par $h(x) = f(x)$ pour tout x de D' est appelée restriction de f sur D' . On la note $f|_{D'}$

On a alors $f|_{D'} : D' \rightarrow \mathbb{R}$, autrement $f|_{D'} = f$ sur D'

$$x \mapsto f(x)$$

Comparaison de fonctions

- f est dite supérieure à g sur D , si pour tout x de D , on a $f(x) \geq g(x)$.

On écrit $f \geq g$ sur D .

- f est dite inférieure à g sur D , si pour tout x de D , on a $f(x) \leq g(x)$

On écrit $f \leq g$ sur D .

Signe d'une fonction

- f est dite positive sur D , si pour tout x de D , on a $f(x) \geq 0$

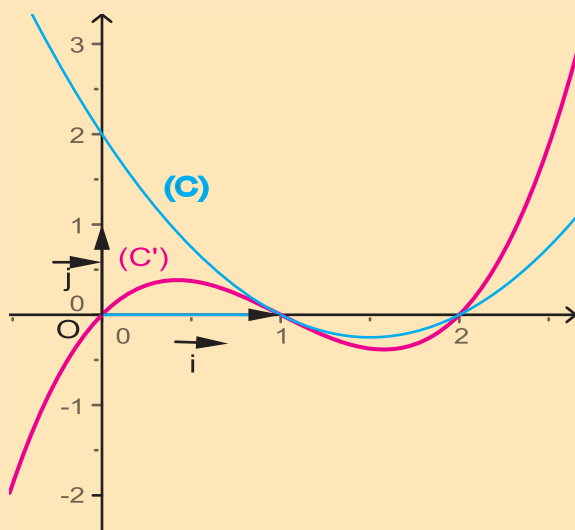
On écrit $f \geq 0$ sur D .

- f est dite négative sur D , si pour tout x de D , on a $f(x) \leq 0$

On écrit $f \leq 0$ sur D .

Illustration graphique

Les courbes (C) et (C') ci-dessous sont les représentations graphiques respectives de deux fonctions f et g dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.



On a :

- $f \geq g$ sur $]-\infty, 2]$
- $f \leq 0$ sur $[1, 2]$
- $g \geq 0$ sur $[0, 1] \cup [2, +\infty[$

Fonction majorée, fonction minorée, fonction bornée.

- f est dite majorée sur D s'il existe un réel M tel que pour tout x de D , $f(x) \leq M$.
- f est dite minorée sur D s'il existe un réel m tel que pour tout x de D , $f(x) \geq m$.
- f est dite bornée sur D si elle est à la fois majorée et minorée.

Maximums

- On dit que f admet un maximum local en x_0 égal à $f(x_0)$ s'il existe un intervalle ouvert I inclus dans D , contenant x_0 tel que:
pour tout x de I , $f(x) \leq f(x_0)$.
- Si pour tout x de D , $f(x) \leq f(x_0)$, on dit que $f(x_0)$ est un maximum global de f sur D .

Minimums

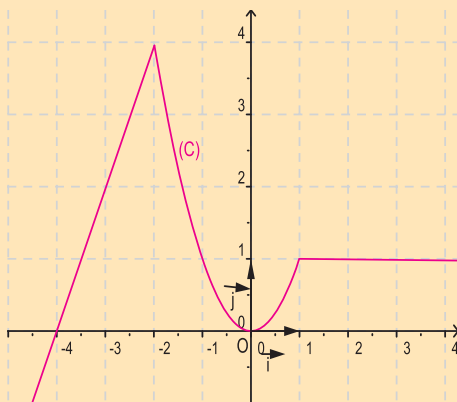
- On dit que f admet un minimum local en x_0 égal à $f(x_0)$ s'il existe un intervalle ouvert I inclu dans D , contenant x_0 tel que pour tout x de I , $f(x) \geq f(x_0)$.
- Si pour tout x de D , $f(x) \geq f(x_0)$, on dit que $f(x_0)$ est un minimum global de f sur D .

Extremums

Un minimum ou un maximum est dit extremum.

Illustration graphique

La courbe (C) ci-dessous est la représentation graphique, dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, d'une fonction f .



On a :

- Tout réel M supérieur à 4 est un majorant de f .
- 4 est un maximum global de f .
- 1 est un maximum local de f .
- 0 est un minimum local de f .
- f est majorée et non minorée.

Auto évaluation

1. Déterminer dans chacun des cas suivants les ensembles de définition des fonctions f et g et examiner si $f = g$.

a) $f(x) = \sqrt{x-1}\sqrt{x-2}$, $g(x) = \sqrt{(x-1)(x-2)}$. b) $f(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}$, $g(x) = \frac{4}{x^2-4}$.

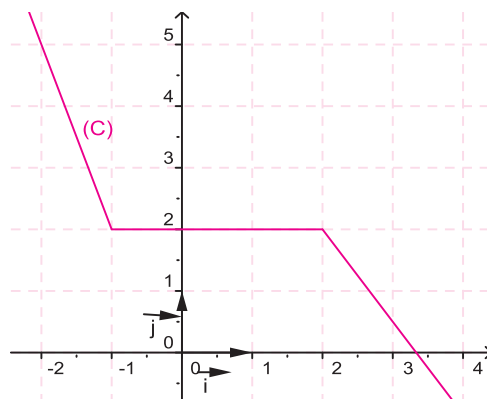
2. On considère les deux fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} \quad \text{et} \quad g(x) = x + 2$$

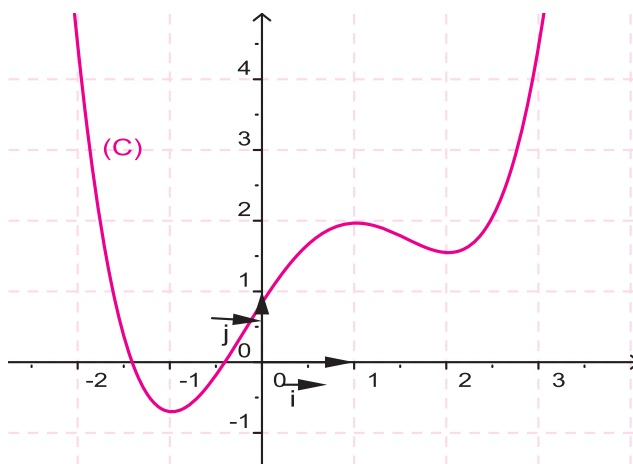
- 1) Donner leurs ensembles de définition.
- 2) Factoriser l'expression $A(x) = x^2 + x - 2$ (on remarquera que $A(x) = x^2 - 1 + x - 1$)
- 3) Comparer les deux fonctions f et g .
- 4) Comparer les restrictions de f et de g sur $]1, +\infty[$

3. La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

- 1) Déterminer les restrictions de la fonction f sur chacun des intervalles $]-\infty, -1]$, $[-1, 2]$ et $[2, +\infty[$.
- 2) Résoudre, graphiquement puis algébriquement, l'équation $f(x) = x - 1$



4. La courbe ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. Utiliser le graphique pour étudier le sens de variation de f et pour donner son signe et des valeurs approchées de ses extremums.



V. Eléments de symétrie

Activités préliminaires

1. 1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 1$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a. Tracer (C) et préciser son axe de symétrie.

b. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$. Que peut-on en déduire pour f ?

2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \frac{3}{x}$ et on désigne par (C') sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

a. Tracer (C') et préciser son centre de symétrie.

b. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $g(-x) = -g(x)$. Que peut-on en déduire pour g ?

2. Montrer que la courbe représentative d'une fonction paire dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et que la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Activités de découverte

3. 1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 4x + 1$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a. La fonction f est-elle paire ? Est-elle impaire ?

b. Tracer la parabole (C) . Préciser son axe de symétrie.

c. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-4-x) = f(x)$.

2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{2x-1}{x-3}$ et (C') sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

- a. La fonction g est-elle paire ? Est-elle impaire ?
 b. Tracer l'hyperbole (C') . Préciser son centre de symétrie.
 c. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R} - \{3\}$, $(6-x) \in \mathbb{R} - \{3\}$ et $g(6-x) = 4 - g(x)$.

4.1) Soit f une fonction définie sur un ensemble non vide D de réels.

(C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, a un réel et (Δ) la droite d'équation $x = a$.

Montrer que $(S_{\Delta}(C) = (C)) \Leftrightarrow$ (pour tout $x \in D$, $2a-x \in D$ et $f(2a-x) = f(x)$)

2) Soit g une fonction définie sur un ensemble non vide D' de réels.

(C') sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, a et b deux réels et I le point de coordonnées (a, b) .

Montrer que $(S_I(C') = (C')) \Leftrightarrow$ (pour tout $x \in D'$, $2a-x \in D'$ et $g(2a-x) = 2b - g(x)$).

L'essentiel du cours

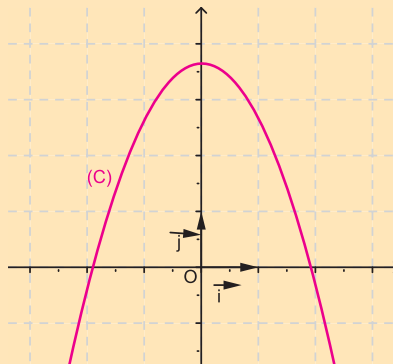
f désigne une fonction définie sur une partie non vide D de $\mathbb{R}$ et (C) désigne sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Fonction paire

- La fonction f est dite paire si,

$$\text{pour tout } x \in D, \text{ on a : } \begin{cases} -x \in D \\ \text{et} \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$$

- Si f est paire alors (C) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



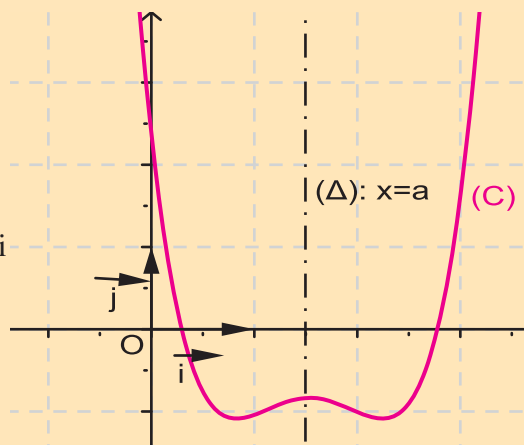
Axe de symétrie

- Une droite $\Delta : x = a$, ($a \in \mathbb{R}$) est un axe de symétrie de la courbe (C) , si

$S_{\Delta}(C) = (C)$ (S_{Δ} étant la symétrie axiale d'axe (Δ))

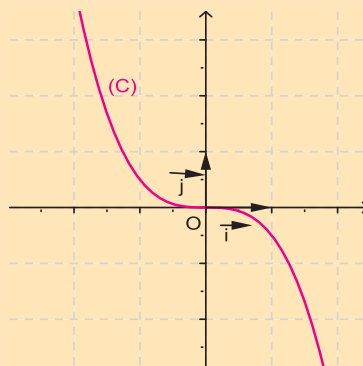
- La droite $\Delta : x = a$ est un axe de symétrie de la courbe (C) si et seulement si

$$\text{pour tout } x \in D, \text{ on a : } \begin{cases} 2a-x \in D \\ \text{et} \\ f(2a-x) = f(x) \end{cases}$$



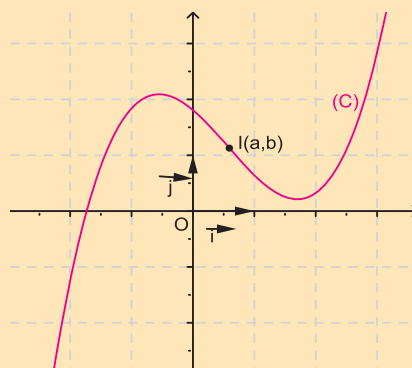
Fonction impaire

- La fonction f est dite impaire si,
pour tout $x \in D$, on a :
$$\begin{cases} -x \in D \\ \text{et} \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$$
- Si f est impaire alors (C) est symétrique par rapport à l'origine O du repère.



Centre de symétrie

- Un point $I(a,b)$, ($a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$) est un centre de symétrie de la courbe (C) , si $S_I(C)=(C)$ (S_I étant la symétrie centrale de centre I .)
- La point $I(a,b)$ est un centre de symétrie de la courbe (C) si et seulement si
pour tout $x \in D$, on a :
$$\begin{cases} 2a-x \in D \\ \text{et} \\ f(2a-x) = 2b - f(x) \end{cases}$$



Auto évaluation

- Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes puis étudier sa parité.

- | | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|---------------------------------------|
| • $f : x \mapsto 3x-2$ | • $g : x \mapsto -x^2+3$ | • $h : x \mapsto 3x^2-x+1$ |
| • $u : x \mapsto -3x^3-x$ | • $v : x \mapsto 3x^4-2x^2+2$ | • $w : x \mapsto \sqrt{x+3}$ |
| • $p : x \mapsto \frac{x^2-1}{x}$ | • $q : x \mapsto \frac{x-2}{x+3}$ | • $r : x \mapsto \frac{x^2+1}{x^2-1}$ |

- Le plan étant rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a. Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes et dire si le point indiqué est centre de symétrie de sa courbe représentative.

- | | |
|---|--|
| • $f : x \mapsto \frac{x^2-x+2}{x-1}$ le point $J(1,1)$ | • $g : x \mapsto \frac{x-2}{x+3}$ le point $J(-3,1)$ |
|---|--|

b. Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes et dire si l'axe indiqué est axe de symétrie de sa courbe représentative.

- | | |
|---|--|
| • $u : x \mapsto \frac{x^2+1}{x^2-1}$ l'axe des ordonnées | • $v : x \mapsto \sqrt{x+3}$, l'axe $\Delta : x = -3$ |
| • $w : x \mapsto x-2 $, l'axe $\Delta : x = 2$ | • $p : x \mapsto (x-3)^2+1$, l'axe $\Delta : x = 3$ |

TP1 Soit ABC un triangle rectangle en B tel que $AB = 6$ et $BC = 4,5$ et I un point fixe du segment $[AC]$ tel que $AI = 5$. Un mobile M part de A et parcourt le bord ABCA. On désigne par x la distance parcourue par M.

1) Calculer AC puis vérifier que l'on a : $0 \leq x \leq 18$

2) a. Calculer IC.

b. Soit f la fonction qui à tout x fait correspondre la distance IM.

Déterminer, sans expliciter $f(x)$, le sens de variation de la fonction f .

TP2 Un maître nageur dispose d'une corde de 160 m de longueur pour délimiter avec le bord de la plage un rectangle ABCD de baignade surveillée comme l'indique le schéma ci-dessous.

1) On pose $AB = x$ et y la distance de deux points A et B de la plage.

a. Ecrire y en fonction de x .

b. Donner l'aire du rectangle ABCD en fonction de x

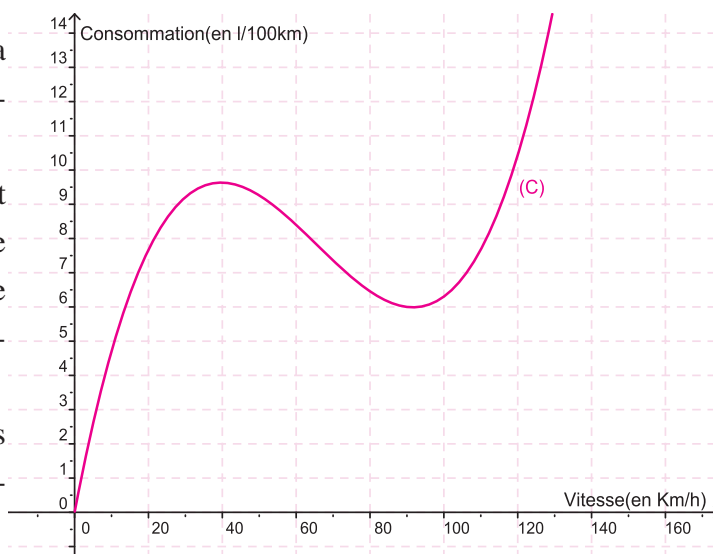
Quelle doit être la distance des bouées A et B pour que le rectangle ABCD ait une aire maximale ?



TP3 La vitesse moyenne v d'une voiture est donnée en Km/h, sa consommation en carburant est calculée en l/100km.

Cette consommation $c(v)$, dépendant de la vitesse moyenne, est modélisée par une fonction f dont la courbe représentative est la courbe (C) ci-contre.

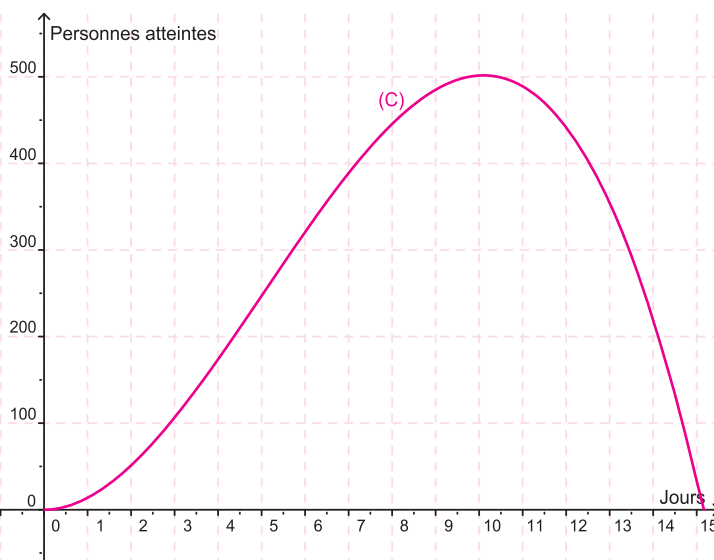
Quels sont les renseignements utiles qu'on peut recueillir à partir de ce graphique ?



TP4 Suite à une atteinte par une maladie infectieuse on a constaté que le nombre de personnes ayant été contaminées par la maladie, n jours après l'apparition du premier cas, est modélisé par une fonction dont la représentation graphique est la courbe ci-contre

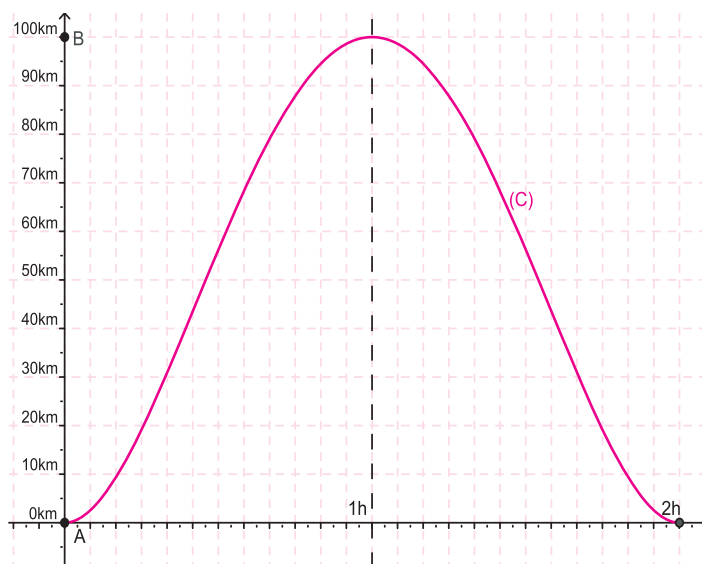
1) Combien de jours la maladie a-t-elle duré ?

2) Après combien de jours la maladie a attaqué le plus grand nombre de personnes et quel est ce nombre ?



TP5 Le parcours d'un automobiliste, partant d'une ville A vers une ville B et revenant à la ville A, est modélisé par une fonction d qui donne à tout instant t compris entre 0 et 2 heures la distance $d(t)$ qui sépare l'automobiliste de la ville A.

La représentation graphique de cette fonction est la suivante :



Le parcours de l'automobiliste présente une symétrie dans le temps. Expliquer et commenter cette hypothèse.

1 Soit f l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x+1}$

- Recopier et compléter, à l'aide du tableur Excel, le tableau suivant :

x	-1	-0,7	-0,4	-0,1	0	0,3	0,5	0,8	1,1	1,4	1,7	2	1,3	2,7	3
f(x)															

- Placer, dans un repère orthogonal, les points $M(x, f(x))$ ainsi déterminés.
- Donner l'allure de la courbe représentative (C) de la fonction f .
- Préciser cette courbe en utilisant un logiciel.
- Tracer son symétrique (C') par rapport à l'axe des abscisses.
- Quelle est votre conjecture sur la nature de la réunion $(C) \cup (C')$?

2 Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x}$ et $g(x) = f(-x)$.

1) Utiliser un logiciel pour tracer, dans un repère orthogonal, la courbe représentative (C) de la fonction f .

2) On considère les fonctions u et v définies par $u = f + g$ et $v = f - g$ et soient (C_1) et (C_2) leurs courbes représentatives respectives.

- Déterminer u et v .
- Quelle est la nature de la courbe (C_1) ? Tracer la dans la même figure.
- Utiliser le même logiciel pour tracer la courbe (C_2) . Vérifier, à l'aide de ce logiciel, que (C_2) est symétrique par rapport à l'origine du repère.

3) Soit x un réel non nul quelconque.

- Que représente le point $M(x, f(x))$ pour les points $M_1(x, u(x))$ et $M_2(x, v(x))$? (Utiliser le logiciel)
- Prouver cette conjecture.

3 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x+1}$.

1) En utilisant le tableur Excel, déterminer les images des réels

$-3, -\frac{29}{10}, \dots, -\frac{11}{10}, -\frac{9}{10}, -\frac{8}{10}, \dots, 0, \frac{1}{10}, \dots, 1$. Que peut-on conjecturer sur le sens de variation de f sur $[-3, -2],]-2, -1[,]-1, 0], [0, 1], ?$

2) A l'aide d'un logiciel de construction de courbes, tracer la courbe représentative de la fonction f puis retrouver la conjecture de la première question.

Exemples de logiciels de construction de courbes :

Géogebra, Graphe-Easy, Menumath, Cabri géomètre II, Graphmatica, Géoplan,...

Exercices et problèmes

1 Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions définies par :

- a. $f(x) = x^2 - x + 2$ b. $f(t) = 2t + 3 + \frac{1}{t}$ c. $f(y) = \frac{y+1}{y^2-4}$
- d. $f(x) = 1 - x + \frac{3}{x^2+1}$ e. $f(x) = \sqrt{1-|x|}$ f. $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x+1}}$
- g. $f(x) = \frac{x}{|x-1|-1}$ h. $f(x) = \frac{x-2}{|x|-a} \quad (a \in \mathbb{R}_-)$ i. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+2} & \text{si } x < -2 \\ x^2 + 1 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$

2 Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{|2x+1|}{2|x|+1}$.

- Déterminer l'ensemble de définition de f .
- Calculer $f(-4)$ et $f(0)$.
- Déterminer l'antécédent de 0.
- Ecrire $f(x)$ sans valeur absolue.

3 On considère, dans un repère orthonormé, les points $A(0, 4)$, $B(2, 2)$ et $C(2, 0)$. Pour tout point M de l'axe (Ox) d'abscisse x ($x \in \mathbb{R} - \{0, 2, 4\}$), on désigne par $S(x)$ l'aire du triangle ABM .

- Montrer que les aires du trapèze $OABC$, et des triangles AOM et BCM sont respectivement égales à 6, $2|x|$ et $|2-x|$.
- Exprimer $S(x)$ suivant que $x < 0$; $0 \leq x \leq 2$ et $2 < x$.
- Représenter graphiquement la fonction $S : x \mapsto S(x)$.

4 Soit la fonction f définie par $f(x) = (x-1)(x-3)$

- Construire sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé.
- Soit $M \in (C)$, d'abscisse x , N son projeté orthogonal sur $(x'x)$, P son projeté orthogonal sur $(y'y)$.

Calculer en fonction de x , l'aire $a(x)$ du rectangle $ONMP$.

Pour quelles valeurs de x , $a(x)$ est-elle nulle ?

5 Le tableau de valeurs suivant est celui d'une application affine.

Une erreur s'est glissée dans la ligne des y . La corriger.

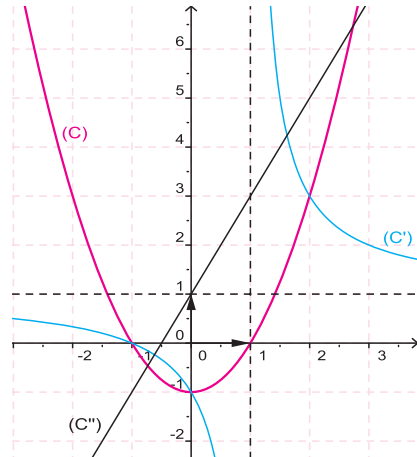
x	-5	-2	1	4	7	10
y	-2	1	2	4	6	8

Si l'erreur avait été commise dans la ligne des x , comment le tableau devrait-il être corrigé ?

6 Les courbes ci-contre sont celles des fonctions f , g et h définies par :

$$f(x) = x^2 - 1, \quad g(x) = \frac{x+1}{x-1} \quad \text{et} \quad h(x) = 2x + 1.$$

Faire correspondre à chaque fonction sa représentation graphique.



7 Relativement à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère deux points fixes $A(0,2)$ et $B(3,4)$. Un point M d'abscisse x varie sur la demi droite $[Ox)$.

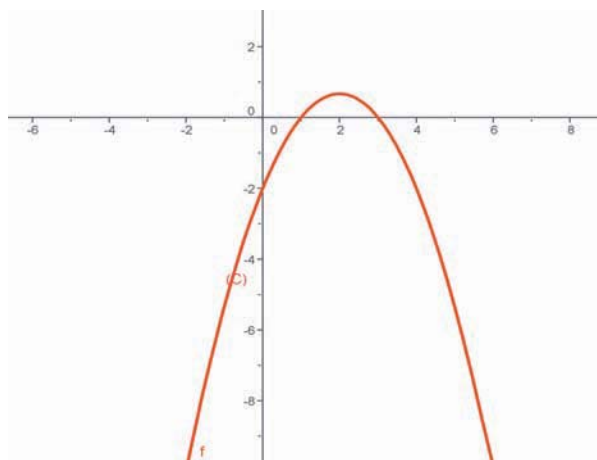
- 1) Déterminer l'aire du triangle ABM lorsque $x = 2$ puis lorsque $x = 4$.
- 2) Exprimer en fonction de x l'aire du triangle ABM .
- 3) Représenter graphiquement la fonction qui à tout réel positif x associe l'aire du triangle ABM .

8 On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

- 1) Pour quelles valeurs de x , f est-elle définie ?
- 2) Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé .
Montrer que $M(x, y) \in (C)$ si et seulement si : $-1 \leq x \leq 1$; $x^2 + y^2 = 1$.
- 3) Représenter graphiquement la fonction f .

9 On désigne par f la fonction représentée ci-contre.

- 1) Donner le sens de variation de la fonction f sur $[-1,3]$.
- 2) Résoudre graphiquement dans $[-1,3]$ l'équation $f(x) = 0$
- 3) Résoudre, à l'aide du graphique, dans l'intervalle $[-1,3]$ l'inéquation $f(x) \leq -2$.
- 4 Sachant que f est une fonction polynôme du second degré en x , déterminer $f(x)$.



10 Soit f la fonction numérique à variable réelle définie sur $\mathbb{R}$. (C) sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. a et b deux réels. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction g par $g(x) = f(x+a) + b$ de courbe représentative (C') .

Montrer que (C') est l'image de (C) par une translation dont on déterminera le vecteur.

11 Etudier les variations de f dans les intervalles indiqués :

a. $f(x) = x(2 - x)$ sur $[1, +\infty[$ et $]-\infty, 1]$.

b. $f(x) = x^2 - \frac{2}{x}$ sur $]0, 1]$

12 Soit f une fonction croissante sur $\mathbb{R}$. On pose u et v les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = f(x) - f(-x)$ et $v(x) = f(-x)$

a. Vérifier que $f = u + v$

b. Montrer que u est croissante sur $\mathbb{R}$ et v est décroissante sur $\mathbb{R}$

13 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = |3x - 1| - 2x - 2$.

Etudier le sens de variation de f puis tracer sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

14 1) On donne la fonction g définie par : $g(x) = x^2 - 2x + 2$.

a. Vérifier que les points $A(0, 2)$ et $B(3, 5)$ appartiennent à la courbe représentative de g .

b. Donner le sens de variation de g sur $]-\infty, 1]$ puis sur $[1, +\infty[$.

c. En déduire que pour tout réel x , on a : $g(x) \geq 1$.

2) Soit h la fonction définie par : $h(x) = \frac{ax - 4}{x + b}$ où a et b sont deux réels

On suppose que la courbe de h passe par les points $A(0, 2)$ et $B(3, 5)$.

a. Déterminer les réels a et b .

b. Donner le sens de variation de h sur $]-\infty, 2[$.

c. Représenter graphiquement les fonctions g et h .

d. Vérifier que le point A , B et $C(1, 1)$ sont les points communs de ces deux courbes.

e. Résoudre, graphiquement, l'inéquation $g(x) \geq h(x)$ dans $\mathbb{R}$.

15 On donne les deux fonctions f et g définies par :

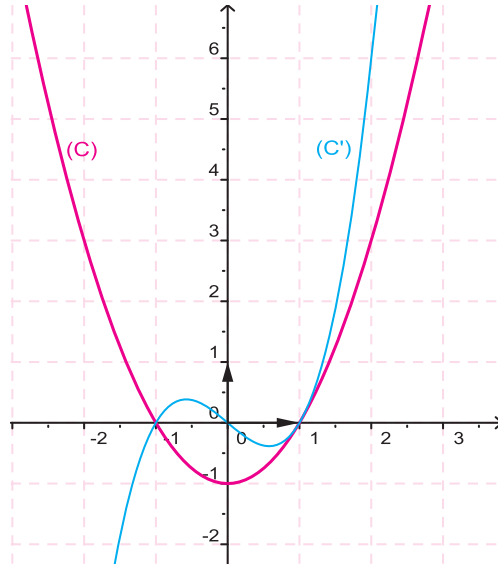
$$f(x) = \frac{-1 + \sqrt{1 + x^2}}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x}{2}.$$

a. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{x}{1 + \sqrt{1 + x^2}}$

b. Comparer f et g sur $]0, +\infty[$ puis sur $]-\infty, 0[$.

16 Les courbes (C) et (C') tracées ci-contre sont les courbes représentatives de deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$.

- 1) Déterminer les points d'intersection de ces deux courbes .
- 2) Résoudre, graphiquement, l'inéquation $f(x) \geq g(x)$ dans $\mathbb{R}$.



17 Dire si la fonction f est majorée, minorée sur l'intervalle I dans chacun des cas suivants

- a. $f(x) = 2x + 1$. $I = \mathbb{R}$
- b. $f(x) = x^2$. $I = \mathbb{R}$
- c. $f(x) = \frac{1}{x+1}$ $I = [0, 1]$
- d. $f(x) = x + \frac{1}{x}$ $I =]-\infty, -1]$ (On pourra vérifier que f croissante sur I).

18 Soit f la fonction $x \mapsto \sqrt{x} + \frac{9}{\sqrt{x}} - 2$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f .
- 2) Montrer que , pour tout $x \in]0, +\infty[$; $f(x) \geq \sqrt{x} - 2$.En déduire que f n'est pas majorée sur $]0, +\infty[$.
- 3) Proposer un minorant de f sur $]0, +\infty[$.

19 Sur une droite D munie d'un repère $(O, \vec{i})$, on considère les points A , B et M d'abscisses respectives -1 , 2 et x .

$f(x)$ désigne le nombre $3MB - 2MA$.

- 1) Exprimer $f(x)$ en fonction de x (on distinguera trois intervalles dans $\mathbb{R}$).
- 2) Représenter graphiquement f dans un repère orthonormé.
- 3) a. Préciser le minimum de f .
b. Déterminer suivant les valeurs de k le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$
- 4) Résoudre les inéquations $f(x) < -2$ et $f(x) \geq 0$.
- 5) a. Tracer sur le graphique les droites d'équations $y = x$ et $y = -x$.
b. Résoudre, dans $\mathbb{R}$ les équations $f(x) = x$ et $f(x) = -x$ puis les inéquations $f(x) \geq x$ et $f(x) < -x$.

20 1) Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes puis décider de sa parité, sans calculer l'image de $-x$.

$$\bullet f : x \mapsto \frac{x+2}{x-3} \quad \bullet g : x \mapsto \sqrt{2x-\sqrt{2}} \quad \bullet h : x \mapsto -x + \frac{3}{x-1}$$

2) Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes puis étudier sa parité.

$$\bullet u : x \mapsto \frac{x^3-x}{|x|-2} \quad \bullet v : x \mapsto \frac{x^2-1}{|x|+1} \quad \bullet w : x \mapsto \frac{x^2+x-1}{|x|-1}$$

21 1) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On définit les fonctions u et v par :

$$u(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ et } v(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

a. Etudier la parité de chacune des fonctions u et v .

b. En déduire que f est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

2) f et g étant des fonctions définies sur une partie non vide D de $\mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Recopier et remplir le tableau ci-dessous par l'une des quatre réponses suivantes:

"paire", "impaire", "ni paire ni impaire", "on ne peut pas conclure"

f	g	$f + g$	$f \times g$	$\lambda \times f$	$ f $
paire	paire				
impaire	impaire				
paire	impaire				

22 Le plan étant rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes puis dire si le point indiqué est centre de symétrie de sa courbe.

$$x \mapsto \frac{x^2+2x-1}{x+1} \text{ le point } I(-1,0) \quad * \quad g : x \mapsto \frac{2x-2}{x+\sqrt{3}}, \text{ le point } J(-\sqrt{3},2)$$

2) Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes puis dire si la droite indiquée est un axe de symétrie de sa courbe.

$$\bullet u : x \mapsto |x^2-2x+5|, \text{ la droite } \Delta : x = 2 \quad \bullet v : x \mapsto x^2-2x+5, \text{ la droite } \Delta : x = 2$$

$$\bullet w : x \mapsto \frac{2}{x-\pi}, \text{ la droite } \Delta : x = \pi \quad \bullet p : x \mapsto \frac{2}{|x-\pi|}, \text{ la droite } \Delta : x = \pi$$

23 Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $A(1,2)$.

A chaque point P de l'axe (Ox) , d'abscisse x ($x > 1$), on associe le point Q de l'axe (Oy) tel que A, P et Q soient alignés. On note $S(x)$ l'aire du triangle OPQ .

1) Montrer que $S(x) = \frac{x^2}{x-1}$

-
- 2) a. Vérifier que : $S(x) = x + 1 + \frac{1}{x-1}$
b. Etudier le sens de variation de S sur $]1, 2]$ et sur $[2, +\infty[$.
c. Où placer le point P pour que l'aire du triangle OPQ soit la plus petite possible ?

24 On considère un rectangle d'aire égale à 4 et on note x l'un de ses côtés.

- 1) Exprimer le périmètre $P(x)$ du rectangle en fonction de x .
Quel est le domaine de définition de P ?
- 2) Montrer que $P(x)$ augmente quand x augmente dans l'intervalle $[2, +\infty[$.
- 3) Montrer que $P(x)$ diminue lorsque x augmente dans l'intervalle $]0, 2]$.
- 4) Quel est le minimum de $P(x)$ et pour quelle valeur de x est-il obtenu ?

La notion de fonction à travers l'Histoire

Il a fallu beaucoup de temps et d'efforts pour dégager et clarifier le concept de fonction. On rencontre chez les Babyloniens, avec leurs tables numériques et astronomiques, une vague idée de fonction.

Thomas Bradycardie (1290 – 1349) introduit le concept de fonction puissance, et Nicole Oresme (1323 – 1382), évêque de Normandie, explore les règles pour calculer sur les fonctions puissances ; il est l'un des précurseurs du repérage graphique pour décrire les trajectoires des astres (il utilise les mots « latitude » et « longitude ». jusqu'au XVIIème siècle, les courbes sont étudiées d'un point de vue géométrique, sans faire appel à la notion de fonction associée à ces courbes. Cette association se dessine avec Descartes (1596 – 1650) et Newton (1642 – 1727).

En 1673, dans son mémoire « Methodus tangentium inversa sen de functionibus », Leibniz (1646 – 1716) emploie l'expression « functionem faciens » ou en abrégé « functio » pour désigner les grandeurs dont les variations sont liées par une loi .

En 1698, Jean Bernoulli (1667 – 1748) utilise le terme « fonctions des ordonnées » dans une lettre adressée à Leibniz et est le premier à avoir donné de cette notion une définition dégagée de toute considération géométrique (1718) : « On appelle fonction d'une grandeur variable, une quantité qui se compose d'une certaine manière de cette grandeur et de constantes ». Dans ce mémoire, Jean Bernoulli a donné, comme symbole, la lettre grecque j pour représenter la fonction d'une variable donnée.

Euler, en 1748, donne un point de vue formel du concept de fonction : il définit une fonction d'une variable comme « une expression analytique composée d'une manière quelconque de cette quantité variable et des nombres ou quantités constantes ». Cependant , il ne précise pas ce qu'il entend par « expression analytique ».

Ces deux définitions concurrentes se retrouvent dans l'histoire ultérieure. Ainsi, Lagrange (1736 – 1813) poursuit l'idée de la seconde définition .

Au XIXème siècle, commencent les premières incertitudes sur les principes de l'analyse. En effet, comme maintenant lorsque les méthodes antérieures se montrent défectueuses et incorrectes, il faut en chercher la cause à l'origine. Plus spécialement, on peut considérer comme principaux représentants de l'évolution du concept de fonction : Cauchy (1789 – 1857) , Bolzano (1781 – 1848) , Dirichlet (1805 – 1859) et Riemann (1826 – 1866). Ces deux derniers s'accordent pour dire « Il y a fonction lorsqu'il y a correspondance entre un nombre y et des nombres $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ ». Weierstrass (1815 – 1897), dans son cours intitulé « Introduction à la théorie des fonctions analytiques du semestre d'été 1874 », donne la définition de la fonction, en faisant des réserves sur sa trop grande généralité, et n'attribue pas la paternité de la définition uniquement à Dirichlet, mais aussi à Fourier et à Cauchy. Par la suite. Weierstrass évite de donner une définition de la fonction mais peu à peu, au cours de ses leçons, il donne une représentation correcte et utilisable de la fonction. Au début du XXème siècle, alors que la théorie des ensembles de Cantor (1845 – 1918) pénètre progressivement dans les mathématiques, la conception de fonction n'est pas assez lucide .

Lebesgue (1875 – 1941) donne la définition de ce que l'on entend par « expression analytique » : L'importance intrinsèque de cette évolution du concept de fonction repose sur le fait que cette dernière a refondu les principes de l'analyse.

Limites, Continuité, Branches Infinies

3

PLAN DU CHAPITRE

I) Limite finie d'une fonction en un point

II) Continuité

III) Limites infinies, limites à l'infini

IV) Branches infinies

Avec l'outil informatique

Travaux pratiques

Exercices et problèmes

Mathématiques et culture

I. Limite finie d'une fonction en un point

Activités préliminaires

1. 1) a. Préciser l'intervalle ouvert de centre 2 et de rayon 0,1.
b. Préciser l'intervalle ouvert de centre -5 et de rayon 0,02.
- 2) Donner le centre et le rayon de chacun des intervalles ouverts suivants
 $]1,2[,]0,4[,]-1,1[$ et $]-3,-2[$.
2. Soit la fonction f définie sur $[-2,1[\cup]1,2]$ par $f(x) = \frac{(x-1)^2}{|x-1|}$
 - 1) a. Donner l'expression de $f(x)$ sans valeur absolue.
b. Montrer que f est bornée sur $[-2,1[\cup]1,2]$
 - 2) Montrer que f est strictement monotone sur chacun des intervalles $[-2,1[$ et $]1,2]$
 - 3) Construire, dans un repère orthogonal, la courbe représentative de f .
 - 4) Utiliser la courbe pour déterminer un intervalle I centré en 1 tel que pour tout $x \in I$, $f(x) \in]-0.2, 0.2[$

Activités de découverte

3. La courbe (C) ci-dessous est la représentation, dans un repère orthogonal, d'une fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$



- 1) Représenter sur l'axe des ordonnées l'intervalle ouvert J de centre 3 et de rayon $\frac{1}{2}$ puis représenter sur l'axe des abscisses un intervalle ouvert I de centre 2 tel que pour tout $x \in I$, $f(x) \in J$.
- 2) Est-il possible de trouver un intervalle I , pour un intervalle J de rayon plus petit ?
- 3) Vérifier que $f(x)$ se rapproche de 3 lorsque x se rapproche de 2.

► On dit que la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 2 est égale 3 et on écrit

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3.$$

4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{3\}$ par $f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{si } x < 3 \\ -x+4 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

a. Recopier et remplir le tableau suivant :

x	2,8	2,9	2,98	2,99	3,01	3,02	3,1	3,2
f(x)								

b. Vérifier que $f(x)$ se rapproche de 1 lorsque x se rapproche de 3, donner alors $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

c. Tracer, dans un repère orthogonal, la courbe de la fonction f

d. Choisir un intervalle ouvert J de centre 1 et de rayon $\frac{1}{2}$ et trouver, graphiquement, un intervalle ouvert I de centre 3 tel que pour tout $x \in I$, $f(x) \in J$.

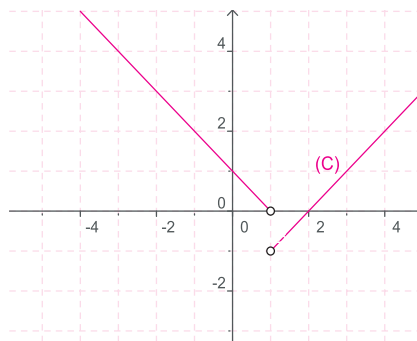
5. La courbe (C) ci-contre est la représentation

graphique de la fonction f définie

sur $\mathbb{R}-\{1\}$ par:

$$f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{si } x < 1 \\ x-2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1) A l'aide du graphique, faire une conjecture sur le comportement de la fonction f lorsque x s'approche de 1.



2) a. Recopier et remplir le tableau suivant :

x	0,6	0,7	0,8	0,9	0,99	1,01	1,1	1,2	1,3	1,4
f(x)										

b. Existe-t-il un réel L tel que si x se rapproche de 1 tout en restant inférieur à 1, $f(x)$ se rapproche de L ?

c. Existe-t-il un réel L' tel que si x se rapproche de 1 tout en restant supérieur à 1, $f(x)$ se rapproche de L' ?

3) a. Choisir un intervalle ouvert J de centre 0 et trouver, graphiquement, un intervalle ouvert I de la forme $]a, 1[$ tel que pour tout $x \in I$, $f(x) \in J$.

b. Choisir un intervalle ouvert K de centre -1 et trouver, graphiquement, un intervalle ouvert H de la forme $]1, b[$ tel que pour tout $x \in H$, $f(x) \in K$.

On dit que $f(x)$ tend vers L lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures et $f(x)$ tend vers L' lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures.

Et on dit que la limite à gauche de f en 1 est égale à L et que la limite à droite de f en 1 est égale à L' et on note $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = L$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = L'$.

L'essentiel du cours

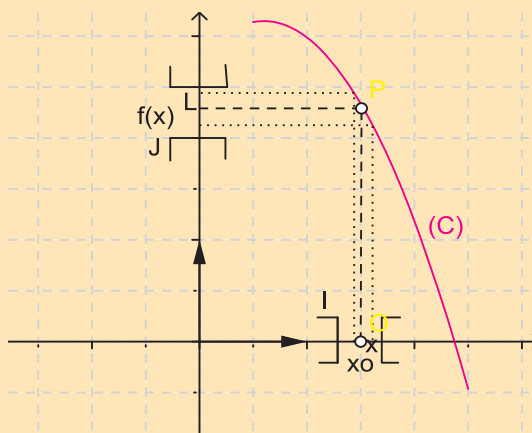
Limite finie en un réel

Soient x_0 et L deux réels, f une fonction définie sur intervalle ouvert contenant x_0 .

(sauf peut-être en x_0)

La fonction f a pour limite le réel L lorsque x tend vers x_0 , si pour tout intervalle ouvert J contenant L , il existe un intervalle ouvert I contenant x_0 tel que si $x \in I - \{x_0\}$, $f(x) \in J$.

On note $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ ou encore $\lim_{x \rightarrow x_0} f = L$

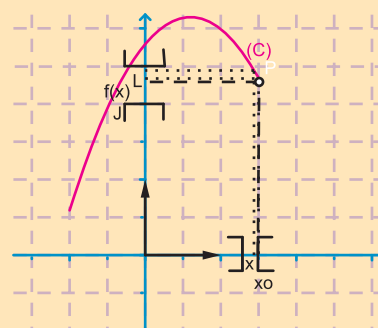


Si une fonction f a pour limite un réel en un point x_0 , cette limite est unique.

Limite à gauche

Soient x_0 et L deux réels et f une fonction définie sur intervalle ouvert de la forme $]a, x_0[$.

La fonction f a pour limite à gauche en x_0 le réel L si pour tout intervalle ouvert J contenant L , il existe un réel α ($\alpha < x_0$) tel que si $x \in]\alpha, x_0[$, $f(x) \in J$.



On note $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$ ou encore $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f = L$

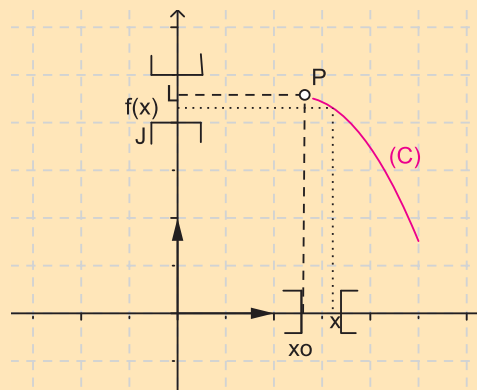
(Lorsque x se rapproche de x_0 en restant inférieur à x_0 , $f(x)$ se rapproche de L)

Limite à droite

Soient x_0 et L deux réels et f une fonction définie sur intervalle ouvert de la forme $]x_0, b[$.

La fonction f a pour limite à droite en x_0 le réel L si pour tout intervalle ouvert J contenant L , il existe un réel α ($\alpha > x_0$) tel que si $x \in]x_0, \alpha[$, $f(x) \in J$.

On note $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$ ou encore $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f = L$



(Lorsque x se rapproche de x_0 en restant supérieur à x_0 , $f(x)$ se rapproche de L)

Théorème

Soient x_0 et L deux réels.

Une fonction f a pour limite L en x_0 si et seulement si sa limite à gauche et sa limite à droite en x_0 sont égales à L .

On a alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$

Auto évaluation

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 1 \\ x - 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

2. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$x \mapsto \frac{|x|}{x}$$

a. Donner, si elles existent, la limite à gauche et la limite à droite de f en 0.

b. f a-t-elle une limite en 0 ?

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < -2 \\ x^2 + x - 3 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$

a. Construire la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal

b. Déterminer, si elles existent, $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$

II. Continuité

Activités de découverte

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - x - 3$

A l'aide d'une calculatrice ou du tableur Excel, remplir le tableau suivant :

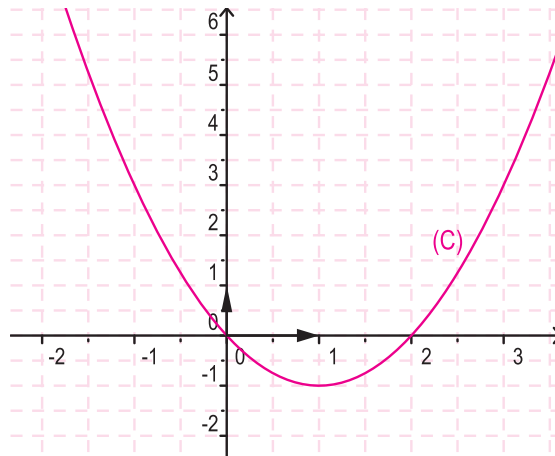
x	1,90	1,95	1,96	1,97	1,98	1,99	1,999	2,001	2,01	2,02	2,03	2,04	2,05	2,1
f(x)														

1) De quel réel L se rapproche $f(x)$ lorsque x se rapproche de 2 ?

2) Vérifier que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$

► On dit que f est **continue** au point 2.

2. La courbe ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



- Choisir un intervalle ouvert J de centre $f(3)$ et trouver, graphiquement, un intervalle ouvert I de centre 3 tel que pour tout $x \in I$, $f(x) \in J$.
- En déduire que f est continue au point 3

3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto -2x + 3$$

1) Vérifier que la droite (D) ci-contre est la représentation graphique de la fonction f .

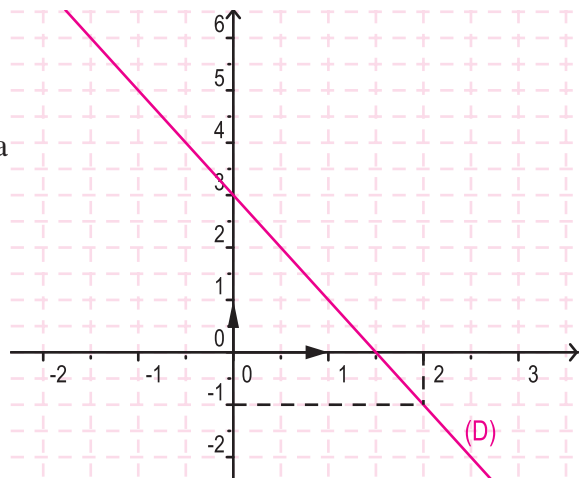
2) a. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

si $x \in]2 \cdot 10^{-3}, 2 + 10^{-3}[$ alors

$f(x) \in]-1 \cdot 10^{-2}, -1 + 10^{-2}[$.

b. Vérifier, graphiquement, que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$.

c. Conclure.



4. 1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + x - 2$

a. Tracer, dans un repère orthogonal, sa courbe représentative (C).

b. Utiliser le graphique pour vérifier que $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$

2) Choisir une fonction trinôme g du second degré et un réel x_0 .

a. Quelle est la nature de sa courbe représentative dans un repère orthogonal?

b. Vérifier, graphiquement, que g est continue en x_0 .

5. Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 1$ et $g(x) = x + 2$.

1) Vérifier que les fonctions f et g sont continues en -3 .

2) Vérifier que les fonctions s , u et p définies respectivement sur $\mathbb{R}$ par $s = f + g$
 $u = 7f$ et $p = f \times g$ sont continues en -3 .

3) Soit q la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ par $q(x) = \frac{x-1}{x+2}$

a. Tracer, dans un repère orthogonal, la courbe représentative de q .

b. Vérifier, graphiquement, que $\frac{f}{g}$ est continue en -3 .

6. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 + 6x - 1$.

1) Tracer, dans un repère orthogonal, la courbe représentative de f .

2) Utiliser cette courbe pour déterminer les ensembles

$I = \{f(x), x \in]-\infty, -1[\}$, $J = \{f(x), x \in [-1, 2] \}$ et $K = \{f(x), x \geq 3 \}$.

3) Choisir un intervalle quelconque et déterminer son image par la fonction f .

Que peut-on conjecturer sur l'image d'un intervalle par une fonction continue ?

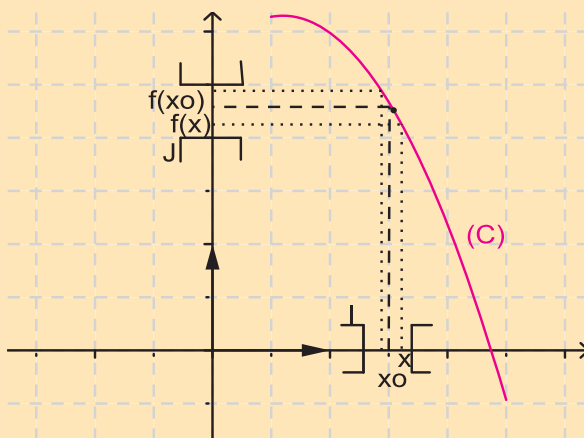
L'essentiel du cours

Continuité en un point

Définitions

Soit x_0 un réel et f une fonction définie sur intervalle ouvert contenant x_0 .

La fonction f est dite **continue** en x_0 , si pour tout intervalle ouvert J contenant $f(x_0)$, il existe un intervalle ouvert I contenant x_0 tel que si $x \in I$, $f(x) \in J$.



Si f est définie sur un intervalle ouvert contenant x_0 , On a :

f est continue en x_0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

- Une fonction f définie sur un intervalle de la forme $]a, x_0]$ ($a < x_0$) est dite continue à gauche en x_0 si, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$

Une fonction f définie sur un intervalle de la forme $]x_0, b[$ ($b > x_0$) est dite continue à droite en x_0 si, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$

- Une fonction qui n'est pas continue en un point est dite discontinue en ce point.

Conséquences

- Une fonction f est continue en un point si et seulement si elle est continue à gauche et continue à droite en ce point.

- Une fonction non définie en un point est discontinue en ce point.

b. Opérations sur les fonctions continues en un point

Soient x_0 et α deux réels et f et g deux fonctions continues en x_0 .

- Les fonctions $f + g$, αf et $f \times g$ sont continues en x_0 .
- Si de plus $g(x_0)$ est différent de 0 alors la fonction $\frac{f}{g}$ est continue en x_0 .
- La fonction $|f|$ est continue en x_0
- Si de plus $f(x_0) \geq 0$ alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue en x_0

Continuité sur un intervalle

Définitions

- Une fonction est dite continue sur un intervalle ouvert si elle est continue en tout point de cet intervalle.
- Une fonction est dite continue sur un intervalle $[a, b[$ si elle est continue sur $]a, b[$ et continue à droite en a .
- Une fonction est dite continue sur un intervalle $]a, b]$ si elle est continue sur $]a, b[$ et continue à gauche en b .
- Une fonction est dite continue sur un intervalle $[a, b]$ si elle est continue sur $]a, b[$, continue à droite en a et continue à gauche en b .

Conséquences

- Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$
- Les fonctions rationnelles sont continues sur tout intervalle où elles sont définies.

Théorème : L'image par une fonction continue d'un intervalle est un intervalle.

Auto évaluation

1. 1) Les fonctions suivantes sont-elles continues en 1 ?

a. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{2}{x+1}$$

b. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{2}{x-1}$$

c. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{5x-5}{x^2+3x-4} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

d. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} 2x^2 - x + 1 & \text{si } x < 1 \\ -3x + 5 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

e. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

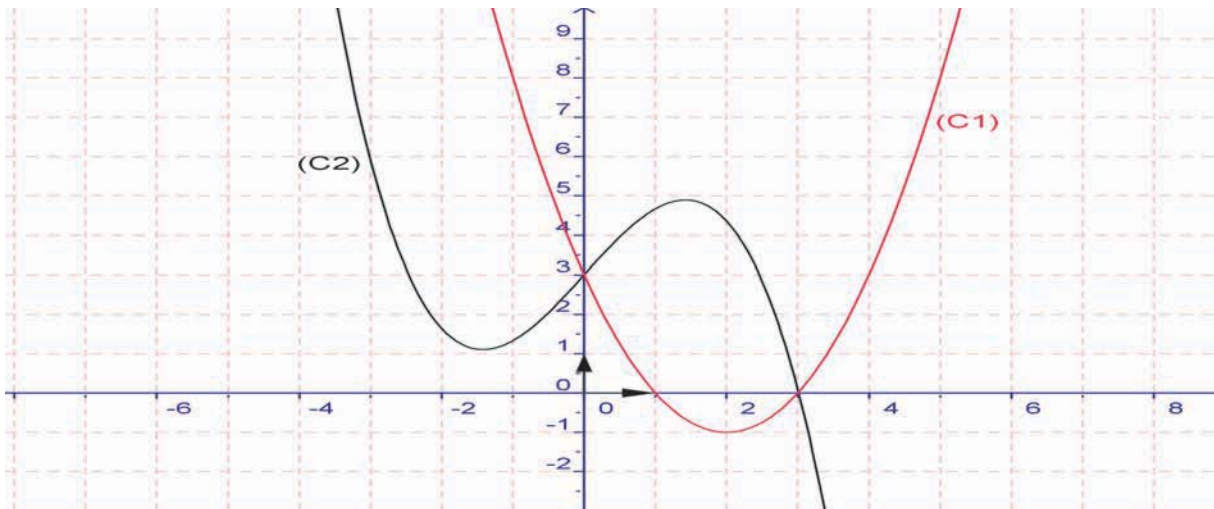
$$x \mapsto \begin{cases} 2x - 5 & \text{si } x < 1 \\ -3x + 6 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

2) Définir sur $\mathbb{R}$ deux fonctions égales sur $\mathbb{R}^*$ telles que l'une soit continue en 0 et l'autre soit discontinue en 0.

2. Tracer dans un repère orthogonal la courbe représentative d'une fonction f vérifiant :

- f est continue sur $\mathbb{R} - \{-2, 3\}$
- f est continue à gauche en -2
- f est discontinue à droite en -2
- f est discontinue à gauche en 3
- f est discontinue à droite en 3

3. Les courbes (C_1) et (C_2) sont les représentations graphiques respectives de deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$



On considère la fonction F définie sur

$$\mathbb{R} \text{ par : } F(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x < 0 \\ f(x) & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ g(x) & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- 1) Tracer la courbe représentative de F .
- 2) Utiliser le graphique pour étudier la continuité de F sur $\mathbb{R}$

4. (La fonction partie entière)

Pour tout réel x , l'unique entier relatif n vérifiant $n \leq x < n+1$ est la partie entière de x ; on le note $E(x)$. La fonction $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ est la fonction partie entière.

$$x \mapsto E(x)$$

- 1) Tracer la courbe représentative de la restriction de E à $[-2, 4]$.
- 2) Soit n un entier relatif tel que $-2 < n < 4$.

Vérifier que $\lim_{x \rightarrow n^-} E(x) = n-1$ et que $\lim_{x \rightarrow n^+} E(x) = n$. La fonction E admet-elle une limite en n ?

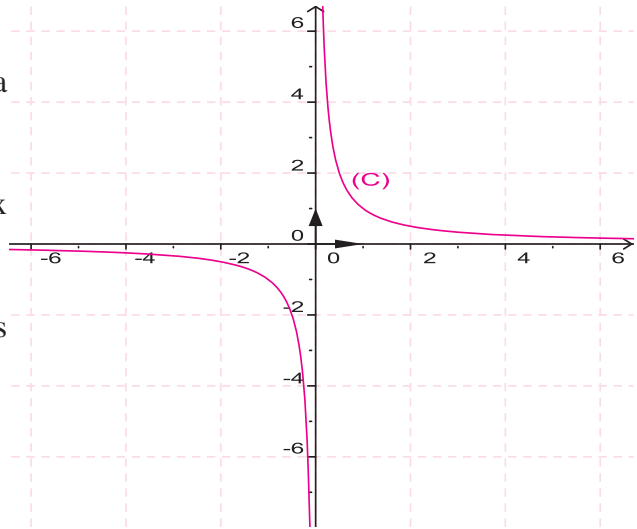
Etudier la continuité à droite et la continuité à gauche de E en n .

- 3) a. Soit x_0 un réel non entier de $] -2,4[$. Vérifier que $\lim_{x \rightarrow x_0} E(x) = E(x_0)$
 b. Conclure.

III) Limites infinies, limites à l'infini

Activités de découverte

1. La courbe (C) ci-contre est celle de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$. Utiliser le graphique pour répondre aux questions suivantes :



- a. Que peut-on dire de $\frac{1}{x}$ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures ?
 b. Que peut-on dire de $\frac{1}{x}$ lorsque x

tend vers 0 par valeurs inférieures ?

- c. De quelle valeur se rapproche $\frac{1}{x}$ lorsque $|x|$ devient de plus en plus grand ?

► On dit que :

- $\frac{1}{x}$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures (ou par valeurs positives dans ce cas) et on note $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$.
- $\frac{1}{x}$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers 0 par valeurs inférieures (ou par valeurs négatives dans ce cas) et on note $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$.
- $\frac{1}{x}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ et on note $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$.
- $\frac{1}{x}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $-\infty$ et on note $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

2. 1) Recopier et remplir :

x	10^4	10^8	10^{16}	10^{30}
$\sqrt{x}$				
$\frac{1}{\sqrt{x}}$				

x	10^{-4}	10^{-8}	10^{-16}	10^{-30}
$\frac{1}{\sqrt{x}}$				

- a. Que peut-on dire de $\sqrt{x}$ lorsque x devient de plus en plus grand ?
- b. De quelle valeur se rapproche $\frac{1}{\sqrt{x}}$ lorsque x devient de plus en plus grand ?
- c. Que peut-on dire de $\frac{1}{\sqrt{x}}$ lorsque x se rapproche de 0 ?

3) Que peut-on conjecturer sur chacune des limites suivantes ?

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x})$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

3. 1) a. Soient les fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = 2x + 3$ et $v(x) = -3x + 5$.

Représenter graphiquement u et v .

b. Utiliser le graphique pour donner $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} v(x)$.

2) Soit F la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = ax + b$ où a et b sont deux réels donnés. Utiliser le graphique pour donner, suivant le signe de a , $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$.

3) a. Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 1$ et $g(x) = -3x^2 + 6x - 1$.

b. Utiliser le graphique pour donner $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

4) Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = ax^2 + bx + c$ où a , b et c sont des réels donnés avec $a \neq 0$. Utiliser le graphique pour donner, suivant le signe de a , $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} G(x)$.

4. 1) Soient les fonctions f , g , h et k définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2 + x$,

$h(x) = -x + 1$ et $k(x) = -x^2 + 2x + 2$

Calculer $(f+g)(x)$ et $(h+k)(x)$.

2) Utiliser l'activité précédente pour vérifier que:

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f+g)(x) = +\infty$.

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (h+k)(x) = -\infty$.

3) x_0 désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. On considère deux réels L et L' et deux fonctions u et v . Recopier et prévoir les limites proposées :

$\lim_{x_0}$ u	$\lim_{x_0}$ v	$\lim_{x_0} (u+v)$
L	L'	
L	$+\infty$	
L	$-\infty$	
$+\infty$	$+\infty$	
$-\infty$	$-\infty$	

5. 1) Soient les fonctions u, v définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par :

$$u(x) = 3x + 3 \text{ et } v(x) = -2x + 5.$$

Utiliser l'activité 3 pour donner les limites suivantes :

- a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (uv)(x)$
 b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} v(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (uv)(x)$

2) x_0 désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. On considère deux réels L et L' et deux fonctions u et v .

Recopier et prévoir les limites proposées :

$\lim_{x_0} u$	$\lim_{x_0} v$	$\lim_{x_0} (uv)$
L	L'	
$L > 0$	$+\infty$	
$L < 0$	$+\infty$	
$+\infty$	$+\infty$	
$-\infty$	$-\infty$	
$+\infty$	$-\infty$	

6. x_0 désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. On considère deux réels L et L' et deux fonctions u et v .

Recopier et prévoir les limites proposées :

$\lim_{x_0} u$	$\lim_{x_0} (\frac{1}{u})$
$L \neq 0$	
0^+	
0^-	
$+\infty$	
$-\infty$	

$\lim_{x_0} u$	$\lim_{x_0} v$	$\lim_{x_0} (\frac{u}{v})$
L	$L' \neq 0$	
$L \geq 0$	$+\infty$	
$L \leq 0$	$+\infty$	
$+\infty$	$L \geq 0$	
$+\infty$	$L \leq 0$	

7. On donne les fonctions u, v, w, p et q de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telles que

$$u(x) = 2x^3 - x^2 + 3x + 1, v(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}, w(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} \text{ et } q(x) = \left(\frac{x+1}{x-2}\right) \left(\frac{2}{x} - \frac{x}{2}\right)$$

1) Peut-on déterminer, à l'aide des résultats précédents, les limites suivantes:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x), \quad \lim_{x \rightarrow 1} w(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 2} q(x) ?$$

2) a. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $u(x) = 2x^3 \left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{3}{2x^2} + \frac{1}{2x^3}\right)$,
 en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)$.

On montre de façon analogue que la limite en $+\infty$ (en $-\infty$) d'une fonction polynôme est égale à la limite en $+\infty$ (en $-\infty$) de son monôme du plus haut degré.

b. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}^* - \{1\}$, $v(x) = \frac{x^2 (1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{x (1 + \frac{1}{x})}$,
en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} w(x)$.

On montre de façon analogue que la limite en $+\infty$ (en $-\infty$) d'une fonction rationnelle est égale à la limite en $+\infty$ (en $-\infty$) du quotient du monôme du plus haut degré du numérateur par le monôme du plus haut degré du dénominateur.

c. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, $w(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{x-1}$, en déduire $\lim_{x \rightarrow 1} w(x)$

d. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R} - \{0, 2\}$, $q(x) = (\frac{x+1}{x-2})(\frac{(2-x)(2+x)}{2x})$, en déduire $\lim_{x \rightarrow 2} q(x)$

8. x_0 désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

On considère un réel L et une fonction f .

Recopier le tableau ci-contre et donner une conjecture sur l'existence et la valeur de chacune des limites proposées.

$\lim_{x \rightarrow x_0} f$	L	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} f $			
Si f est positive sur un intervalle ouvert contenant x_0			
$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f}$			

L'essentiel du cours

Limites de fonctions usuelles

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\frac{1}{x}) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} (\frac{1}{x}) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{1}{x}) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\frac{1}{x}) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x}) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{1}{\sqrt{x}}) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\frac{1}{\sqrt{x}}) = +\infty$

Opérations sur les limites

Soient f et g deux fonctions définies sur un ensemble D et a un réel non nul.

x_0 désignant un réel, $+\infty$ ou $-\infty$. On a :

$\lim_{x_0} f$	$\lim_{x_0} g$	$\lim_{x_0} (f+g)$	$\lim_{x_0} (af)$	$\lim_{x_0} (fx \ g)$	$\lim_{x_0} \left(\frac{f}{g}\right)$
L	$L' \neq 0$	$L + L'$	aL	$L \times L'$	$\frac{L}{L'}$
$L \neq 0$	0	L	aL	0	$+\infty$ ou $-\infty$
0	0	0	0	0	
$+\infty$	$L' \neq 0$	$+\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$+\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$		$+\infty$ ou $-\infty$
$L \neq 0$	$-\infty$	$-\infty$	aL	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	∞	$+\infty$	
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	∞	$+\infty$	
$+\infty$	$-\infty$		∞	$-\infty$	

$\lim_{x_0} f$	L	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x_0} f $	$ L $	$+\infty$	$+\infty$
Si f est positive lorsque x tend vers x_0			
$\lim_{x_0} \sqrt{f}$	$\sqrt{L}$	$+\infty$	

- La limite en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) d'une fonction polynôme est égale à la limite en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) de son monôme du plus haut degré.
- La limite en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) d'une fonction rationnelle est égale à la limite en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) du quotient du monôme du plus haut degré du numérateur sur le monôme du plus haut degré du dénominateur.

Auto évaluation

1. Déterminer les limites de chacune des fonctions suivantes aux bornes de son ensemble de définition.

- $x \mapsto 2x - 1000$
- $x \mapsto -5x + 1000$
- $x \mapsto 7x^2 - 2x + 11$
- $x \mapsto -3x^2 + 4x + 3$
- $x \mapsto x^3 - 2x + 5$
- $x \mapsto x^5 + x^4 - x^3 - 2x + 5$
- $x \mapsto x^3 - 2|x| - 1$
- $x \mapsto x^2 + \frac{1}{x}$

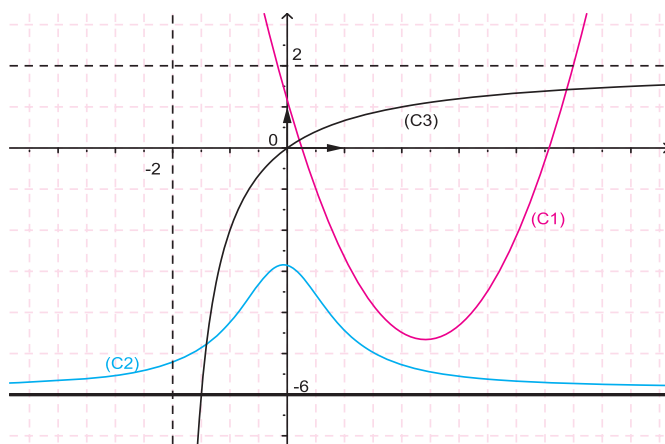
2. Déterminer si elles existent, les limites suivantes :

- $x \mapsto \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}$ en -1
- $x \mapsto \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$ en 1
- $x \mapsto \frac{|x - 1|}{x^2 - 2x + 1}$ en 1
- $x \mapsto \frac{2x + 1}{x - 1}$ en 1
- $x \mapsto \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}$ en $+\infty$
- $x \mapsto \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 1}$ en $+\infty$
- $x \mapsto \frac{1}{x} \left(x^2 - \frac{1}{x} \right)$ en $+\infty$
- $x \mapsto \sqrt{x + 1} - \sqrt{x}$ en $+\infty$
- $x \mapsto |x| - x^2$ en $+\infty$

IV) Branches infinies

Activités de découverte

1. Les courbes (C_1) , (C_2) et (C_3) ci-dessous sont les courbes représentatives respectives de trois fonctions f , g et h définies respectivement sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ et $] -2, +\infty[$



1) On donne:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = +\infty$, • $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$, • $\lim_{x \rightarrow -\infty} g = -6$, • $\lim_{x \rightarrow +\infty} g = -6$,
- $\lim_{x \rightarrow -2^+} h = -\infty$ et • $\lim_{x \rightarrow +\infty} h = 2$

Vérifier qu'on ne peut achever le traçage d'aucune courbe parmi (C_1) , (C_2) et (C_3) .

► On dit que chacune de ces courbes admet des branches infinies.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{2\}$ par $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- 1) a. Déterminer les limites suivantes : $\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f$ $\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f$ $\bullet \lim_{x \rightarrow 2^-} f$ $\bullet \lim_{x \rightarrow 2^+} f$

b. Vérifier que la courbe (C) admet quatre branches infinies.

On ne peut pas achever le traçage de ces branches, mais on va essayer de prévoir leurs aspects:

- 2) a. Tracer les droites $\Delta : x = 2$ et $\Delta' : y = 1$

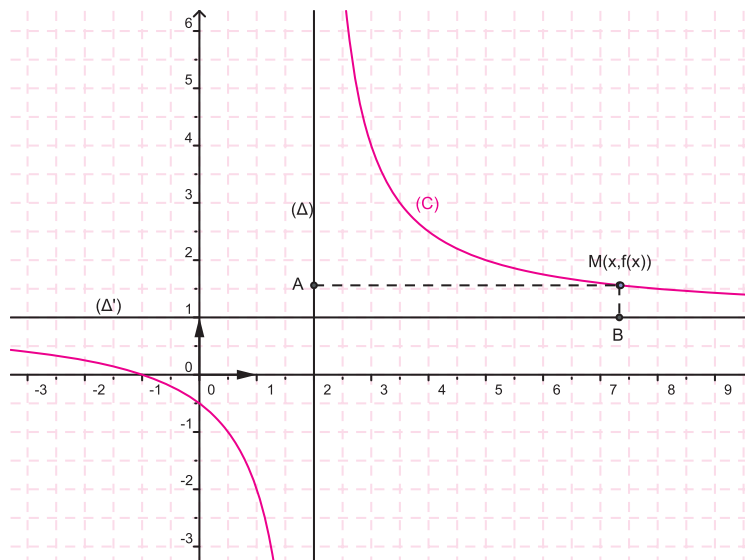
b. Tracer la courbe (C).

3) Pour tout $x \in \mathbb{R}-\{2\}$, on considère le point $M(x, f(x))$, son projeté orthogonal A sur (Δ) et son projeté orthogonal B sur (Δ').

b. Déterminer, en fonction de x , les distances AM et BM.

c. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 2^-} AM$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} AM$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} BM$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} BM$.

d. Interpréter géométriquement ces résultats.



(On dit que Δ est une asymptote verticale de la courbe (C) et que Δ' est une asymptote horizontale de cette courbe).

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ par $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

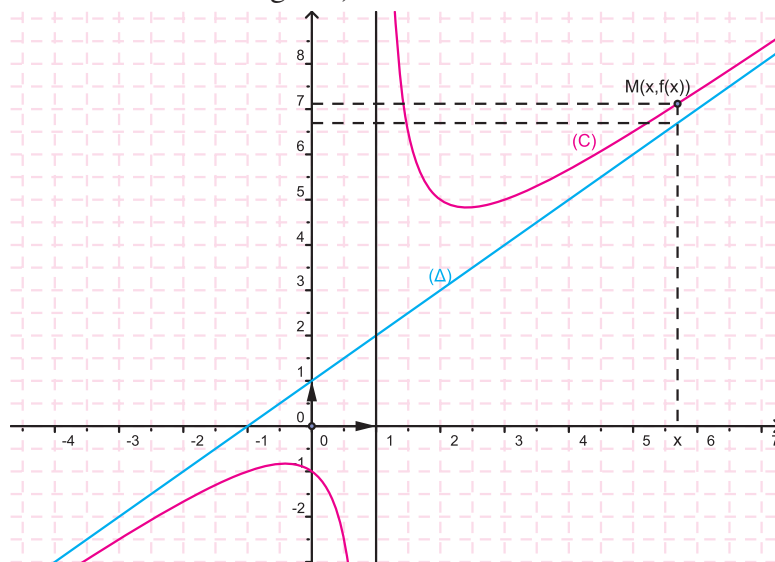
a. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}-\{1\}$, $f(x) = x+1 + \frac{2}{x-1}$

b. Déterminer les limites suivantes:

- $\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f$ $\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f$ $\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x+1))$ $\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (x+1))$

c. Interpréter géométriquement ces résultats

(La courbe (C) tracée à l'aide d'un logiciel)



(On dit que la droite $\Delta : y = x + 1$ est une asymptote oblique de la courbe (C)).

4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - \frac{3}{2}x - 1$. (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1) Déterminer les limites de f à $-\infty$ et à $+\infty$. (C) admet-elle des asymptotes verticales ou horizontales ?

2) a. Soient a et b deux réels. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax+b))$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax+b))$

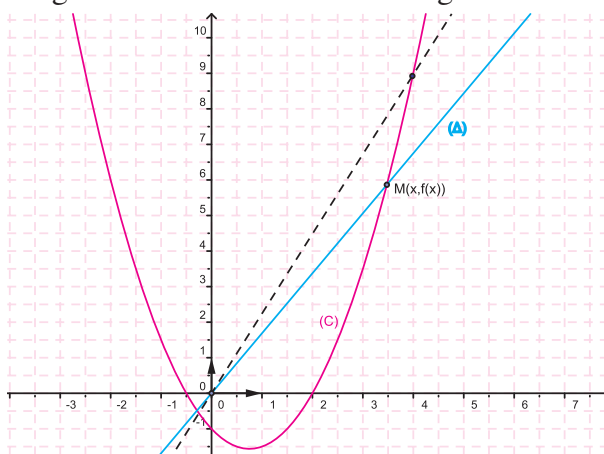
b. (C) admet-elle des asymptotes obliques ?

3) Pour $x \neq 0$ On considère le point $M(x, f(x))$.

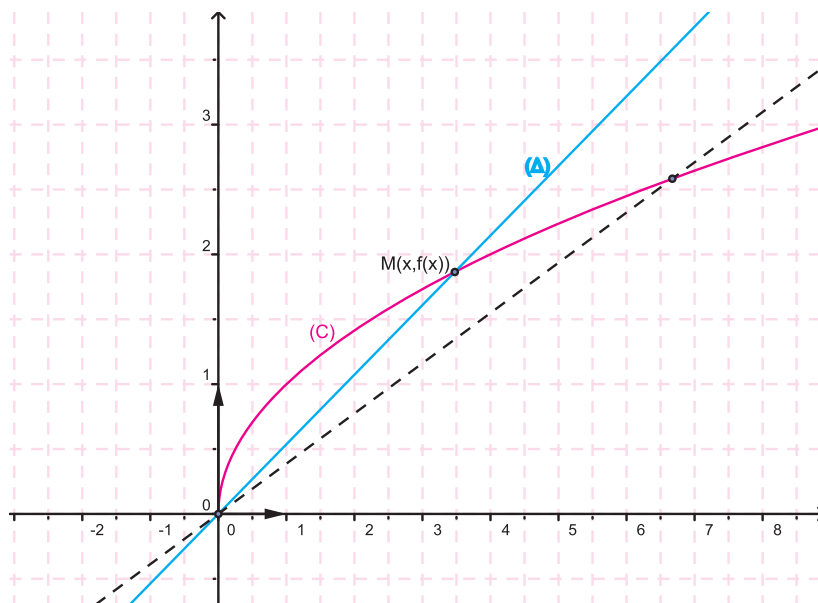
a. Vérifier que le coefficient directeur de la droite (OM) est égal à $\frac{f(x)}{x}$.

b. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ sont infinies.

► On dit que la courbe (C) admet deux branches paraboliques de direction celle de l'axe des ordonnées l'une au voisinage de $-\infty$ et l'autre au voisinage de $+\infty$.



5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x}$. (C) est sa courbe représentative dans un repère orthogonal.



Déterminer la limite de f à $+\infty$. (C) admet-elle des asymptotes verticales ou horizontales ?

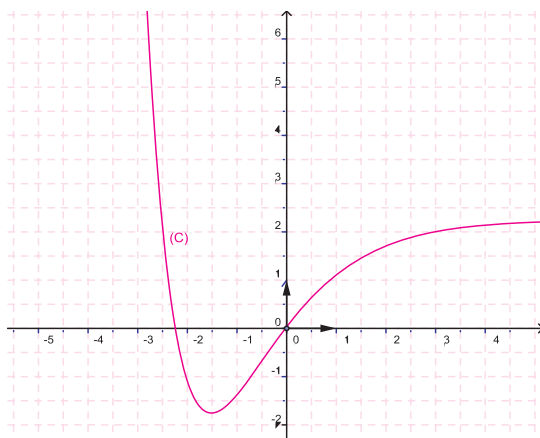
2) Pour $x \neq 0$, on considère le point $M(x, f(x))$.

a. Vérifier que le coefficient directeur de la droite (OM) est égal à $\frac{f(x)}{x}$.

b. Montrer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

► dit que la courbe (C) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

6. La courbe (C) ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. Vérifier, à l'aide du graphique, que (C) admet deux branches paraboliques dont on donnera les directions.



L'essentiel du cours

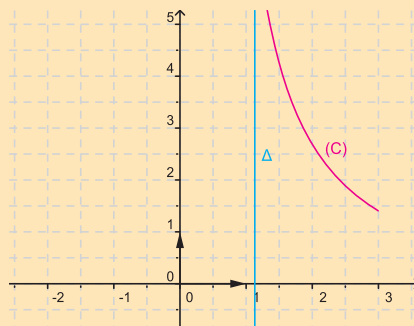
Soit f une fonction définie sur un ensemble non vide de réels D et (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

Branches infinies

Lorsque D contient un intervalle de la forme $]a, +\infty[$ ou un intervalle de la forme $]-\infty, b[$ ou lorsque la limite à gauche ou la limite à droite de f en un réel x_0 est infinie, on dit que la courbe (C) admet une branche infinie.

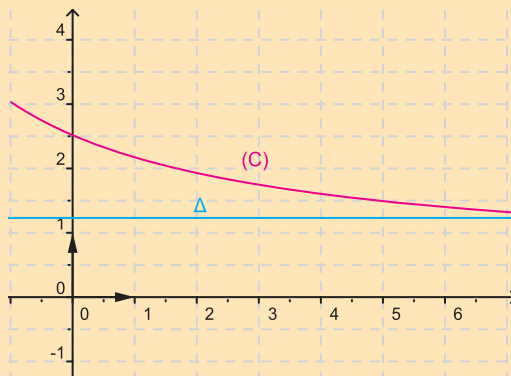
Asymptote verticale

Lorsque la limite à gauche ou la limite à droite de la fonction f en un réel x_0 est infinie, on dit que la droite Δ d'équation $x = x_0$ est une asymptote verticale de la courbe (C) .



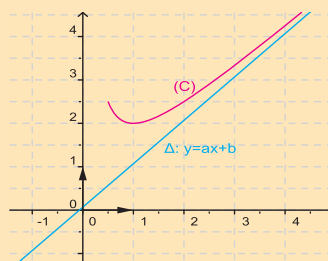
Asymptote horizontale

Lorsque la limite de la fonction f en $+\infty$ ou en $-\infty$ est un réel L , on dit que la droite Δ d'équation $y = L$ est une asymptote horizontale de la courbe (C) .



Asymptote oblique

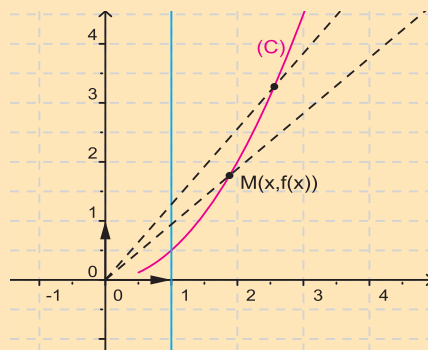
Lorsque pour un réel non nul a et un réel b , la limite de $(f(x) - (ax+b))$ en $+\infty$ ou en $-\infty$ est nulle, on dit que la droite Δ d'équation $y = ax+b$ est une asymptote oblique de la courbe (C) .



Branche parabolique de direction $(y'Oy)$

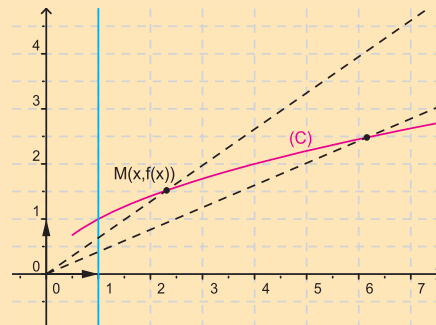
Lorsque la limite de f en $+\infty$ (resp. $-\infty$) est infinie et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ (resp. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$) est infinie,

on dit que la courbe (C) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$)



Branche parabolique de direction (x'Ox)

Lorsque la limite de f en $+\infty$ (resp. $-\infty$) est infinie et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ (resp. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$) est nulle, on dit que la courbe (C) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$).

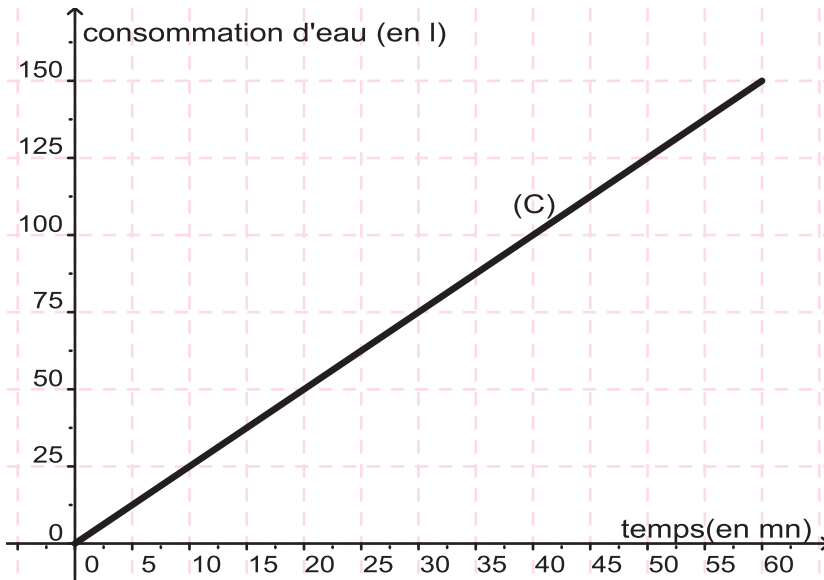


Auto évaluation

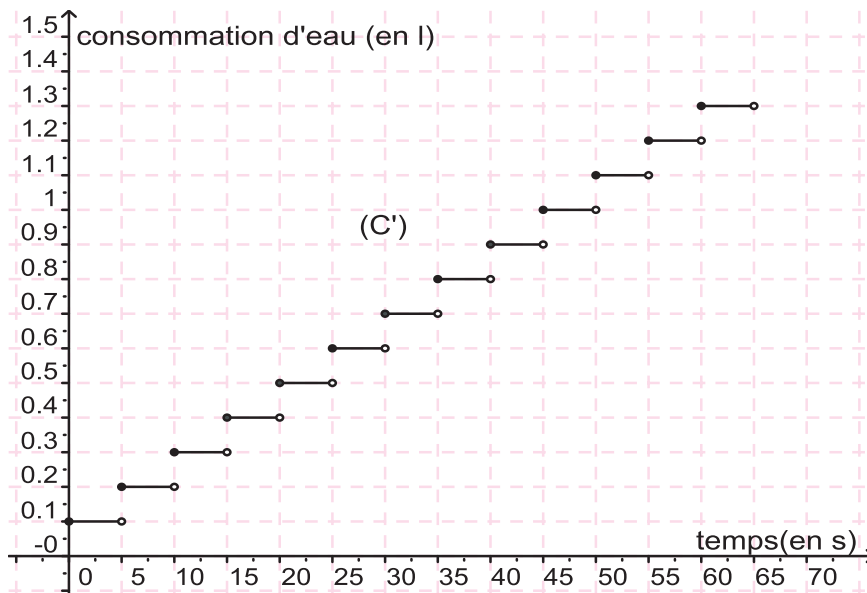
1. Reprendre les courbes (C_1) , (C_2) et (C_3) de l'activité préliminaire n°1 et vérifier graphiquement si elles admettent des asymptotes verticales ou horizontales ou des branches paraboliques.
2. 1) Etudier les branches infinies de la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par $f(x) = \frac{3x-3}{x-2}$.
2) Etudier les branches infinies de la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ par $f(x) = \frac{x^2-3}{x+2}$ (On écrira $f(x)$ sous la forme $ax + b + \frac{c}{x+2}$)
3) Donner l'ensemble de définition et préciser les branches infinies de la courbe représentative de chacune des fonctions f et g telles que $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ et $g(x) = \sqrt{x+2}$

TP Un jardin est arrosé deux fois par semaine.

Le premier arrosage, durant une heure, est modélisé par une fonction f dont la courbe représentative est le segment (C) ci-dessous :



• Le deuxième arrosage, durant trois heures, est modélisé par une fonction g dont une partie de la représentation graphique est la courbe (C') ci-dessous :



- 1) a. Déterminer les ensembles de définition des fonctions f et g .
 b. Expliciter $f(x)$ et $g(x)$.
- 2) Utiliser les courbes pour décrire les deux modalités d'arrosage, expliquer le phénomène réel.
- 3) Déterminer la quantité d'eau consommée pendant une semaine.

1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par : $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$. (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a. Choisir un entier naturel N . Utiliser un tableur pour déterminer le plus petit entier naturel P tel que pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, $x > P \Rightarrow f(x) > N$.

Interpréter ce résultat.

b. Choisir un entier naturel N . Utiliser le tableur pour déterminer le plus petit entier naturel n tel que pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, $0 < x - 1 < 10^{-n} \Rightarrow f(x) > N$.

Interpréter ce résultat.

c. Choisir un entier naturel N . Utiliser le tableur pour déterminer le plus petit entier naturel P tel que pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, $x > P \Rightarrow 0 < |f(x) - x| < 10^{-n}$.

Interpréter ce résultat.

2) a. Tracer la courbe (C) à l'aide d'un logiciel.

b. Donner, graphiquement, l'asymptote verticale et l'asymptote oblique de la courbe (C).

3) Retrouver, à l'aide du graphique, les résultats de la première question.

2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par : $f(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$.

1) Construire, à l'aide d'un logiciel, sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2) Utiliser le graphique pour déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

3) Valider les résultats obtenus.

1 Calculer les limites suivantes :

a. $\lim_{x \rightarrow 2} (2x - 3)$ b. $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - x + 2)$ c. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x+1}{x-3} \right)$

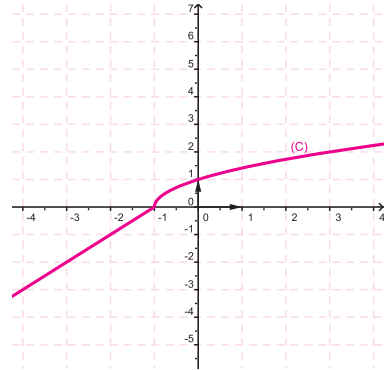
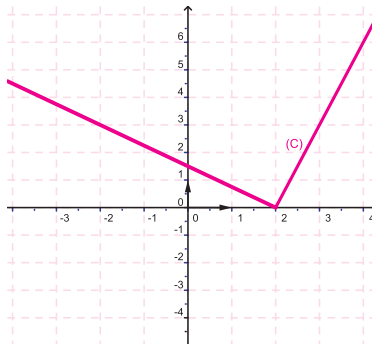
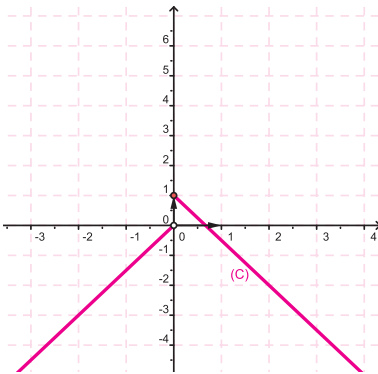
d. $\lim_{x \rightarrow 0} |x^2 - 1|$ e. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x-1}$ f. $\lim_{x \rightarrow -1} \left(x + 1 + \frac{1}{x} \right)$

2 Dans chacun des cas suivants, on donne la courbe représentative d'une fonction f . Donner le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$, ses extremums éventuels puis dites si elle admet une limite en x_0 .

a. $x_0 = 0$

b. $x_0 = 2$

c. $x_0 = -1$



3 Déterminer la limite éventuelle de la fonction f au point x_0 indiqué.

a. $f : x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ $x_0 = 1$

b. $f : x \mapsto \frac{|x^2 - 4|}{x - 2}$ $x_0 = 2$

c. $f : x \mapsto \frac{x(x+1)}{|x|}$ $x_0 = 0$

4 Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

2) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$. La fonction f admet-elle une limite en 1 ?

5 Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 4}$.

- 1) a. Vérifier que pour tout réel x , $x^2 - 5x + 4 = (x - 1)(x - 4)$
 b. Déterminer l'ensemble de définition D de f .
- 2) Simplifier $f(x)$ pour $x \in D$.
- 3) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

6 Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{|x^2 - 4|}{x - 2}$.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f .
- 2) a. Déterminer $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
 b. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$. La fonction f admet-elle une limite en 2 ?

7 Déterminer le réel a pour que la fonction f possède une limite au point x_0 donné.

$$\begin{aligned} \text{a. } f(x) &= \begin{cases} 3x^2 + x + a & \text{si } x \leq 0 \\ x + 2 & \text{si } x > 0 \end{cases} & x_0 = 0 \\ \text{b. } f(x) &= \begin{cases} \frac{x}{2} + 1 & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 2ax - 6 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} & x_0 = 2 \end{aligned}$$

8 Etudier, dans chacun des cas suivants, la continuité de f au point x_0 considéré :

a. $f: x \mapsto x^2 - x + 3$ $x_0 = -1$

b. $f: x \mapsto \frac{x+1}{x-2}$ $x_0 = \frac{1}{2}$

c. $f: x \mapsto 2x + 3 + \frac{1}{x+2}$ $x_0 = -2$

d. $f: x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < -1 \\ x^2 - 3x - 5 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$ $x_0 = -1$

e. $f: x \mapsto \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{6}{x+1} & \text{si } x > 2 \end{cases}$ $x_0 = 2$

9 On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$

Etudier la continuité de f en 0.

10 Soit la fonction f définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{x+1} & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = \sqrt{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- 1) Préciser l'ensemble de définition de f .
- 2) Etudier la continuité de f en 0.

11 Soit la fonction f définie par :
$$\begin{cases} f(x) = x^2 + 3x + 2 & \text{si } x < -1 \\ f(x) = \sqrt{x+1} & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f .
- 2) Etudier la continuité de f au point -2 et au point 0.
- 3) Etudier la continuité de f en -1 .

12 On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 + 3x - 4}{x + 4} & \text{si } x \neq -4 \\ f(-4) = a & (a \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f .
- 2) a. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 3x - 4 = (x - 1)(x + 4)$.
b. Déterminer a pour que f soit continue en -4 .

13 Etudier la limite en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction donnée :

$$\begin{array}{lll} \text{a. } f : x \mapsto (x^3 - 1)(x + 1) - x^4 & \text{b. } f : x \mapsto \frac{x^2}{x^2 + 1} & \text{c. } f : x \mapsto \frac{\sqrt{|x|}}{x} \\ \text{d. } f : x \mapsto \frac{-3x^2 + x + 1}{x - 1} & \text{e. } f : x \mapsto \frac{x^2 - 3}{x + 1} & \end{array}$$

14 Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2 - 1}{|x| - 1}$.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f .
- 2) Déterminer, si elles existent :

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

15

Soient les deux fonctions f et g définies par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$
 et $g(x) = \frac{1}{1+\sqrt{1+x}}$.

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions f et g .

- 2) Montrer que $f = g$.
- 3) Déterminer la limite de g à $+\infty$.
- 4) Etudier la continuité de f en 0.

16

La résistance équivalente R de deux résistances non nulles R_1 et R_2 montées en parallèle est donnée par la formule $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. On fixe R_1 à 5 ohms et on fait varier R_2 . De quelle valeur s'approche R lorsque :

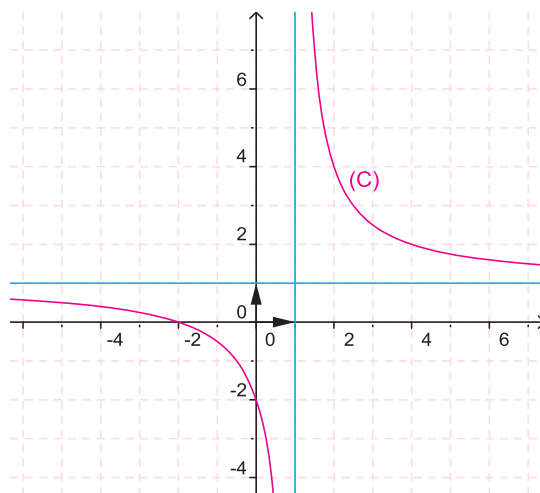
- a. R_2 devient de plus en plus petit ?
- b. R_2 devient de plus en plus grand ?

17

La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f donnée.

Utiliser cette courbe pour déterminer ,

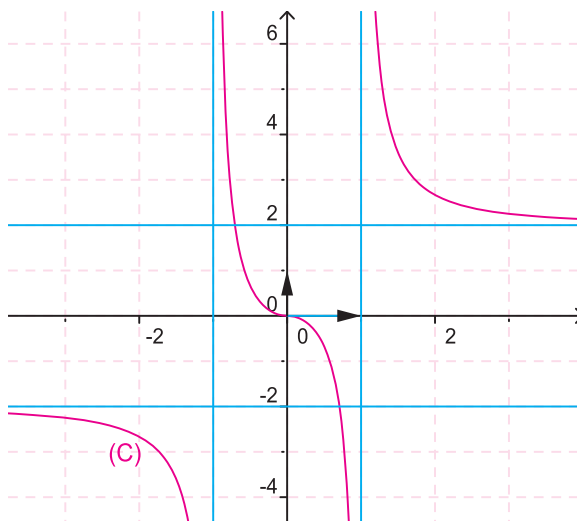
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$



18

La courbe (C) ci-contre est celle d'une fonction f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$;
 $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$.
- 2) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- 3) Préciser les asymptotes de (C).



19 Déterminer les asymptotes de la courbe (C) de la fonction f dans chacun des cas suivants :

$$\begin{array}{llll} \text{a. } f : x \mapsto \frac{x+2}{x+3} & \text{b. } f : x \mapsto \frac{1}{x-2} & \text{c. } f : x \mapsto \frac{x}{|x|-1} & \text{d. } f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < 1 \\ \frac{2x+1}{x+2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \\ \text{e. } f : x \mapsto x + \frac{1}{x} & \text{f. } f : x \mapsto 2x+3 + \frac{4}{x+2} & & \end{array}$$

20 Donner l'ensemble de définition puis étudier les branches infinies de la courbe représentative de chacune des fonctions u, v et w est définies par

$$u(x) = -2x^3 - x^2 + x - 2, \quad v(x) = \sqrt{-2x+1} \text{ et } w(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

21 Soit f la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-x} & \text{si } x \neq 0 \text{ et } x \neq 1 \\ f(1) = a, f(0) = b \end{cases}$$

- 1) Déterminer a pour que f soit continue en 1.
- 2) Existe-t-il un réel b tel que f soit continue en 0 ?
- 3) Déterminer les asymptotes éventuelles de la courbe représentative de la fonction f.

La notion de limite est le concept central en analyse. Elle intervient dès que l'on étudie les suites ou les fonctions. Elle est indispensable pour définir la dérivée ou la continuité.

Dire qu'une quantité "admet une limite" est quelque chose de très intuitif. Tellement intuitif que les mathématiciens n'avaient pas ressenti pendant plusieurs siècles le besoin de définir précisément ce dont il s'agissait.

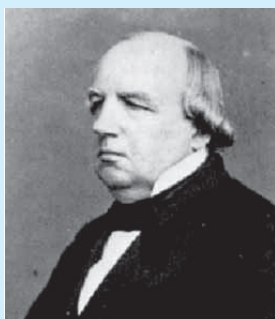
*Grâce aux travaux de **L'Huillier Simon** (1750 – 1840) qui portent principalement sur le concept de limite pour lequel celui ci apporte une notation nouvelle bien pratique : l'abréviation **lim.** pour limite.*

*Au XIXème siècle, **Weierstrass** (1815 – 1897) , à la suite de ses travaux et ceux d' Euler sur des fonctions continues, donne une définition correcte de la limite d'une fonction. C'est lui aussi qui présente le comportement de la variable ($x \rightarrow$) sous le symbole (**lim**) vers 1850. Avant cette date, on précisait ce comportement dans le contexte.*

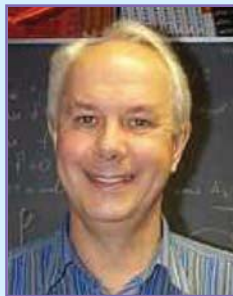
*Avant de passer à des considérations plus terre à terre, voici comment le célèbre mathématicien anglais **Ian Stewart** né en 1945, voit la définition :*

"f admet l comme limite en a" : " C'est un peu un jeu... Le joueur Epsilon indique l'écart maximum qu'il accepte entre $f(x)$ et l (c'est à dire: il choisit $\varepsilon > 0$ et il impose $|f(x)-l| < \varepsilon$). Le joueur Eta essaie de faire ce qu'il faut pour le satisfaire (c'est à dire: il essaie de trouver $\eta > 0$ tel que, si l'écart entre x et a est inférieur à η , alors $|f(x)-l| < \varepsilon$). Si, quel que soit le choix d'Epsilon, le joueur Eta a toujours une stratégie gagnante, alors $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a".

Karl Weierstrass (1815 - 1897)



Ian Stewart (né en 1945)



PLAN DU CHAPITRE

- I) Dérivabilité en un point
- II) Dérivabilité à droite, dérivabilité à gauche
- III) Dérivabilité sur un intervalle

Travaux pratiques

Avec l'outil informatique

Exercices et problèmes

Mathématiques et culture

I. Dérivabilité en un point

Activités préliminaires

1. f est une fonction définie sur un intervalle ouvert I , a et $a + h$ sont deux réels de I , avec $h \neq 0$. Le taux d'accroissement de f entre a et $a + h$ est :

$$t(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Calculer la limite de $t(h)$ lorsque h tend vers 0 dans chacun des cas suivants :

1) $f : x \mapsto 4x^2$, $a = -\sqrt{5}$

2) $f : x \mapsto \frac{1}{x-3}$, $a = 4$

3) $f : x \mapsto \sqrt{1-x}$, $a = \frac{5}{9}$

2. Tracer chacune des droites suivantes et donner son équation cartésienne dans le repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$

a. $\Delta_1 = (AB)$ où $A(2, -5)$ et $B(-1, 4)$

b. $\Delta_2 = (CD)$ où $C(-3, -4)$ et $D(-3, 0)$

c. Δ_3 est La droite horizontale (parallèle à l'axe des abscisses) passant par $E(1, -2)$

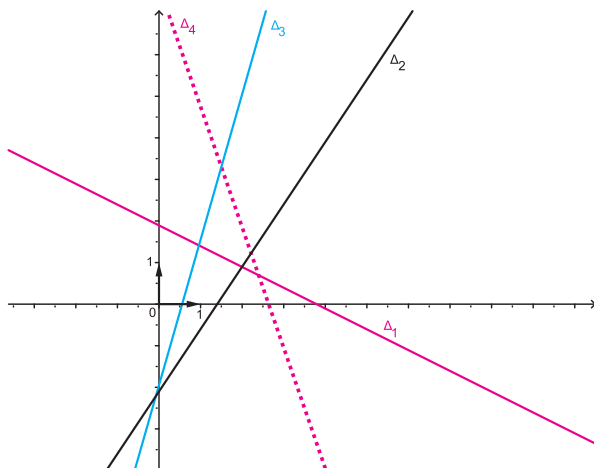
d. Δ_4 est La droite verticale (parallèle à l'axe des ordonnées) passant par $F(3, -3)$

e. Δ_5 est La droite passant par $G(0, 5)$ et de coefficient directeur $-\frac{1}{2}$

f. Δ_6 est La droite parallèle à la droite $T : y = 2x - 1$ et passant par le point $H(-3, 2)$

3. m, p, q et r sont quatre réels vérifiant : $m < p < 0 < q < r$. Chacun de ces réels est le coefficient directeur de l'une des droites représentées sur la figure ci-contre.

Faire correspondre à chaque droite son coefficient directeur.



Activités de découverte

4. (Vitesse instantanée d'un mobile)

Le mouvement d'un point mobile M sur une droite D munie d'un repère $(O, \vec{u})$ est défini par la donnée de la distance $d(t)$ parcourue par M en fonction du temps t . La vitesse moyenne de M entre les instants t_1 et t_2 ($t_1 \neq t_2$) est $V_{(t_1, t_2)} = \frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1}$. On suppose dans la suite que $d(t) = 2t^2 - t + 1$

1) Recopier puis compléter le tableau suivant :

t	0	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5
$V_{(1,t)}$							

Que peut-on conjecturer sur $V_{(1,t)}$ lorsque t s'approche de 1

2) On suppose que $t \neq 1$. Exprimer $V_{(1,t)}$ en fonction de t puis montrer que la fonction $t \mapsto V_{(1,t)}$ a une limite finie L qu'on déterminera. (L s'appelle la vitesse instantanée de M à l'instant 1)

3) Montrer que la vitesse instantanée de M à l'instant t_0 est égale à $4t_0 - 1$

► La fonction $t \mapsto \left(\frac{d(t) - d(t_0)}{t - t_0} \right)$ admet donc une limite finie égale à $4t_0 - 1$ quand t tend vers t_0 ; on dit que la fonction d est dérivable en t_0 , le réel $4t_0 - 1$ s'appelle nombre dérivé de la fonction d au point t_0 et se note $d'(t_0)$

On a donc : $d'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \left(\frac{d(t) - d(t_0)}{t - t_0} \right)$

5. Soient f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 1$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) Vérifier que le point $M_0(2, 3)$ appartient à (C)

2) Soit $M(x, f(x))$ un point de (C) distinct de M_0 . Quel est le coefficient directeur m de la droite $\Delta_M = (M_0M)$. Vérifier que m tend vers $f'(2)$ quand x tend vers 2.

3) En déduire que lorsque M s'approche de M_0 (c'est-à-dire x tend vers 2) les droites Δ_M ont pour position limite une droite Δ dont on donnera une équation cartésienne dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

4) Tracer (C) et Δ

► Δ est une droite passant par le point $M_0(2,3)$ de la courbe (C) et de coefficient directeur $f'(2)$; Δ s'appelle la tangente à (C) au point M_0

6. Soit (H) l'hyperbole représentant la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Vérifier que l'équation de la tangente T à (H) au point M(1, 1) est $y = -x + 2$.

2) Soit la fonction affine A définie sur $\mathbb{R}$ par $A(x) = -x + 2$. Montrer que pour tout réel h on a $f(1+h) = A(1+h) + h \zeta(h)$ où ζ est une fonction qui tend vers zéro quand h tend vers zéro.

3) En supposant que $h \zeta(h)$ est négligeable quand h est proche de zéro, calculer des valeurs approchées de $f(1,032)$ et de $f(0,913)$.

► On a $f(1+h) = A(1+h) + h \zeta(h)$, avec $\zeta(h)$ tend vers 0 quand h tend vers 0.

$A(1+h) = f(1) + f'(1)h$ s'appelle approximation affine de $f(1+h)$ pour tout réel h proche de zéro. Cela revient à remplacer autour du point M(1, f(1)) la courbe (H) par sa tangente T en M.

7. Montrer que chacune des fonctions suivantes est dérivable en x_0 et calculer son nombre dérivé en x_0

1) $f : x \mapsto \frac{1}{x} \quad (x_0 \in \mathbb{R}^*) \quad 2) h : x \mapsto \sqrt{x} \quad (x_0 \in \mathbb{R}_+^*)$

3) $h : x \mapsto ax^2 + bx + c \quad (x_0 \in \mathbb{R}), (a, b \text{ et } c \text{ sont trois réels donnés})$

8. Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et dérivable en un point x_0 de I et de nombre dérivé égal à a. On considère la fonction g définie sur $I \setminus \{x_0\}$

par $g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

1) Vérifier que $f(x) = f(x_0) + (x - x_0) g(x)$

2) En déduire que f est continue en x_0

3) Soit la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = |x|$.

a. u est-elle continue en 0 ?

b. u est-elle dérivable en 0 ?

L'essentiel du cours

Dérivabilité en un point

• Définition

Une fonction f définie sur un intervalle ouvert contenant un réel x_0 est dite dérivable en x_0 si la fonction $x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite finie en x_0 , cette limite s'appelle le nombre dérivé de f en x_0 et on la note $f'(x_0)$

• Autre expression du nombre dérivé : $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right)$

Interprétation géométrique:

Tangente en point d'une courbe :

Le plan P est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$

• Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant un réel x_0 et dérivable en x_0 , la droite Δ de coefficient directeur $f'(x_0)$ et passant par le point $M_0(x_0, f(x_0))$ s'appelle tangente à la courbe (C) de f au point M_0 .

Une équation de Δ : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

(La pente de la tangente Δ au point d'abscisse x_0 est égale au nombre dérivé de f en x_0)

• Tangente horizontale :

Si f est dérivable en x_0 et telle que $f'(x_0) = 0$, alors sa courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses, au point d'abscisse x_0 .

• Tangente verticale :

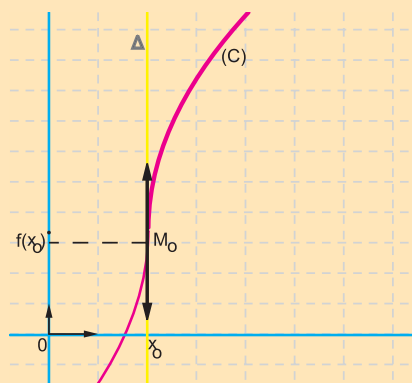
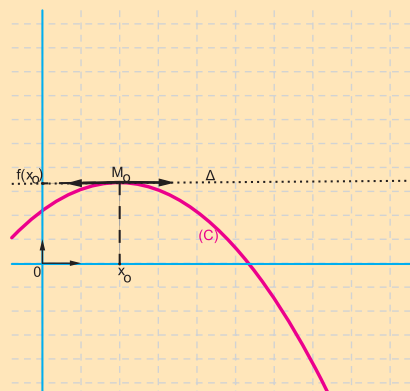
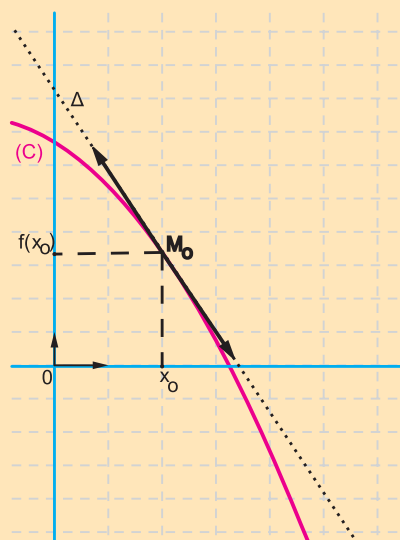
Si $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) = +\infty$ (ou $-\infty$) alors

f n'est pas dérivable en x_0 mais sa courbe (C) admet une tangente verticale au point $M_0(x_0, f(x_0))$.

Approximation affine locale d'une fonction :

Si la fonction f est dérivable en un point x_0 et de nombre dérivé a en ce point, alors on peut écrire : $f(x_0 + h) = f(x_0) + ah + h \zeta(h)$ où ζ est une fonction de limite zéro en zéro. $f(x_0) + ah$ est une approximation affine de $f(x_0 + h)$ lorsque h est proche de zéro.

Illustrations graphiques



Dérivabilité et continuité :

Théorème :

Si f est une fonction dérivable en x_0 , alors f est continue en x_0

- La réciproque de la propriété précédente est fausse, c'est-à-dire une fonction peut être continue en un point mais non dérivable en ce point.

Nombre dérivé en x_0 de quelques fonctions usuelles :

a , b et c sont trois réels donnés,

- $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ est dérivable en tout réel x_0 , et on a $f'(x_0) = 2ax_0 + b$

En particulier :

- $f : x \mapsto c$ (fonction constante) est dérivable en tout réel x_0 , et on a $f'(x_0) = 0$
- $f : x \mapsto x$ (fonction identique) est dérivable en tout réel x_0 , et on a $f'(x_0) = 1$
- $f : x \mapsto ax + b$ est dérivable en tout réel x_0 , et on a $f'(x_0) = a$
- $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable en tout réel strictement positif x_0 , et on a $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$
- $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable en tout réel $x_0 \neq 0$, et on a $f'(x_0) = \frac{-1}{x_0^2}$

Auto évaluation

1. Etudier la dérivabilité de f en x_0 :

$$f : x \mapsto 2x - x^3 ; \quad x_0 = -1$$

$$f : x \mapsto \frac{-3}{x-2} ; \quad x_0 = -7$$

$$f : x \mapsto \sqrt{1+2x} ; \quad x_0 = 4$$

$$f : x \mapsto x|x| ; \quad x_0 = 0$$

2. Calculer en utilisant les résultats du cours le nombre dérivé en x_0 de chacune des fonctions suivantes :

$$1) f : x \mapsto -3x + 2 ; \quad x_0 = \sqrt{5}$$

$$2) f : x \mapsto 11 ; \quad x_0 = -3$$

$$3) f : x \mapsto 5x^2 - x + 2 ; \quad x_0 = \frac{1}{2}$$

$$4) f : x \mapsto \sqrt{x} ; \quad x_0 = 9$$

$$5) f : x \mapsto \frac{1}{x} ; \quad x_0 = -\sqrt{6}$$

3. Déterminer chacune des limites suivantes au point x_0 donné, en s'apercevant qu'il s'agit du calcul du nombre dérivé en x_0 d'une fonction qu'on déterminera :

$$1) \lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{4x^2 - 36}{x + 3} \right)$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{-\frac{1}{2}x^2 + 8}{x - 4} \right)$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \left(\frac{\frac{1}{x} + 2}{x + \frac{1}{2}} \right)$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 12} \left(\frac{2\sqrt{3} - \sqrt{x}}{12 - x} \right)$$

4. Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit la fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto -\frac{1}{4}x^2 + x + 3$$

1) a. Prouver que la représentation graphique (C) de f admet des tangentes Δ_1 , Δ_2 et Δ_3 respectivement aux points A(-2, 0), B(4, 3) et S(2, 4). Donner leurs équations cartésiennes

b. Construire les droites Δ_1 , Δ_2 et Δ_3

2) Tracer (C)

5. Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + ax + b$. On suppose que la courbe (C) de f admet au point A d'abscisse 3 la tangente T d'équation : $y = 2x - 5$.

1) Expliquer les résultats $f(3) = 1$ et $f'(3) = 2$.

2) Calculer en fonction de a et b , $f(3)$ et $f'(3)$

3) Dédurre que $f(x) = (x - 2)^2$

II. Dérivabilité à droite, dérivabilité à gauche

Activités préliminaires

1.1) Calculer chacune des limites suivantes :

$$a. \lim_{x \rightarrow -2^+} \left(\frac{|x^2 + 2x|}{x + 2} \right)$$

$$b. \lim_{x \rightarrow -2^-} \left(\frac{|x^2 + 2x|}{x + 2} \right)$$

2) La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x^2 + 2x|$ est-elle dérivable en -2 ?

2.1) Calculer chacune des limites suivantes :

$$a. \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sqrt{|x|}}{x} \right)$$

$$b. \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\sqrt{|x|}}{x} \right)$$

2) La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{|x|}$ est-elle dérivable en zéro ?

Activités de découverte

3. soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{1}{2}x + 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue au point $x_0 = 2$

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \right)$ et $\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \right)$

f est-elle dérivable au point $x_0 = 2$?

► Les résultats de la deuxième question se traduisent par le fait que f est dérivable à droite en 2, f est dérivable à gauche en 2 mais f n'est pas dérivable en 2 et on a :

$f'_d(2) = \frac{1}{2}$ est le nombre dérivé de f à droite en 2

$f'_g(2) = 3$ est le nombre dérivé de f à gauche en 2

4. 1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x| \sqrt{|x|}$

a. Montrer que f est dérivable à droite et à gauche en zéro.

b. f est-elle dérivable en zéro ?

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x|x - 9|$

a. Montrer que f est dérivable à droite et à gauche au point 9.

b. f est-elle dérivable au point 9 ?

L'essentiel du cours

Dérivabilité à droite, dérivabilité à gauche

• Définition

- Une fonction f définie sur un intervalle de la forme $[x_0, b[$ ($b > x_0$) est dite dérivable à droite en x_0 si la fonction $x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite finie à droite en x_0 , cette limite s'appelle nombre dérivé de f à droite en x_0 et on la note par $f'_d(x_0)$

- Une fonction f définie sur un intervalle de la forme $]a, x_0]$ ($a < x_0$) est dite dérivable à gauche en x_0 si la fonction $x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite finie à gauche en x_0 , cette limite s'appelle nombre dérivé de f à gauche en x_0 et on la note par $f'_g(x_0)$.

• Théorème

f est une fonction dérivable en un point x_0 si et seulement si f est dérivable à droite en x_0 , f est dérivable à gauche en x_0 et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$

• Remarque

Si f est une fonction dérivable en x_0 alors $f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$

Interprétation géométrique :

Demi tangente en point d'une courbe :

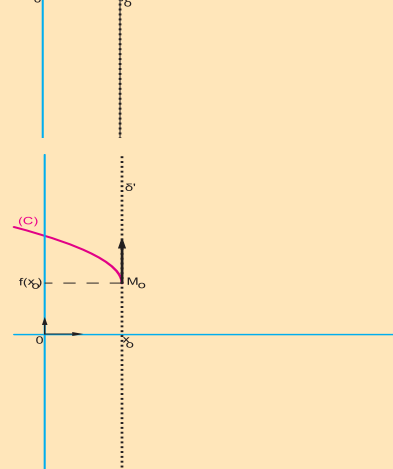
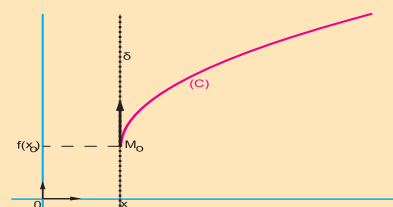
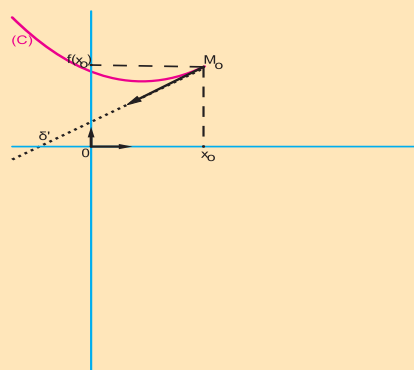
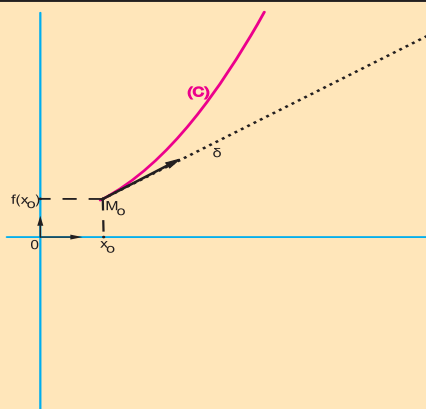
- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[x_0, b[$ ($b > x_0$) et dérivable à droite en x_0 , la demi-droite δ passant par le point $M_0(x_0, f(x_0))$ de la courbe (C) , de coefficient directeur $f'_d(x_0)$ et incluse dans le demi-plan $P_1: x \geq x_0$ s'appelle demi-tangente à (C) à droite au point M_0
- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a, x_0]$ ($a < x_0$) et dérivable à gauche en x_0 , la demi-droite δ' passant par le point $M_0(x_0, f(x_0))$ de la courbe (C) , de coefficient directeur $f'_g(x_0)$ et incluse dans le demi-plan $P_2: x \leq x_0$ s'appelle demi-tangente à (C) à gauche au point M_0

Demi tangentes verticales :

- Si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) = +\infty$ (ou $-\infty$)
 (C) admet une demi-tangente verticale à droite au point $M_0(x_0, f(x_0))$

- Si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) = +\infty$ (ou $-\infty$)
 (C) admet une demi-tangente verticale à gauche au point $M_0(x_0, f(x_0))$

Illustrations graphiques



Auto évaluation

1. Etudier la dérivabilité de f à droite en x_0 (calculer le nombre dérivé à droite en x_0 , lorsqu'il existe) :

- 1) $f : x \mapsto \sqrt{x}$; $x_0 = 0$
- 2) $f : x \mapsto x\sqrt{x}$; $x_0 = 0$
- 3) $f : x \mapsto \sqrt{1+2x}$; $x_0 = -\frac{1}{2}$

2. Etudier la dérivabilité de f à gauche en x_0 (calculer le nombre dérivé à gauche en x_0 , lorsqu'il existe) :

- 1) $f : x \mapsto \sqrt{5-x}$; $x_0 = 5$
- 2) $f : x \mapsto \sqrt{x^2+x}$; $x_0 = -1$
- 3) $f : x \mapsto x - |x-3x^2|$; $x_0 = \frac{1}{3}$

3. Etudier la dérivabilité de f en x_0 (on pourra étudier d'abord la dérivabilité à droite puis la dérivabilité à gauche en x_0)

- 1) $f : x \mapsto -3 + |x^2 - 5|$; $x_0 = \sqrt{5}$
- 2) $f : x \mapsto x|4 - 3x|$; $x_0 = \frac{4}{3}$
- 2) $f : x \mapsto |x+2| \sqrt{|x+2|}$; $x_0 = -2$
- 4) $f : x \mapsto \frac{|x|}{1+|x|}$; $x_0 = 0$

4. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto |x^2 - 1|$$

1) Prouver que la représentation graphique (C) de f admet deux demi tangentes en chacun des points $M(1, 0)$ et $N(-1, 0)$. Construire ces quatre demi tangentes dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (sans donner les équations cartésiennes)

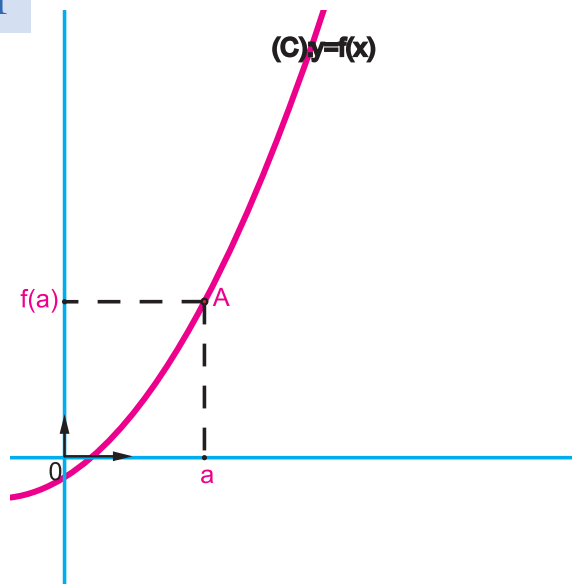
2) Tracer (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

5. Pour chacun des graphiques suivants répondre aux deux questions :

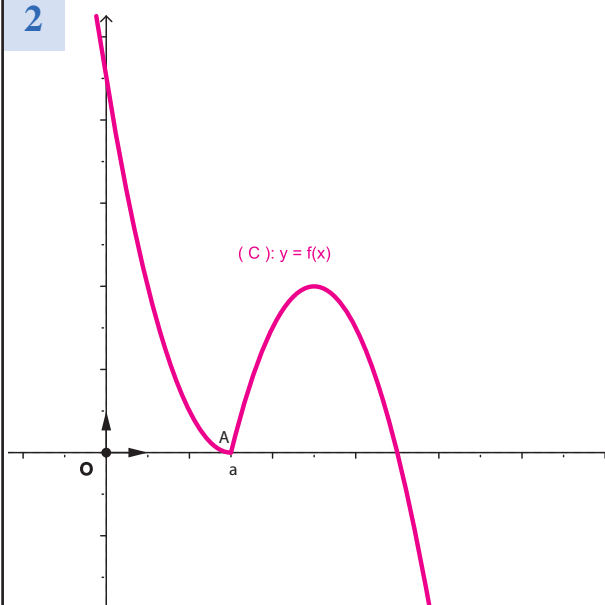
1) f est-elle dérivable en a ?

2) (C) admet-elle une tangente, une demi tangente ou deux demi tangentes de directions différentes au point $A(a, f(a))$?

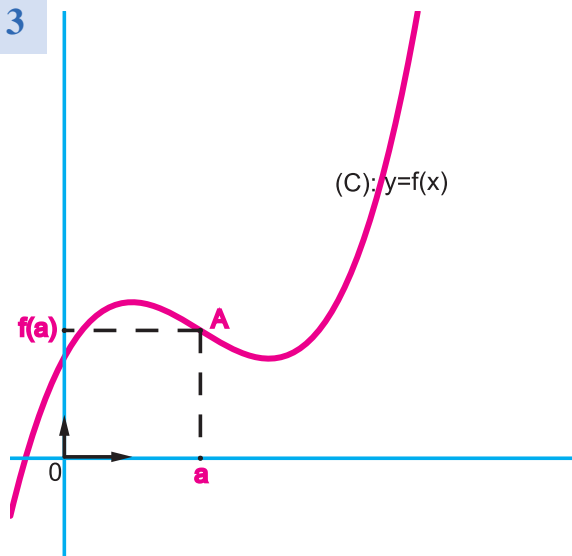
1



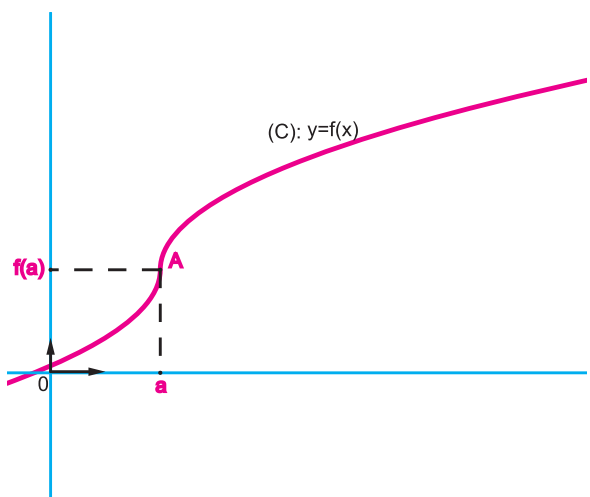
2



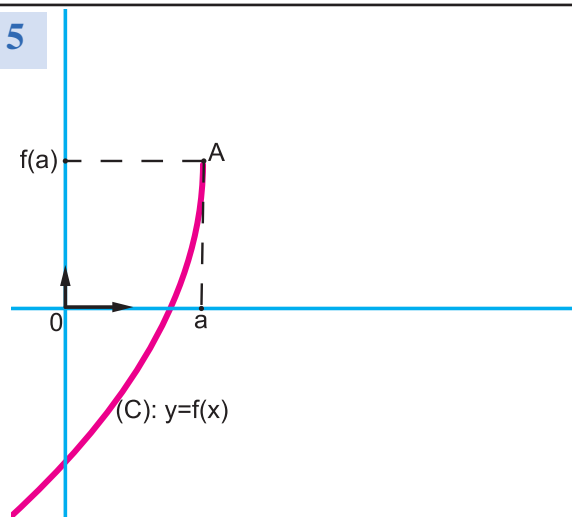
3



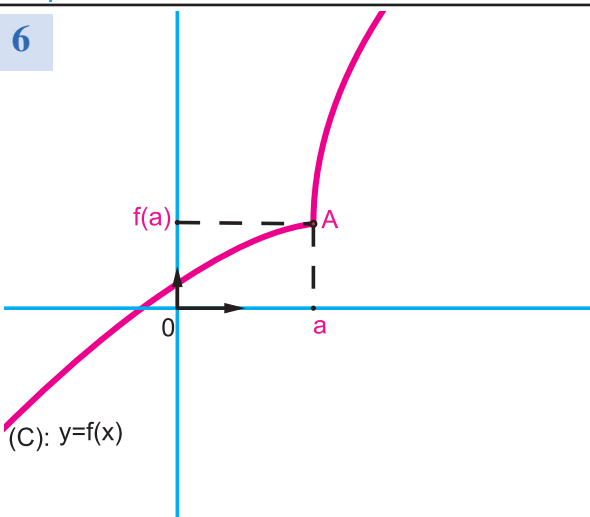
4



5



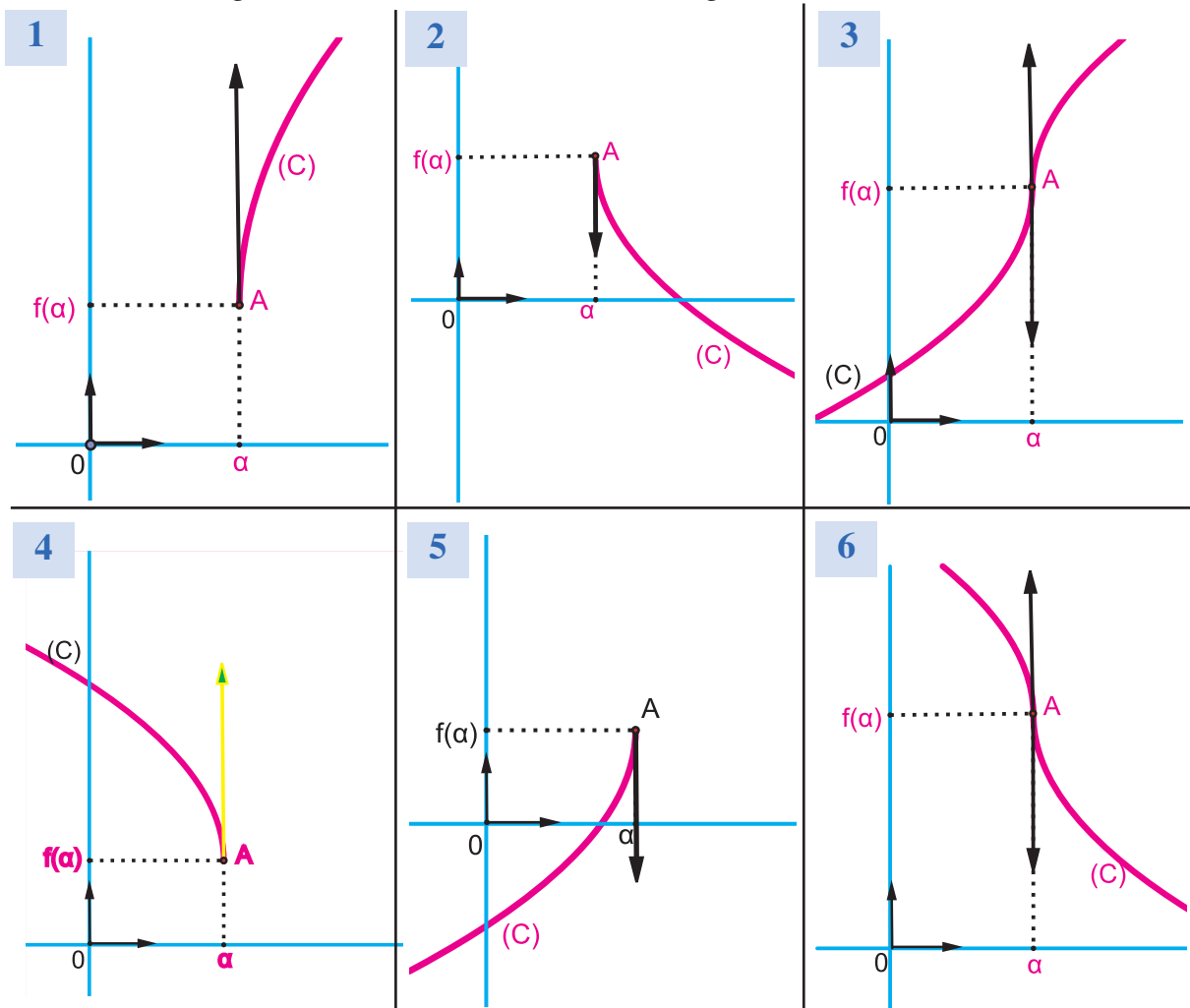
6



6. Chacun des graphiques suivants représente une fonction f définie sur un intervalle contenant un réel a . On pose pour $x \neq a$, $\varphi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Déterminer dans chaque cas : $\lim_{x \rightarrow a^+} \varphi(x)$, $\lim_{x \rightarrow a^-} \varphi(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)$ (lorsqu'elles existent)

et déduire une règle concernant le sens d'une demi tangente verticale.



III. Dérivabilité sur un intervalle

Activités préliminaires

1. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto 1 + 3x - x^2$$

1) Calculer les nombres dérivés de f respectivement en -1 , $\frac{1}{2}$ et $-\sqrt{5}$

2) Soient x un réel quelconque et $f'(x)$ le nombre dérivé de f en x . Exprimer $f'(x)$ en fonction de x

3) On considère la fonction $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f'(x)$$

Quel est le domaine de définition de f' ?

2. Soit la fonction $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \sqrt{x}$$

1) Exprimer $g'(x_0)$ en fonction de x_0 pour les valeurs de x_0 telles que $g'(x_0)$ existe

2) On considère la fonction $g' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto g'(x)$. Quel est le domaine de définition de g' ?

Activités de découverte

3. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \sqrt{2x-1}$$

1) Etudier la dérivabilité de f à droite au point $\frac{1}{2}$

2) Soit x_0 un réel tel que $x_0 > \frac{1}{2}$. Montrer que f est dérivable en x_0 et déterminer $f'(x_0)$

3) Calculer $f'(1)$, $f'(5)$, $f'(\frac{5}{2})$, $f'(\frac{2}{3})$, $f'(\sqrt{2})$

► f est dérivable en tout point $x_0 \in]\frac{1}{2}, +\infty[$. On dit que f est dérivable sur l'intervalle $]\frac{1}{2}, +\infty[$ et puisqu'elle n'est dérivable en aucun point en dehors de cet intervalle, on dit que $]\frac{1}{2}, +\infty[$ est le domaine de dérivabilité de f .

4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3|x - 1|$.

1) Soit x_0 un réel tel que $x_0 \neq 1$. Montrer que f est dérivable en x_0 et déterminer $f'(x_0)$ (considérer les deux cas $x_0 > 1$ et $x_0 < 1$)

2) Calculer $f'(-1)$, $f'(2)$, $f'(-\frac{1}{2})$, $f'(\frac{3}{2})$, $f'(0)$, $f'(\sqrt{2})$ et $f'(\frac{\pi}{3})$

3) a. Montrer que f est dérivable à droite en 1 et calculer $f'_d(1)$.

b. Montrer que f est dérivable à gauche en 1 et calculer $f'_g(1)$.

Commentaire :

- f est dérivable à droite en 1 et dérivable en tout point $x_0 \in]1, +\infty[$. On dit que f est dérivable sur l'intervalle $[1, +\infty[$

- De même f est dérivable sur $] -\infty, 1]$

- f n'est pas dérivable en 1 donc f n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$, on peut dire seulement que f est dérivable sur chacun des intervalles $[1, +\infty[$ et $] -\infty, 1]$

5. Donner le domaine de dérivabilité D de chacune des fonctions suivantes :

1) $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ (a, b et c trois réels donnés)

2) $f : x \mapsto \sqrt{x}$

3) $f : x \mapsto |x|$

4) $f : x \mapsto \frac{1}{x}$

L'essentiel du cours

Dérivabilité sur un intervalle :

Définition

- On dit que f est dérivable sur un intervalle ouvert I , si f est dérivable en tout point de l'intervalle I .
- On dit que f est dérivable sur un intervalle semi ouvert $[a, b[$, si f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ et f est dérivable à droite en a .
- On dit que f est dérivable sur un intervalle semi ouvert $]a, b]$, si f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$, et f est dérivable à gauche en b .
- On dit que f est dérivable sur un intervalle fermé $[a, b]$, si f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$, f est dérivable à droite en a et f est dérivable à gauche en b .

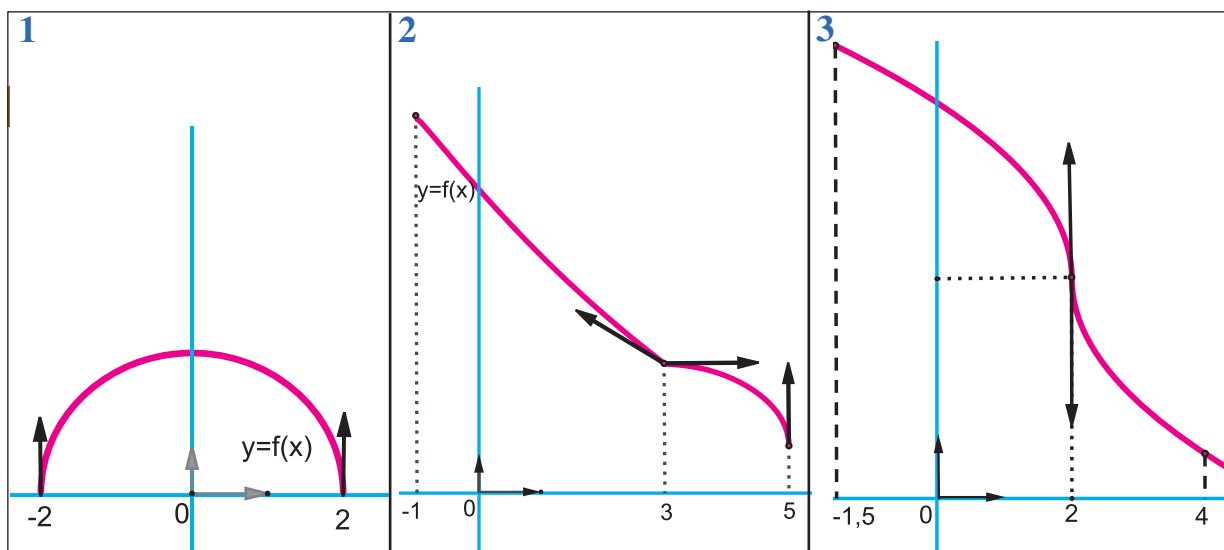
Remarque :

- Soit E une réunion d'intervalles, on dit qu'une fonction f est dérivable sur E , si f est dérivable sur chacun de ces intervalles, E s'appelle domaine de dérivabilité de f .
- Si D_f , D_c et D_d sont respectivement le domaine de définition de f , le domaine de continuité de f et le domaine de dérivabilité de f , alors on a :

$$D_d \subset D_c \subset D_f \quad (\text{les inclusions ne sont pas nécessairement strictes})$$

Auto évaluation

1. Déterminer le domaine de dérivabilité de chacune des fonctions représentées ci-dessous.



2. Donner le domaine de dérivabilité de chacune des fonctions suivantes :

- a. $f : x \mapsto -\sqrt{5}$ b. $g : x \mapsto \frac{1}{3}x$ c. $h : x \mapsto 7x - x^2$
d. $k : x \mapsto (x-3)^2$ e. $l : x \mapsto x|x-1|$

TP1 Approximation affine de la fonction $f : x \mapsto (1+x)^2$:

On se propose d'utiliser la dérivation pour obtenir, lorsque x est proche de zéro, une approximation affine de $f : x \mapsto (1+x)^2$

1) Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$, puis montrer que pour tout réel x , on a :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + x.r(x) \text{ où } r \text{ est une fonction telle que } \lim_{x \rightarrow 0} r(x) = 0$$

2) Quelle est la nature de la fonction $A : x \mapsto f(0) + f'(0)x$

3) Remplir le tableau suivant :

x	-0,1	0,1	-0,01	0,01	-0,001	0,001	-0,0001	0,0001
$f(x)$								
$A(x)$								
$ f(x) - A(x) $								

4) Montrer que si $|x| < 10^{-2}$, alors $0 < f(x) - [f(0) + f'(0)x] < 10^{-4}$

5) Donner des valeurs approchées de :

$$1,001^2, \quad 1,0004^2 \quad \text{et} \quad 0,99999^2.$$

Pour x proche de zéro
 $(1+x)^2 \simeq 1+2x$

TP2 Approximation affine de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$

On se propose d'utiliser la dérivation pour obtenir, lorsque x est proche de zéro, une approximation affine de $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$

1) Montrer que f est dérivable sur l'intervalle $]-1, +\infty[$ et calculer $f'(x)$.

2) Dédire de 1) que : $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x + x.r(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} r(x) = 0$

3) Montrer que, $f(x) - (1 + \frac{1}{2}x) = -\frac{x^2}{4\left[\sqrt{1+x} + (1 + \frac{x}{2})\right]}$

4) Montrer que pour $x \geq 0$, $|f(x) - (1 + \frac{1}{2}x)| \leq \frac{x^2}{8}$

Pour x proche de zéro
 $\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{1}{2}x$

5) Dédire que $1,0198 \leq \sqrt{1,04} \leq 1,02$

► On montre aussi que pour x proche de 0 :

$$(1+x)^3 \simeq 1+3x ; \quad \frac{1}{1+x} \simeq 1-x ; \quad \frac{1}{\sqrt{1+x}} \simeq 1 - \frac{1}{2}x$$

TP3 Utilisation de la dérivation en économie :

Coût moyen , coût marginal

Soit $C(x)$ le coût de fabrication d'une quantité x d'un certain produit. Le rapport $\frac{C(x)}{x}$ s'appelle coût moyen de fabrication du produit. Lorsque la production passe de la quantité x_0 à la quantité $x_0 + 1$, il en résulte un coût supplémentaire égal à $C(x_0 + 1) - C(x_0)$.

Comme on a,

$C(x_0 + 1) - C(x_0) = \frac{C(x_0 + 1) - C(x_0)}{(x_0 + 1) - x_0}$, le coût marginal vaut, en pratique $C'(x_0)$, nombre dérivé de C en x_0 .

Exemple :

Le coût de fabrication d'une quantité x d'un certain produit est exprimé, en fonction de la quantité produite x , par la formule : $C(x) = x^2 + 2x$

- 1) Calculer le coût moyen de fabrication pour $x = 1000$
- 2) Calculer le coût marginal pour $x = 1000$
- 3) Calculer $C'(1000)$.
- 4) Déduire l'erreur commise en identifiant le coût marginal pour $x = 1000$ à $C'(1000)$ (c'est-à-dire la différence $[C(x_0 + 1) - C(x_0)] - C'(1000)$).

Illustration graphique de la définition d'une tangente en un point d'une courbe

Utiliser un logiciel de géométrie pour :

- 1) Tracer la courbe représentative (C) de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 - 3x - 1$$

- 2) Marquer le point A(4,3) (Vérifier que A est un point de (C))
- 3) a. Marquer sur (C) un point autre que A et qu'on notera M.
b. Tracer la droite (AM) qu'on désignera par D
- 4) Demander l'affichage de la pente de D sur l'écran
- 5) Sélectionner M , le faire varier sur (C) et remarquer l'effet de cette variation sur la pente de D
- 6) Faire rapprocher M de A puis positionner M sur A, vérifier alors que la pente de D est égale au nombre dérivé de la fonction f au point 4.

Exercices et problèmes

1 Pour chacune des fonctions suivantes, calculer, à l'aide de la définition, le nombre dérivé au point x_0 :

1) $f(x) = 3x^2 - x$, $x_0 = 1$

2) $f(x) = 2x - x^3$ $x_0 = -2$

3) $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 4}$, $x_0 = 0$

4) $f(x) = \frac{2x-5}{x+3}$, $x_0 = -\frac{1}{2}$

2 Soit f une fonction dérivable en -2 tel que $f(-2) = 1$ et $f'(-2) = 4$. Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1 - f(x)}{x + 2} \right)$

2) $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{3x + 6}{f(x) - 1} \right)$

3) $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{f(x) - 1}{x^2 - 4} \right)$

4) $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{f(x) - 1}{(x + 2)^3} \right)$

3 f est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{ax + b}{x - 1}$ où a et b sont deux réels donnés

1) Montrer que f est dérivable en 2 et que $f'(2) = -(a + b)$

2) Calculer a et b sachant que $f(2) = 1$ et $f'(2) = 3$

4 A l'instant $t = 0$, on abandonne sans vitesse initiale une bille d'une hauteur de $122,5\text{m}$. La distance $x(t)$ parcourue à l'instant t est égale à $4,9t^2$ ($x(t)$ en mètres et t en secondes)

1) A quel instant la bille arrivera-t-elle au sol?

2) Avec quelle vitesse arrivera-t-elle au sol?

5 Soit $f : x \mapsto x^2 + 4x - 7$. On suppose que le plan est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Montrer que f est dérivable en 1 et déterminer $f'(1)$.

2) Tracer alors la tangente T à (C_f) au point A d'abscisse 1 .

3) Tracer (C_f)

6 Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x+2}$

1) Montrer que f est dérivable en -1 et calculer son nombre dérivé en -1 .

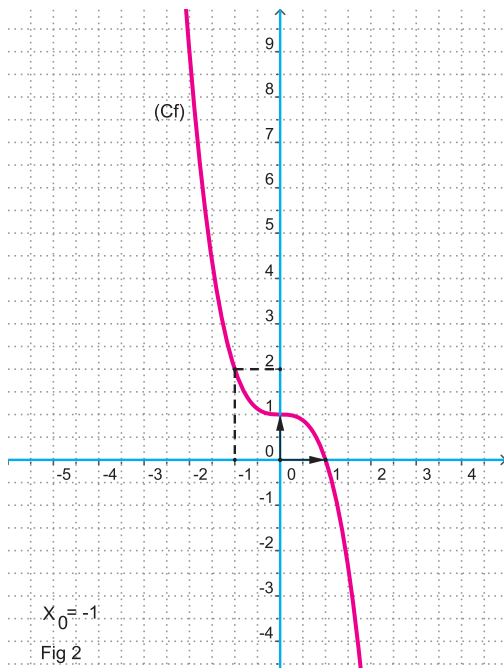
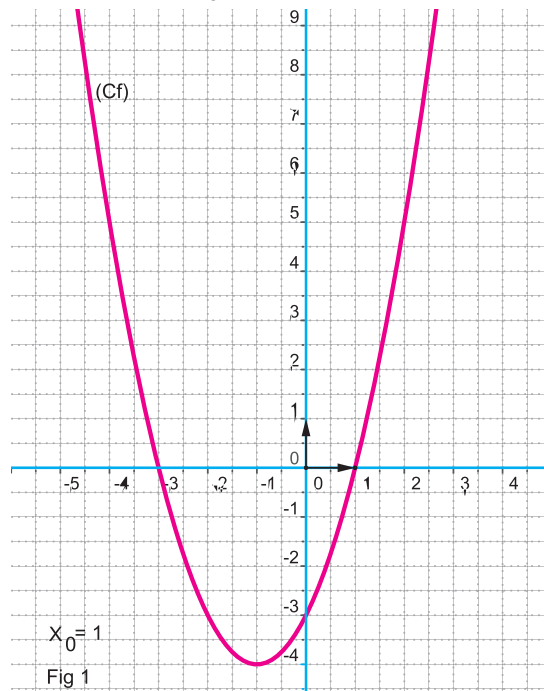
2) Ecrire l'équation de la tangente T à (C_f) au point d'abscisse -1

7 On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{-x+4}{x-3},$$
la courbe représentative (C) de f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et la droite (D) d'équation : $y = -4x$

- 1) Montrer que f est dérivable en tout point $x_0 \neq 3$ et déterminer $f'(x_0)$
- 2) Montrer qu'il existe deux tangentes Δ et Δ' à (C) parallèles à la droite (D)
- 3) Tracer Δ , Δ' et (C) .

8 A partir des représentations graphiques ci-dessous, dire dans chaque cas si f est dérivable en x_0 et donner le signe de $f'(x_0)$ dans le cas où il existe.



9 Le plan est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soient un réel a ($a \neq 4$ et $a \neq 0$) et la fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{-4}{x-a}$$

1) a. Montrer que f est dérivable en tout point x_0 de $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ et que $f'(x_0) = \frac{4}{(x_0 - a)^2}$

b. Déduire $f'(0)$ et $f'(4)$ en fonction de a .

2) On suppose que la courbe (C) de f admet deux tangentes parallèles à la droite

$\Delta : y = x$, respectivement aux points d'abscisses 0 et 4.

a. Expliquer les égalités $f'(0) = f'(4) = 1$

b. Déduire que $a = 2$

10 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = -3x^2$

1) A et B sont deux points de (C_f) d'abscisses respectives a et b .

Déterminer les équations des tangentes T_A et T_B à (C_f) respectivement en A et B.

2) On désigne par I le milieu du segment $[AB]$ et par J le point d'intersection de T_A et T_B .

Montrer que I et J appartiennent à la droite d'équation $x = \frac{a+b}{2}$.

3) Soit K le milieu du segment $[IJ]$. Montrer que K appartient à (C_f) et que la tangente à (C_f) en K est parallèle à la droite (AB) .

11 1) Montrer que si f et g sont deux fonctions dérivables en 0 et telles que

$$f(0) = g(0) = 0 \quad \text{et} \quad g'(0) \neq 0 \quad \text{alors} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{g(h)} = \frac{f'(0)}{g'(0)}$$

2) a. Montrer que la fonction $h \mapsto \sqrt{h+5} - \sqrt{5}$ est dérivable en 0 et calculer son nombre dérivé en 0

b. Appliquer le résultat de 1) pour calculer : $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{h - 2h^3}{\sqrt{h+5} - \sqrt{5}} \right)$

12 1) Construire la courbe représentative (C) de la fonction :

$$f : x \mapsto \frac{1}{x} \quad \text{dans un repère } (O, \vec{i}, \vec{j})$$

2) Déterminer le nombre dérivé de f en un réel x_0 non nul.

3) Déterminer les points de (C) où la tangente est parallèle à la droite D : $y = -x + 1$.
Construire ces tangentes.

4) Soit le point A(-4,2).

a. Vérifier que A n'est pas un point de (C).

b. Est-il possible de mener par A des tangentes à (C)? Si oui, construire ces tangentes ?

13 Etudier, dans chacun des cas suivants la dérivabilité de la fonction f en 0 et calculer, éventuellement, son nombre dérivé en 0 :

1) $f : x \mapsto x |x|$

2) $f : x \mapsto x\sqrt{x}$

3) $f : x \mapsto (1+x)\sqrt{x}$

3) $f : x \mapsto \sqrt{|x|}$

14 Soit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1-2x}$ définie sur $]-\infty, \frac{1}{2}]$

1) Montrer que f est dérivable en -4 et calculer $f'(-4)$

2) Etudier la dérivabilité à gauche au point $\frac{1}{2}$. Donner une interprétation graphique du résultat trouvé.

3) Soit x_0 un réel tel que $x_0 < \frac{1}{2}$. Montrer que f est dérivable en x_0 et calculer $f'(x_0)$

4) Trouver un réel a tel que $f'(a) = -\frac{1}{5}$

15 Soient la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \geq 1 \\ \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 7) & \text{si } x < 1 \end{cases}$ et (C) la courbe représentative de f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Vérifier que f est dérivable à droite et dérivable à gauche en 1 et que $f'_d(1) = 2$ et $f'_g(1) = -1$

2) Soit A le point de (C) d'abscisse 1. Montrer que (C) admet au point A deux demi tangentes δ et δ' que l'on précisera

3) Tracer dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ δ , δ' et la courbe (C).

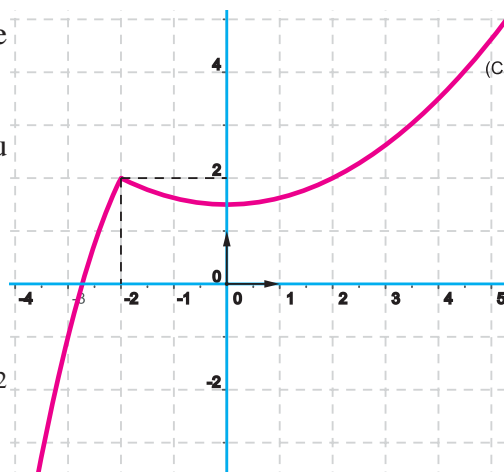
16 Le graphique ci-contre représente la courbe (C) d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

1) Que peut-on dire à propos de la dérivabilité de f au point -2 ?

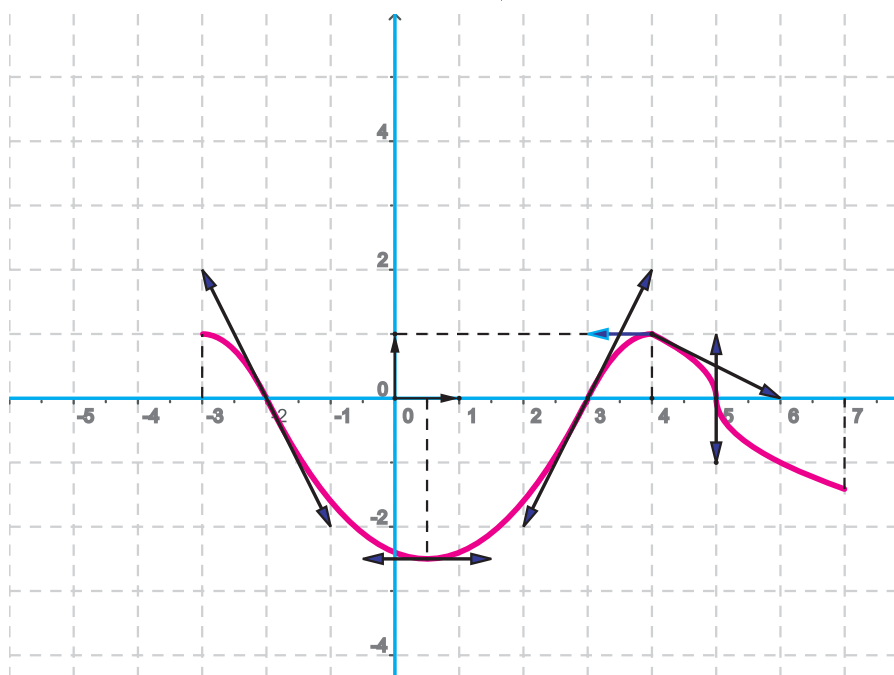
2) On suppose que $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{2} & \text{si } x \geq -2 \\ -x^2 - 2x + 2 & \text{si } x < -2 \end{cases}$

Montrer que f admet deux demi tangentes δ_1 et δ_2 respectivement à droite et à gauche au point -2 .

Tracer δ_1 et δ_2



17 La représentation graphique suivante est celle d'une fonction f définie sur $[-3, 7]$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$



1) Utiliser cette représentation pour déterminer les intervalles sur lesquels f est dérivable.

2) a. Justifier l'égalité $f'(-2) = -2$

b. Donner l'équation de la tangente à (C_f) au point $A(-2, 0)$

c. Déterminer $f'(\frac{1}{2})$ et $f'(3)$

d. f est-elle dérivable en 4 ?

3) a. Quel est le domaine de continuité de f ?

b. Quel est le domaine de dérivabilité de f ?

18 Soit la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 3 - 4x^2 & \text{si } x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > \frac{1}{2} \end{cases}$

- 1) Montrer que f est dérivable au point $\frac{1}{2}$
- 2) Déterminer le domaine de dérivabilité de f

19 Soit la fonction $f : x \mapsto |x^2 + 3x| - 1$

- 1) Etudier la dérivabilité de f aux points $x_0 = 0$ et $x_1 = -3$.
- 2) Indiquer sur quels intervalles de $\mathbb{R}$ f est – elle dérivable ?

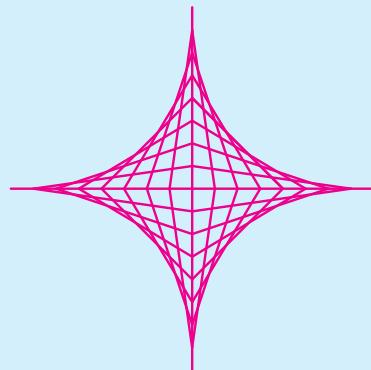
20 Soit la fonction $f : x \mapsto x|x| + |x-1|$

- 1) Déterminer le domaine de définition et le domaine de continuité de f .
- 2) Donner l'expression de f sur chacun des intervalles $]-\infty, 0]$, $[0, 1]$ et $[1, +\infty[$
- 3) a. Etudier la dérivabilité de f aux points 0 et 1
b. Déterminer le domaine de dérivabilité de f

• **L'ASTROÏDE :**

En traçant plusieurs segments tous de même longueur ayant une extrémité sur l'axe (Ox) et l'autre sur (Oy) ($(Ox) \perp (Oy)$), on obtient une courbe appelée astroïde. Cette courbe est tangente à tous les segments tracés. Cette courbe est étudiée par Jean Bernoulli (1667 - 1748) et D'Alembert en 1748. Son nom est donné par Littrow en 1838.

"Astroïde" signifie "en forme d'astre" (même étymologie qu'astéroïde : qui ressemble à un astre)

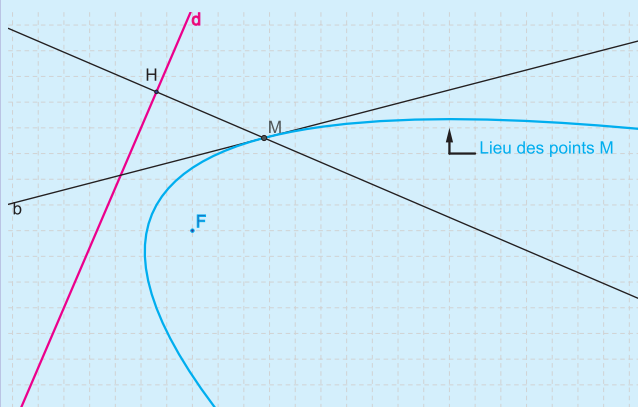


• **ENVELOPPES , GENERATION TANGENTIELLE :**

On appelle enveloppe d'une famille de droites une courbe qui est tangente à chacune des droites de la famille. Cette courbe est alors dite engendrée tangentiellement par cette famille de droites.

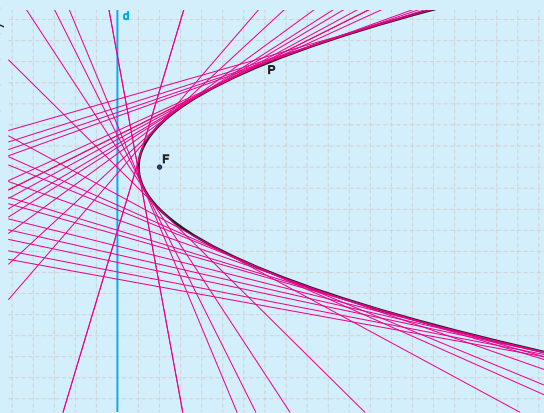
Exemple : les paraboles

F est un point fixe, H décrit une droite fixe d . On montre que l'intersection M de la médiatrice de $[FH]$ et de la perpendiculaire à d passant par H décrit une parabole et que la médiatrice est la tangente à cette parabole en M .



On en déduit la génération tangentielle suivante : l'enveloppe d'une famille de droites pour lesquelles le symétrique H d'un point fixe F par rapport à chacune de ces droites décrit une droite fixe d , est une parabole P .

(F s'appelle foyer de P et d est sa directrice)



Fonctions Dérivées-Applications

5

PLAN DU CHAPITRE

I) Fonction dérivée

II) Opérations sur les fonctions dérivées

III) Variations d'une fonction

IV) Extrémum d'une fonction

Travaux pratiques : Problèmes d'optimisation

Avec l'outil informatique

Exercices et problèmes

Mathématiques et culture

I. Fonction dérivée

Activités de découverte

1. Un point mobile se déplace sur un axe $(O, \vec{i})$. Son abscisse est donnée en fonction du temps par la loi horaire : $X(t) = -3t^2 + 60t$.

On rappelle que la vitesse instantanée $V(t)$ du mobile à l'instant t est égale au nombre dérivé de X en t : $V(t) = X'(t)$.

1) Calculer $V(t)$ en fonction de t . Quelle est la vitesse instantanée initiale du mobile (à l'instant $t = 0$) ?

2) A quel instant t_0 , la vitesse instantanée s'annulera-t-elle ? Quelle est alors la position du mobile à cet instant ?

3) A quel instant t_1 , le mobile revient-t-il à sa position initiale ? Quelle est alors la vitesse instantanée du mobile à cet instant ?

► La fonction $V : t \mapsto X'(t)$ s'appelle fonction dérivée de la fonction $X : t \mapsto X(t)$. V se note par X' .

2. Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1) $f : x \mapsto -3x + 14$

2) $f : x \mapsto 5x^2 - 4x + 7$

3) $g : x \mapsto \frac{1}{x}$

4) $h : x \mapsto \sqrt{x}$

3. 1) Soit la fonction g définie sur $[5, +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{2x - 10}$

a. Montrer que g est dérivable sur l'intervalle $]5, +\infty[$ et calculer son nombre dérivé en un point x_0 de cet intervalle.

b. Expliciter la fonction dérivée de g .

2) Généralement soient a et b deux réels tels que $a > 0$ et la fonction définie sur $]-\frac{b}{a}, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{ax + b}$. Montrer que f est dérivable sur $]-\frac{b}{a}, +\infty[$ et déterminer sa fonction dérivée.

L'essentiel du cours

Fonction dérivée

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I (ou une réunion d'intervalles ouverts). La fonction dérivée (ou dérivée première ou tout simplement dérivée) de f , notée f' est la fonction de I dans $\mathbb{R}$ qui à tout réel x de I , associe le nombre dérivé de f en x : $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f'(x)$$

Dérivée de fonctions usuelles

Fonction	Ensemble de définition	Domaine de dérivabilité	Fonction dérivée
$f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ (a, b et c sont des réels donnés)	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f' : x \mapsto 2ax + b$
En particulier : $f : x \mapsto c$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f' : x \mapsto 0$
$f : x \mapsto x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f' : x \mapsto 1$
$f : x \mapsto ax + b$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f' : x \mapsto a$
$f : x \mapsto \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f' : x \mapsto -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{ax + b}$	$[-\frac{b}{a}, +\infty[$ si $a > 0$ $]-\infty, -\frac{b}{a}]$ si $a < 0$	$]-\frac{b}{a}, +\infty[$ si $a > 0$ $]-\infty, -\frac{b}{a}[$ si $a < 0$	$f' : x \mapsto \frac{a}{2\sqrt{ax + b}}$
En particulier $h : x \mapsto \sqrt{x}$	$[0, +\infty[$	$] 0, +\infty[$	$f' : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Auto évaluation

Préciser l'ensemble de dérivabilité de la fonction f puis déterminer sa fonction dérivée :

- $f : x \mapsto -3x + 10$;
 - $f : x \mapsto 5x^2 - 2x + 1$
 - $f : x \mapsto x\sqrt{3}$;
 - $f : x \mapsto 2 - \frac{x^2}{4}$
- $f : x \mapsto \sqrt{2x - 1}$;
 - $f : x \mapsto \sqrt{14 - 7x}$
 - $f : x \mapsto \sqrt{10}$;
 - $f : x \mapsto \sqrt{-5x}$

II. Opération sur les fonctions dérivées

Activités de découverte

1. On considère deux fonctions f et g définies et dérivables sur un intervalle ouvert I . On pose $h = f + g$ et $k = \lambda f$

1) Soit x_0 un élément de I .

a. Montrer en utilisant la définition que h est dérivable en x_0 et déterminer $h'(x_0)$ en fonction de $f'(x_0)$ et $g'(x_0)$

b. Montrer en utilisant la définition que k est dérivable en x_0 et déterminer $k'(x_0)$ en fonction de λ et $f'(x_0)$

c. En déduire que h et k sont dérivables sur I et exprimer h' et k' en fonction de f' et g'

2) Utiliser 1) pour montrer que

a. La fonction $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto -7x^2 + \frac{3}{4}x + \sqrt{x} - 5$$

est dérivable sur $]0, +\infty[$ et déterminer sa fonction dérivée.

b. La fonction $K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{-2}{9x}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et déterminer sa fonction dérivée.

► D'une façon générale, on montre que si $f_1, f_2 \dots f_n$ sont des fonctions dérivables sur un intervalle I , alors la fonction $f_1 + f_2 + \dots + f_n$ est dérivable sur I et on a :

$$(f_1 + f_2 + \dots + f_n)' = f_1' + f_2' + \dots + f_n'$$

2. On considère deux fonctions f et g définies et dérivables sur un intervalle ouvert I . On pose $h = f \times g$

1) Soit x_0 un élément de I .

a. Vérifier que pour tout réel x_0 de I , on a :

$$h(x) - h(x_0) = (f(x) - f(x_0))g(x) + (g(x) - g(x_0))f(x_0)$$

puis montrer que h est dérivable en x_0 et déterminer $h'(x_0)$ en fonction de $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $g(x_0)$ et $g'(x_0)$

b. En déduire que h est dérivable sur I et exprimer h' en fonction de f , f' , g et g' .

2) Déduire la fonction dérivée de la fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto (7x^2 + 1)\left(\frac{2}{7}x - 5\right)$$

3. Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I . On note f^2 la fonction $f \circ f$.
1) Montrer que f^2 est dérivable sur I et donner l'expression de sa fonction dérivée $(f^2)'$ en fonction de f et f' . (utiliser les résultats de l'activité 2)

2) Appliquer le résultat précédent pour déduire la fonction dérivée de la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto (5x-11)^2$$

3) Montrer que les fonctions f^3 et f^4 sont dérivables sur I et qu'on a :

$$(f^3)' = 3f' \circ f^2 \quad \text{et} \quad (f^4)' = 4f' \circ f^3$$

► on montre d'une façon générale que si $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ alors la fonction

$$f^n = f \circ f \circ \dots \circ f \quad (n \text{ facteurs}) \text{ est dérivable sur } I \text{ et on a : } (f^n)' = n f' \circ f^{n-1}$$

Conséquence :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$. La fonction f^n ($n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$) est définie sur $\mathbb{R}$ par $f^n(x) = x^n$

Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors f^n est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$(f^n)'(x) = n f'(x) \circ f^{n-1}(x) = n.1 \cdot x^{n-1} = n x^{n-1} \text{ ce que l'on peut noter par :}$$

$$(x^n)' = n x^{n-1}$$

4. On considère la fonction polynôme P définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x) = 7x^4 - x^3 - 10x^2 + x - \sqrt{5}$$

Utiliser les résultats des activités 1 et 3 pour montrer que P est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée.

► D'une façon générale, on montre que si P_n est la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \text{ alors } P_n \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et sa fonction dérivée } P'_n \text{ est définie par :}$$

$$P'_n(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2a_2 x + a_1$$

5. On considère la fonction polynôme P définie sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = 4x^3 - x^2 + \frac{2}{3}x - 13$

1) Déterminer la fonction dérivée P' de la fonction P . Quelle est la nature de P' ?

2) Déterminer la fonction dérivée $P'' = (P')'$ de la fonction P' (P'' s'appelle fonction dérivée seconde de P)

3) Vérifier que la fonction dérivée $(P'')'$ de la fonction P'' est une fonction constante ((P'') ' est notée $P^{(3)}$ et s'appelle dérivée d'ordre 3 de P)

Opérations sur les fonctions dérivables :

- Dérivée de la somme de deux fonctions :

Théorème : Si f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I , alors $f + g$ est dérivable sur I et on a : $(f+g)' = f' + g'$

- Dérivée du produit de deux fonctions :

Théorème : Si f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I , alors $f.g$ est dérivable sur I et on a : $(f.g)' = f'.g + f.g'$

En particulier si α est une constante, alors $(\alpha f)' = \alpha f'$

- Dérivée du quotient de deux fonctions :

Théorème : Si f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que pour tout réel x de I , $g(x) \neq 0$, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont dérivables sur I et on a

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'.g - f.g'}{g^2}$$

- Dérivée de la puissance d'une fonction :

Théorème : Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I et n un entier relatif.

1) Si $n \in \mathbb{N}^*$ alors f^n est dérivable sur I .

2) Si $n < 0$ et si f ne s'annule pas sur I , alors f^n est dérivable sur I et on a dans les deux cas : $(f^n)' = n f' f^{n-1}$

- Dérivée d'une fonction polynôme :

Si P est la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \text{ alors } P \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}.$$

Sa fonction dérivée P' est définie par :

$$P'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2a_2 x + a_1$$

- Dérivabilité d'une fonction rationnelle :

Une fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition. Sa dérivée s'obtient à l'aide des règles précédentes (dérivée du quotient de deux fonctions et dérivée d'une fonction polynôme)

Auto évaluation

Préciser l'ensemble de dérivabilité de la fonction f puis déterminer sa fonction dérivée :

1. a. $f : x \mapsto x^2 - \frac{5}{2}x + 1$; b. $f : x \mapsto \frac{x^3}{3} - x^2 + \sqrt{5}$

c. $f : x \mapsto 2 + \frac{x}{2} - \frac{2}{x}$; d. $f : x \mapsto x\sqrt{3} + \frac{8}{x} - \frac{1}{4}$

2. a. $f : x \mapsto (x^2 - 2)(x + 1)$; b. $f : x \mapsto \sqrt{2}(x - x^2)^3$
c. $f : x \mapsto \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x}\right)\sqrt{x}$; d. $f : x \mapsto \left(x + \frac{1}{2}\right)^2(x - 4)$

3. a. $f : x \mapsto \frac{3x - 1}{x + 2}$; b. $f : x \mapsto x\sqrt{6} - \frac{6}{\sqrt{x}}$
c. $f : x \mapsto \frac{1}{1 - \sqrt{x}}$; d. $f : x \mapsto \frac{x}{(2x - 3)^2}$

4. a. $f : x \mapsto \left(\frac{x - 1}{x + 2}\right)^2$; b. $f : x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{1 - x}$
c. $f : x \mapsto (x^2 - 1)^2 + (x^2 - 1)^{-2}$; d. $f : x \mapsto x\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{10}$

5. a. $f : x \mapsto |x| (7 - x)$; b. $f : x \mapsto |x - 4| |2x + 1|$
c. $f : x \mapsto \left|\frac{1}{2} - \sqrt{x}\right|$; d. $f : x \mapsto 2x^3 - |1 - x^3|$

III. Variations d'une fonction

Activités de découverte

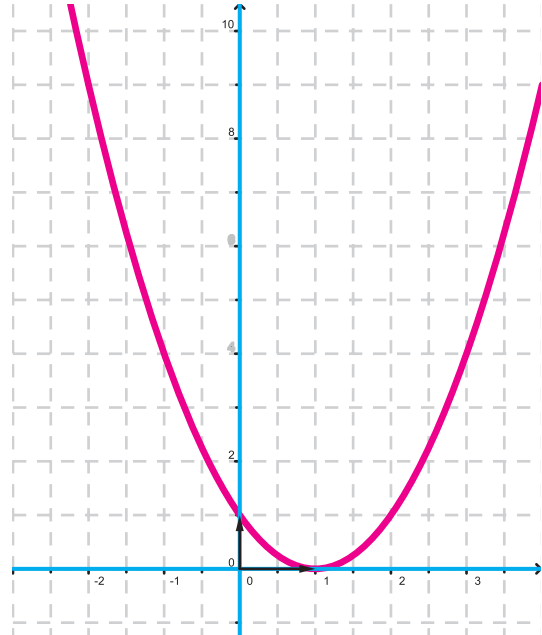
1. La courbe ci-contre est celle de la fonction :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto (x - 1)^2$$

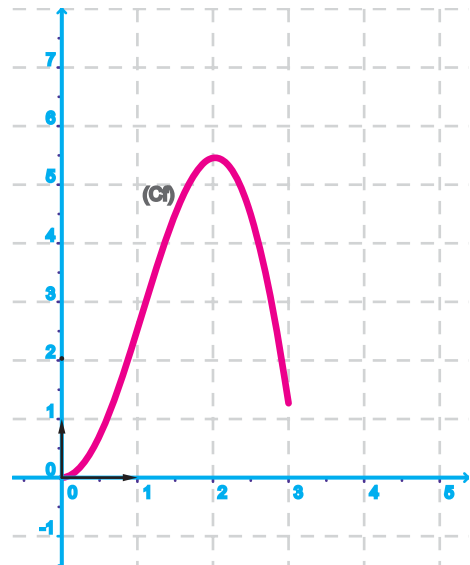
Compléter le tableau suivant :

Intervalle	signe de $f(x)$	Sens de variation de f	Signe de $f'(x)$
$]-\infty, 1]$			
$[1, +\infty[$			



2. Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $[0, 3]$ et représentée graphiquement par la figure ci-contre :

- 1) Déterminer le sens de variation de f .
- 2) Déterminer graphiquement les ensembles des abscisses des points de la courbe pour lesquels :
 - a. Le coefficient directeur de la tangente en M est positif.
 - b. Le coefficient directeur de la tangente en M est négatif.
- 3) Dédire le signe de f' sur chacun des intervalles $]0, 2[$ et $]2, 3[$
- 4) Que peut-on conjecturer sur le lien entre le sens de variation de f et le signe de $f'(x)$?



3. Déterminer le sens de variation de chacune des fonctions suivantes (utiliser la définition ou le taux d'accroissement) et dresser le tableau de variation correspondant.

a. $f : x \mapsto 4x - 1$

b. $f : x \mapsto -\frac{3}{4}x + 5$

c. $f : x \mapsto x^2 - 1$

d. $f : x \mapsto -(x + 7)^2$

e. $f : x \mapsto \frac{1}{x}$

2) Calculer la dérivée de chacune de ces fonctions et étudier le signe de $f'(x)$

3) Trouver alors, dans chaque cas le lien entre le sens de variation de f et le signe de $f'(x)$.

4. Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{1-x}$

- 1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et que sa dérivée est positive sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$
- 2) f est-elle croissante sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$? (justifier votre réponse)

5. 1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b , et c sont trois réels donnés. On suppose que la dérivée f' de f est nulle sur $\mathbb{R}$. Montrer alors que f est une fonction constante

2) Soient a, b et c des réels tels que $a \neq 0$. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $I =]-c, +\infty[$ par $f(x) = \frac{ax + b}{x + c}$.

a. Déterminer la dérivée f' de f sur I .

b. On suppose que f' est nulle sur I . Montrer alors que f est une fonction constante sur I (vérifier que pour tout x élément de I on a $f(x) = a$)

6. Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{x}{|x|}$

- 1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que sa dérivée est nulle sur $\mathbb{R}^*$
- 2) f est-elle constante sur $\mathbb{R}^*$?

L'essentiel du cours

Dérivée et sens de variations d'une fonction

Théorème (admis) :

Soit f une fonction dérivable sur **un intervalle** I et de fonction dérivée f' .

- f' est nulle sur I , si et seulement si, f est constante sur I .
- f' est positive sur I , si et seulement si, f est croissante sur I .
- f' est négative sur I , si et seulement si, f est décroissante sur I .

Remarque :

L'hypothèse I est un intervalle est essentielle (voir activités 4 et 6)

Auto évaluation

1. (Q.C.M.) Trouver la (ou les) réponse(s) exacte(s) :

1) f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$. On a $f'(x) = 3(x-1)^2$.

- a. f est croissante sur $\mathbb{R}$
- b. f est décroissante sur $\mathbb{R}$
- c. On ne peut pas conclure

2) f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - x^2$.

a. f est croissante sur $[-1, 1]$

b. f est décroissante sur $[-1, 1]$

c. On ne peut pas conclure

3) f est définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x} - x$. Alors, f est décroissante sur :

a. $\mathbb{R}^*$

b. $]0, +\infty[$

c. $] -\infty, 0[$

4) f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + x^5$. Alors, f est croissante sur :

a. $\mathbb{R}^*$

b. $\mathbb{R}^+$

c. $\mathbb{R}$

2. Déterminer le domaine de définition et étudier le sens de variation de f dans chacun des cas suivants :

1) $f: x \mapsto 1 - x - \frac{1}{4}x^2$

2) $f: x \mapsto 3x - x^3$

3) $f: x \mapsto 2x^3 + x - 7$

4) $f: x \mapsto \frac{-3}{x-2}$

3. On donne la courbe représentative de la dérivée f' d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.

1) Que peut-on dire de f sur $]-\infty, a]$?

2) Déterminer le sens de variations de f sur $[a, b]$ puis sur $[b, +\infty[$

3) Comparer (par l'un des signes " $<$ ", " $>$ " ou " $=$ ") en justifiant votre réponse :

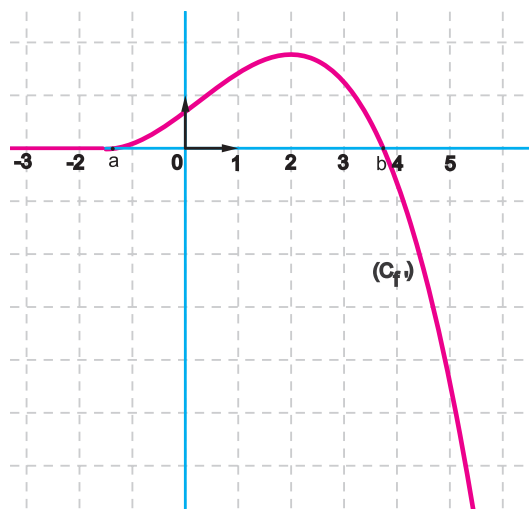
a. $f(-3)$ et $f(-2)$

b. $f(0)$ et $f(1)$

c. $f(2)$ et $f(3)$

d. $f(4)$ et $f(5)$

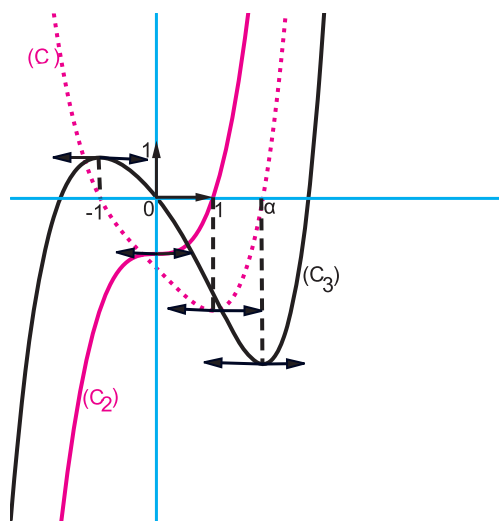
4) Peut-on comparer $f(3)$ et $f(5)$?



4. La fonction f , sa dérivée f' et sa dérivée seconde f'' sont représentées graphiquement sur la figure ci-contre ($\alpha = 1,8$).

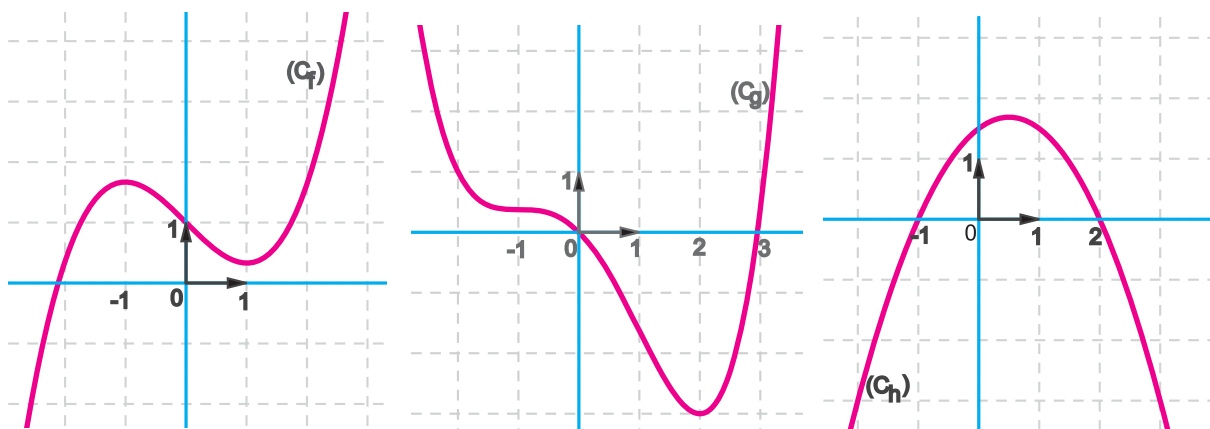
1) Akram affirme que (C_1) est la courbe de f' et (C_2) est la courbe de f'' , alors que (C_3) est la courbe de f . Akram a-t-il raison ? Expliquer. (on pourra déterminer d'abord le sens de variation de chacune des fonctions associées aux courbes tracées)

2) Dresser le tableau de variation de chacune des fonctions f et f' .

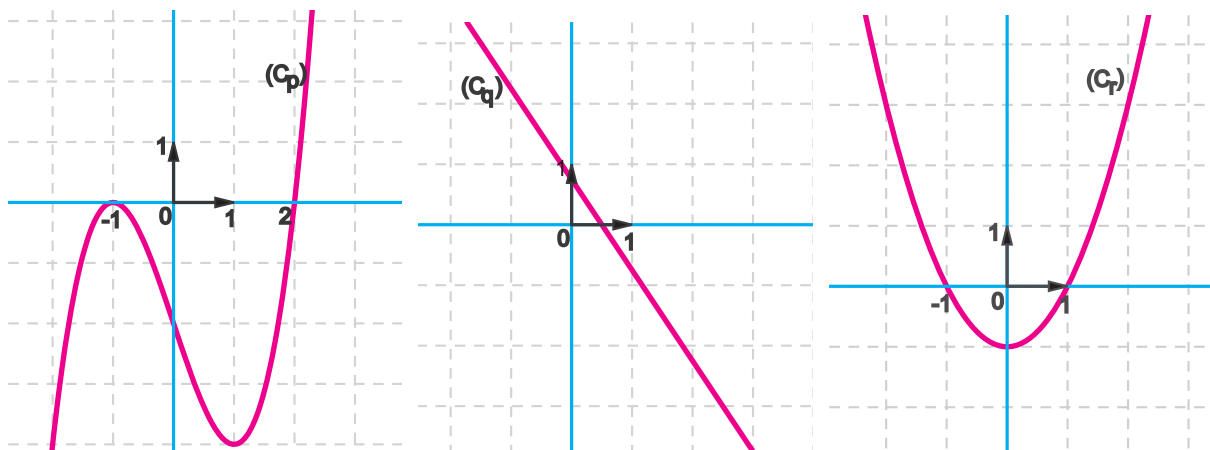


5. Les courbes suivantes représentent trois fonctions f , g et h et leurs fonctions dérivées p , q et r (dans un ordre aléatoire). Faire correspondre à chaque fonction, sa dérivée.

Les fonctions



Les dérivées



IV. Extrémums d'une fonction

Activités préliminaires

1. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

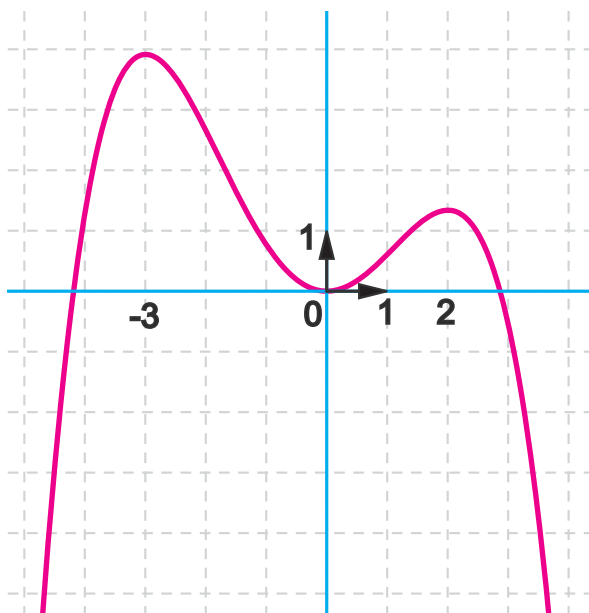
$$x \mapsto x^3 - 3x$$

- 1) a. Vérifier que $f(x) - 2 = (x+1)^2(x-2)$. Déduire que pour tout $x \in]-\infty, 2]$, on a $f(x) \leq 2$
 b. Montrer alors que f admet un maximum local au point -1 .
- 2) a. Montrer que f est impaire.
 b. Déduire que f admet un minimum local au point 1 .

2. f est la fonction représentée sur la figure ci-contre.

a. En quel(s) point(s) f admet-elle un extremum local ? (préciser sa nature)

b. En quel(s) point(s) f admet-elle un extremum global ? (préciser sa nature).



Activités de découverte

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

1) a. Montrer que pour tout $x < 0$, $f(x) - f(1) \leq 0$.

b. Montrer que pour tout $x > 0$, $f(x) - f(-1) \geq 0$.

c. En déduire que f admet deux extremums locaux respectivement en deux points a et b qu'on déterminera.

2) a. Vérifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée f' .

b. Calculer $f'(a)$ et $f'(b)$

4. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x(x-1)^2$$

1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

2) a. Vérifier que $f'(x) = (x-1)(3x-1)$. Déduire que f' s'annule et change de signe respectivement en 1 et en $\frac{1}{3}$.

b. Déterminer le sens de variation de f .

3) Prouver que :

a. pour tout $x \in]-\infty, 1]$, $f(x) < f(\frac{1}{3})$

b. pour tout $x \in]\frac{1}{3}, +\infty]$, $f(x) > f(1)$

c. En déduire que f admet deux extremums locaux qu'on déterminera.

5. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)^3$.

1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

- 2) Vérifier que f' s'annule en un point α qu'on déterminera.
- 3) Préciser le sens de variation de f .
- 4) f admet-elle un extremum local en α ?

L'essentiel du cours

Dérivée et extrema d'une fonction

Théorème 1 (admis) :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et x_0 un élément de I .

Si f admet en x_0 un extremum local, alors $f'(x_0) = 0$

Théorème 2 (admis)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 un élément de I .

Si f' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors f admet en x_0 un extremum local

x	x_0
$f'(x)$	+ 0 -
$f(x)$	
$f(x_0)$ est un maximum local de f	

x	x_0
$f'(x)$	- 0 +
$f(x)$	
$f(x_0)$ est un minimum local de f	

1- Si la dérivée f' s'annule et ne change pas de signe en x_0 , alors f n'admet pas d'extremum local en x_0 . (Exemple : $f : x \mapsto x^3$)

2- Une fonction non dérivable en un point peut avoir un extremum en ce point.

(Exemple : la fonction $f : x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0, mais admet un minimum en ce point)

Auto évaluation

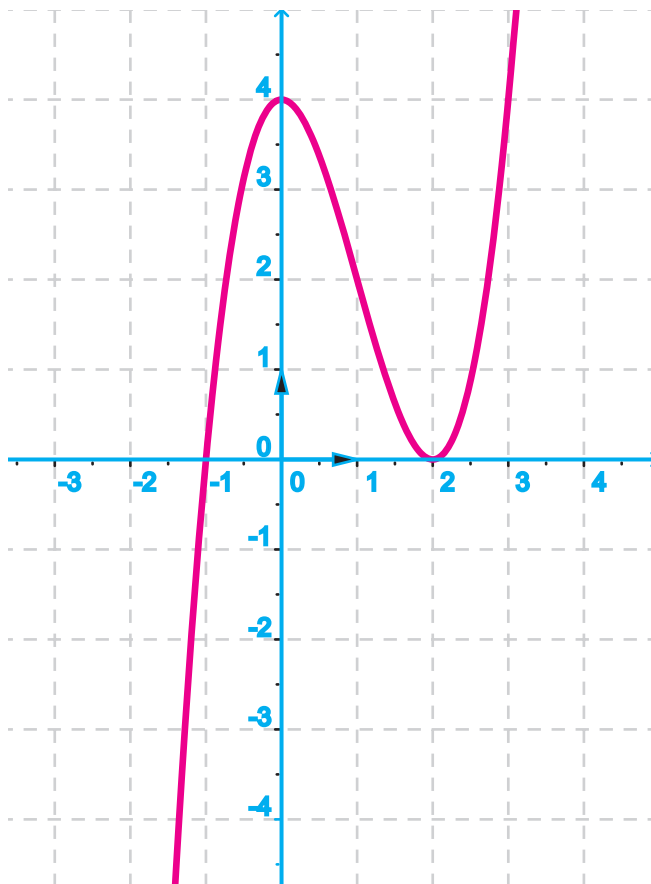
1. Répondre Par Vrai ou Faux :

- 1) Tout maximum global est aussi un maximum local.
- 2) Tout maximum local est aussi un maximum global.
- 3) Une fonction peut avoir deux maximums globaux distincts.
- 4) Une fonction peut avoir deux maximums locaux distincts.

2. La courbe ci-contre est la représentation graphique de la fonction dérivée f' d'une fonction f .

- 1) Déterminer le signe de f' .
- 2) f admet-elle un extremum en :
 - a. $x_0 = 0$?
 - b. $x_1 = 1$?
 - c. $x_2 = 2$?
 - d. $x_3 = -1$?

(on précisera éventuellement la nature de ces extremums et on justifiera toutes les réponses données)



3. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + \frac{1}{8}$

- 1) Etudier la dérivabilité de f et dresser son tableau de variation.
- 2) Vérifier que f admet un extremum global qu'on déterminera.
- 3) Dédire le signe de f sur $\mathbb{R}$.

4. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x^3 - 3x + 2$$

- 1) Dresser le tableau de variation de f .
- 2) Déterminer les extremums de f .
- 3) Calculer $f(-2)$, puis déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .

PROBLEMES D'OPTIMISATION

TP1 Une caisse cubique d'arête $r = 80$ cm est posée contre un mur. On monte à cet endroit, contre le mur, une échelle de longueur $L = 2,5$ m. L'échelle est en contact avec une arête horizontale supérieure de la caisse. On veut, alors, connaître la hauteur maximale h atteinte le long du mur (figure 1)

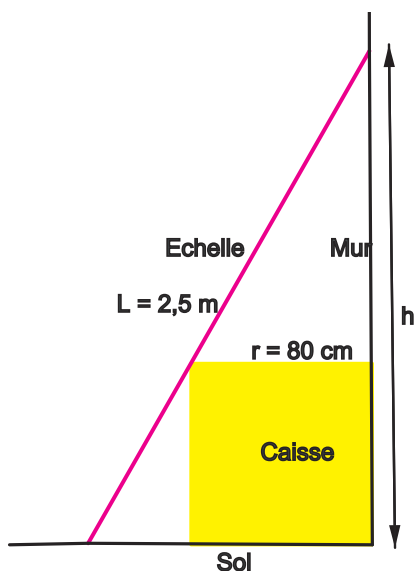


Figure 1

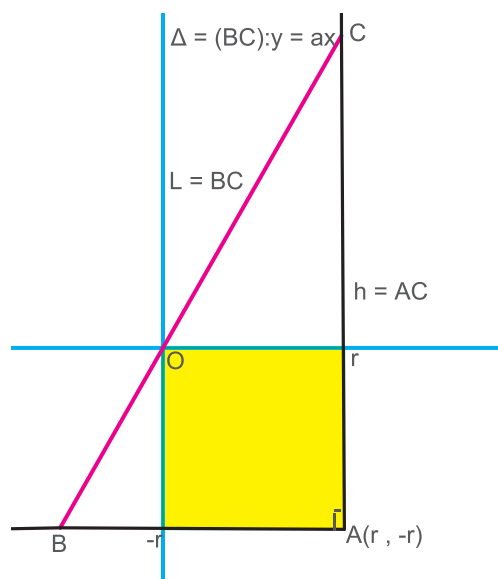


Figure 2

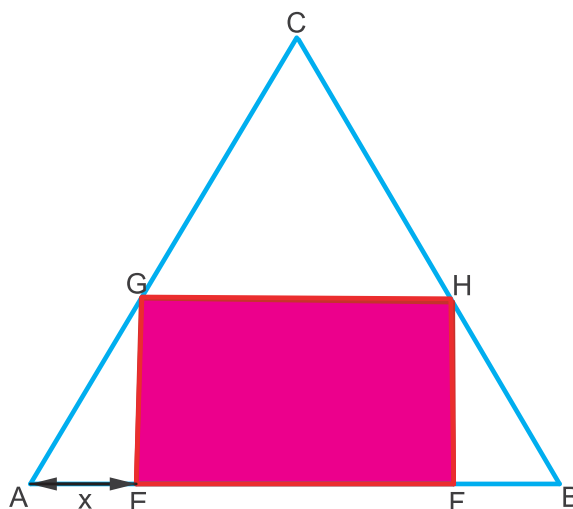
On propose d'adopter la démarche suivante :

On modélise la situation présentée par la figure 2 en remarquant que les points O et A, et la distance BC sont fixes. On considère, alors, un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Déterminer la valeur maximale de h , revient à trouver la position de la droite $\Delta = (BC)$ dans ce cas. Comme Δ passe par le point fixe O, il suffit de trouver la valeur de son coefficient directeur a pour laquelle h est maximum.

- 1) Exprimer les coordonnées du point B en fonction de a et r
- 2) Montrer que $h^2 = L^2 - r^2 - \frac{2r^2}{a} + \frac{r^2}{a^2}$
- 3) Soit la fonction $f: a \mapsto f(a) = L^2 - r^2 - \frac{2r^2}{a} + \frac{r^2}{a^2}$ ($a > 0$). Etudier les variations de f
- 4) Donner alors la valeur maximale de la hauteur h (arrondir le résultat numérique à 1cm près)

TP2 Une personne possède un terrain qui a la forme d'un triangle équilatéral ABC de 100m de côté. Son côté [AB] est situé sur une rue principale. On veut construire sur ce terrain une maison de forme rectangulaire EFHG, dont la façade est sur le côté [AB] et telle que sa surface soit maximale (figure ci-contre).



On propose alors la démarche suivante :

1) Soient $x = AE$ et $S(x)$ l'aire du rectangle EFGH

a. Justifier l'égalité $AE = BF$.

b. Montrer que $S(x) = \sqrt{3}(100 - 2x)x$.

2) Etudier les variations de la fonction :

$$x \mapsto S(x).$$

3) Dédire les dimensions de la maison pour lesquelles la surface est maximale.

Polynôme nul

TP3 On se propose d'utiliser la dérivation pour montrer que si le polynôme $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ est nul (c'est-à-dire pour tout réel x , on a, $P(x) = 0$), alors $a = b = c = d = 0$

1) Montrer que $d = 0$

2) Déterminer la fonction P' . Dédire que $c = 0$

3) Déterminer la fonction P'' . Dédire que $b = 0$

4) Montrer de façon analogue que $a = 0$

► On montre d'une façon générale que :

- Le polynôme $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ est nul (c'est-à-dire pour tout réel x , $P_n(x) = 0$) si et seulement si $a_n = a_{n-1} = \dots = a_1 = a_0 = 0$
- Deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont identiques

TP4 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{50}$ (1)

1) Calculer $f(1)$.

2) a. Trouver une 2ème expression de $f(x)$ pour $x \neq 1$: On la désignera par (2).

b. En déduire la valeur de la somme: $S = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{50}$

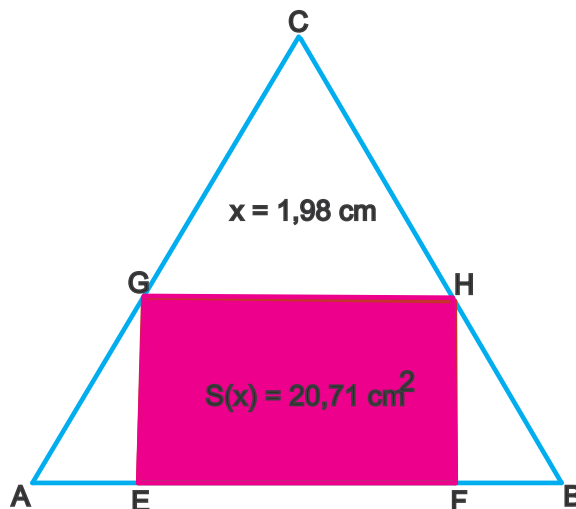
3) a. Calculer $f'(x)$ à partir de l'expression (1).

b. Calculer $f'(x)$ à partir de l'expression (2) pour $x \neq 1$. En déduire la valeur de la somme : $T = 1 + 2 \times 2 + 3 \times 2^2 + 4 \times 2^3 + \dots + 50 \times 2^{49}$

1 On propose de traiter le TP2 à l'aide d'un logiciel de géométrie

Rappel de l'énoncé :

Une personne possède un terrain qui a la forme d'un triangle équilatéral ABC de 100m de côté. Son côté [AB] est situé sur une rue principale. On veut construire sur ce terrain une maison de forme rectangulaire EFGH, dont la façade est sur le côté [AB] et telle que sa surface soit maximale.



1) En prenant comme échelle 1/1000 et en utilisant le logiciel Cabri Géomètre II plus, par exemple, faire une construction géométrique correspondant à la situation présentée et faisant apparaître la longueur x du segment [AE] et l'aire $S(x)$ du rectangle EFGH

2) En faisant varier la position du point E sur le segment [AB] trouver une valeur approchée de x pour laquelle $S(x)$ est maximale.

3) Comparer le résultat trouvé avec la valeur exacte obtenue aux TP2

2 **Signe d'une expression**

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x - 1$. On propose d'étudier le signe de $g(x)$ à l'aide d'un grapheur et du tableur Excel selon la démarche suivante :

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^2 - x$

Vérifier que g est la fonction dérivée de f .

2) Utiliser un grapheur pour tracer (C_f) courbe représentative de f .

3) Utiliser cette courbe pour vérifier que f possède trois extremums qu'on désignera par x_1 , x_2 et x_3 . ($x_1 < x_2 < x_3$) et pour donner un encadrement d'amplitude 0.5 pour chacun d'eux.

4) Utiliser le logiciel EXCEL pour trouver une valeur approchée à 2 chiffres décimaux pour chacun des réels x_1 , x_2 et x_3 .

5) Dresser le tableau de signes de g .

3 Dérivée p-ème d'une fonction polynôme

Le programme suivant permet de déterminer la dérivée d'ordre p d'un polynôme donné écrit en langage Turbo Pascal

```
Program Derivee_peme;
uses wincrt;
var n,p,w,i,k, m: integer;
    coef:array[1..20] of real;
Begin
Write(' entrez le degré n = ');
Readln(n);
Write(' entrez l'ordre de la dérivée est p = ');
Readln(p);
For i:= 1 to n+1 do
Begin
Write(' entrez le coefficient coef[' ,i,'] = ');
Readln (coef[i]);
End;
w:=0;
if p>n then
Begin
Writeln('f^(p)(x) = 0');
end
else
begin
For k:= 1 to p do
begin
w:= w+1;
For i:= 1 to n+1 do
Begin
coef[i] := coef[i]*(i-w);
end;
end;
Write ('f^(p)(x)=' ,coef[p+1]:2:2);
For i:=p+2 to n+1 do
Begin
if coef[i] <>0 then
write( ' + ', coef[i]:2:2, '*x^',i-p-1);
end;
end;
End.
```

Application :

Déterminer la dérivée 3^{ème} de la fonction h définie sur IR par :

$$h(x) = 2x^5 - 3x^4 - 5x^2 + 2x - 8$$

Exercices et problèmes

1 Pour chacune des fonctions proposées ci-dessous déterminer l'ensemble de dérivabilité et la fonction dérivée

1) $f(x) = 2x(x^3 - x^2 + 2)$

$$l(x) = \frac{x^2 - 1}{1 - \sqrt{x}}$$

2) $g(x) = x^2 \sqrt{x}$

$$k(x) = (1 - 2x)^5$$

3) $h(x) = \frac{2x + 1}{2 - x}$

$$m(x) = \frac{(3x + 1)^3}{1 - x}$$

2 Pour chacune des fonctions suivantes :

- Donner le domaine de définition
- Déterminer l'ensemble de dérivabilité et calculer sa dérivée.
- Etudier les sens de variation.

1) $f: x \mapsto 1 - x^2 + \frac{1}{3}x^3$

2) $f: x \mapsto \frac{1}{x^2 - 1}$

3) $f: x \mapsto \frac{x^2 + 1}{x - 1}$

4) $f: x \mapsto x - \sqrt{x}$

3 Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1) On suppose que f est paire. On veut montrer que f' est impaire.

Soit alors $x_0 \in \mathbb{R}$, en utilisant l'égalité $f'(-x_0) = \lim_{x \rightarrow -x_0} \frac{f(x) - f(-x_0)}{x - (-x_0)}$

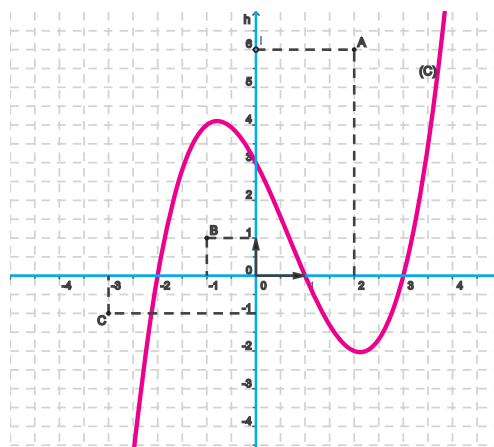
et en posant $t = -x$, montrer $f'(-x_0) = -f'(x_0)$ et conclure.

2) Montrer de façon analogue que si f est impaire alors f' est paire.

3) Vérifier les résultats précédents sur des exemples.

4 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la fonction dérivée est représentée graphiquement sur la figure ci-contre par sa courbe (C)

- Donner le sens de variations de f .
- Conjecturer l'allure de la courbe représentative de f , sachant qu'elle passe par les points A, B et C.

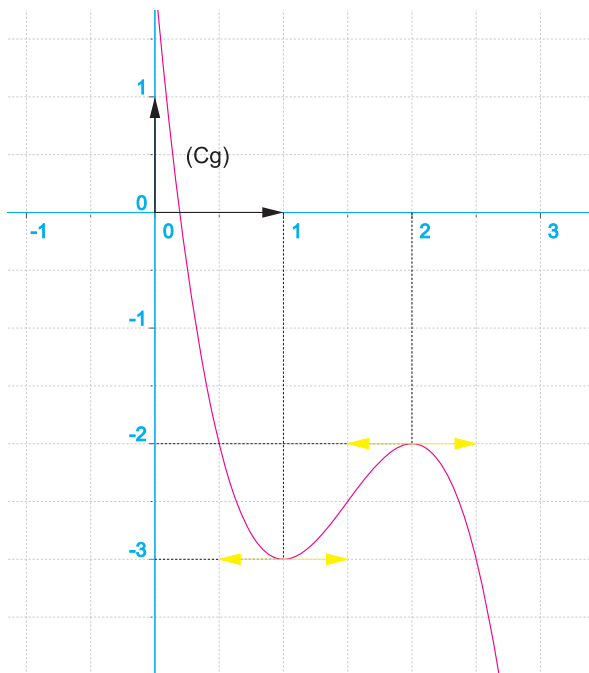
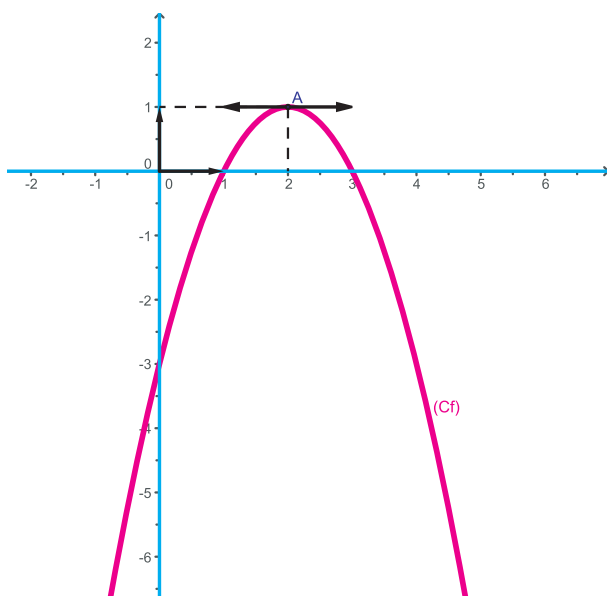


5 Les courbes représentées dans les figures 1 et 2 ci-dessous sont respectivement celles de deux fonctions f et g .

1) Donner le tableau de signe de f .

2) Donner le tableau de variations de g .

3) f peut-elle être la fonction dérivée de g ? Justifier . (On fournira le maximum possible d'arguments).



6 Soit $f : x \mapsto ax^3 + ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont trois réels.

(C) est la courbe représentative de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer les réels a, b et c sachant que :

a. (C) admet au point A d'abscisse 0 une tangente T d'équation $y = -5x + 1$

b. f admet un extremum en 1.

2) Etudier les variations de la fonction obtenue.

7 Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x + 1}$ où a, b et c sont des réels. (C) désignera la courbe de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Calculer $f'(x)$.

2) Déterminer a, b et c sachant que :

a. f admet en 0 un extremum égal à 1.

b. La courbe (C) passe par le point A(-2, -3).

Pour la suite, on prendra $a = b = c = 1$.

3) a. Dresser le tableau de variations de f .

b. En utilisant les variations de f comparer : $\frac{1 + 2005 \times 2006}{2006}$ et $\frac{1 + 2006 \times 2007}{2007}$

8Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

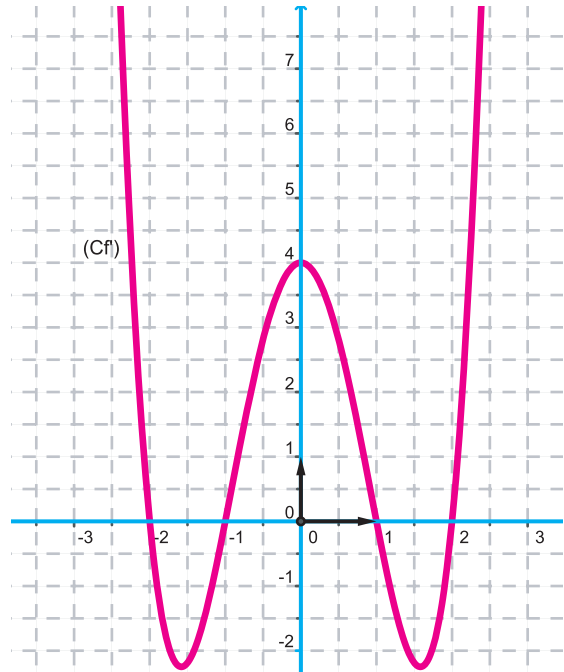
$$x \mapsto f(x) = x^2 - 2|x| + 3$$

- 1) Etudier la dérivabilité de f en 0.
- 2) Déterminer la fonction dérivée de f
- 3) a. Dresser le tableau de variations de f .
b. En déduire que pour tout réel x , on a $f(x) \geq 2$.

9

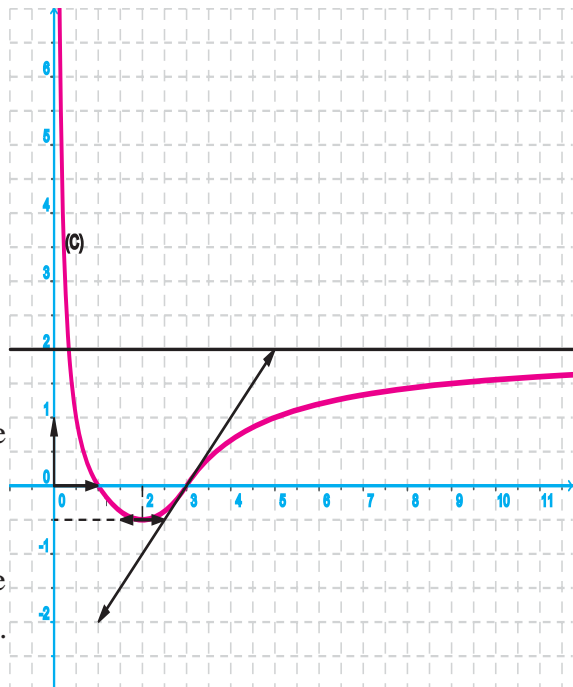
Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. La courbe (C_f) ci-contre est celle de sa fonction dérivée f'

- 1) a. Déterminer le nombre d'extremum de f .
(justifier votre réponse)
b. Préciser la nature de chaque extremum.
- 2) Dresser le tableau de variation de f .
- 3) On suppose que la courbe (C_f) de f passe par le point $A(0, 1)$. Donner une équation de la tangente T à (C_f) au point A
- 4) Soit m un nombre réel. Discuter suivant les valeurs de m le nombre des tangentes à (C_f) de coefficient directeur m .

**10**

La courbe ci-contre représente une fonction f définie et dérivable sur $]0, +\infty[$.

- 1) a. Déterminer :
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$
 b. Calculer $f'(2)$ et $f'(3)$.
 c. Résoudre les inéquations :
 (I) : $f(x) < 0$ et (II) : $f'(x) < 0$.
- 2) On suppose que f est la fonction dérivée d'une fonction F .
 a. Donner le sens de variations de F .
 b. Conjecturer l'allure de (C_F) sachant qu'elle passe par les points $A(\frac{1}{2}, 1)$, $B(2, 0)$ et $C(3, -\frac{1}{2})$.



11 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$ (a, b et c sont des réels). Le tableau ci-dessous est celui des variations de f

x	$-\infty$	-3	-2	-1	$+\infty$
$f'(x)$	0			0	
$f(x)$	$-\infty \nearrow -6 \searrow -\infty$			$+\infty \searrow -2 \nearrow +\infty$	

Compléter le tableau de variations de f

- 2) a. Déterminer $f'(x)$ en fonction de a, b et c (f' étant la fonction dérivée de f).
- b. Calculer les réels a, b et c .
- 3) Utiliser ce tableau, pour discuter -suivant les valeurs du réel m – le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $f(x) = m$.

12 La hauteur (en mètres) atteinte par un ballon lancé en l'air à un instant donné t (en secondes) est : $h(t) = -t^2 + 6t + 2$.

- 1) a. A quels instants, le ballon atteint-il la hauteur $h(t) = 7m$? (on vérifiera que $-t^2 + 6t - 5 = (1-t)(t-5)$)

b. Déterminer en secondes, la période pendant laquelle la hauteur atteinte par le ballon est supérieure à $7m$?

2) Déterminer la hauteur maximale atteinte par ce ballon ainsi que l'instant t au bout duquel il l'atteint.

13 Soit $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan et P la parabole d'équation : $y = 1 - x^2$. La tangente T à P au point $M_0(x_0, y_0)$ où $x_0 > 0$ coupe l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées respectivement en A et B .

1) Faire une figure.

2) Montrer que $A\left(\frac{x_0^2+1}{2x_0}, 0\right)$ et $B(0, x_0^2+1)$.

3) Montrer que l'aire du triangle OAB est $g(x_0) = \frac{(x_0^2+1)^2}{4x_0}$.

5) Déterminer alors x_0 pour que l'aire du triangle OAB soit minimale.

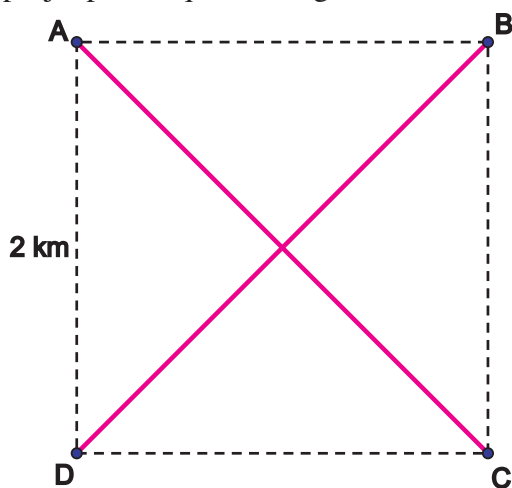
14 ζ étant la parabole d'équation $y = x^2$, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Soit un point M de ζ d'abscisse x et $A(0, 1)$. Calculer AM^2 en fonction de x .
- 2) Trouver les points de ζ qui sont les plus proches du point A

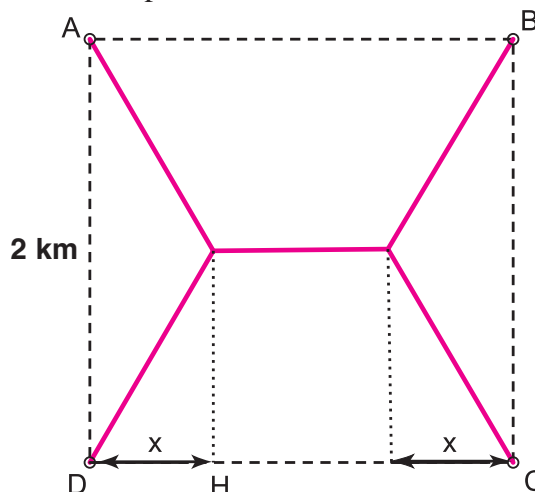
15 Un producteur de pommes veut faire procéder à la cueillette de sa récolte par une équipe qui ne peut travailler qu'une seule journée.

Au bout du mois d'octobre le prix est de 800D la tonne mais ce prix diminue de 10D par jour. Quel jour doit-il vendre sa récolte sachant que la production augmente d'une tonne par jour et qu'il estime la production initiale (à la fin du mois d'octobre) à 60t

16 Quatre maisons dans une campagne sont situées aux sommets d'un carré de côté 2 km. On veut construire des chemins entre ces maisons en choisissant (pour une raison de coût) le projet pour lequel la longueur totale des chemins est la plus courte.



PROJET n°1



PROJET n°2

La question posée est alors : peut-on trouver une valeur de x pour laquelle le 2^{ème} projet est moins coûteux. On propose alors la stratégie de résolution suivante:

- 1) Calculer la longueur totale L_1 des chemins selon le premier projet.
- 2) Montrer que la longueur totale L_2 des chemins selon le deuxième projet est

$$L_2 = 2 - 2x + 4\sqrt{1+x^2}$$

3) a. Soit la fonction $u : x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ Montrer que u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x on a $u'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

b. Calculer alors la dérivée de la fonction $f : x \mapsto 2 - 2x + 4\sqrt{1+x^2}$

c. Déterminer le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $I = [0, 1]$ et montrer qu'il existe x_0 appartenant à I tel que $f(x_0)$ soit un minimum absolu de f sur I

4) Calculer L_2 pour $x = x_0$ et comparer dans ce cas L_1 et L_2

5) On suppose que $x = x_0$.

a. Soit α l'angle $\widehat{DMH}$ ($\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$). Calculer $\tan \alpha$ et déduire α

b. Calculer alors les angles $\widehat{DMN}$, $\widehat{AMN}$ et $\widehat{AMD}$

Commentaire :

C'est, donc, en prenant les angles égaux à 120° aux points M et N que l'on obtiendra la meilleure rentabilité. C'est exactement cette règle qu'utilisent instinctivement les abeilles pour construire leurs alvéoles, en leur donnant la forme d'hexagone régulier.

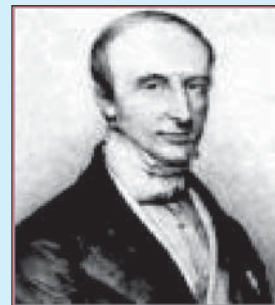
- **APERCU HISTORIQUE :**

Newton (mathématicien, physicien et astronome anglais :

1642 – 1727) et Leibniz (philosophe et mathématicien allemand: 1646-1716) sont deux grands noms attachés au calcul différentiel: calcul sur les dérivées.

Newton a résolu des problèmes de trajectoire, de vitesse et de tangentes. Il appelle les dérivées : fluxions. Leibniz utilise la notation différentielle : $\frac{dy}{dx}$ pour désigner la dérivée de la fonction $f : x \mapsto y$.

Le calcul différentiel et intégral –à peine né – est utilisé abondamment dans la pratique. Mais il faut attendre les travaux de Cauchy (mathématicien français : 1789 – 1857 fondateur de la notion de limite.) pour avoir une construction mathématique satisfaisante du calcul différentiel et intégral.



Augustin CAUCHY

PLAN DU CHAPITRE

- I) Fonctions affines, fonctions affines par intervalles
- II) Fonctions trinômes du second degré
- III) Fonctions polynômes du troisième degré
- IV) Fonctions polynômes du quatrième degré bicarrées

Travaux pratiques

Avec l'outil informatique

Exercices et problèmes

Mathématiques et culture

I. Fonctions affines, fonctions affines par intervalles

Activités préliminaires

1. On considère, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, deux droites $D: y = ax+b$ et

$D': y = a'x+b'$. (a, b, a' et b' sont quatre réels donnés)

- Donner la condition de parallélisme de D et D' .
- Donner la condition d'orthogonalité de D et D' .

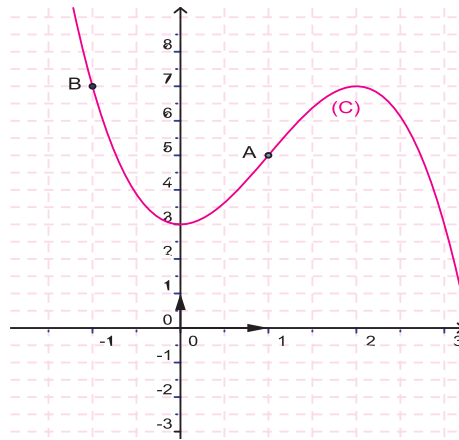
2. Soient a et b deux réels.

1) On donne, dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, la droite $D: y = ax+b$ et un point $A(\alpha, \beta)$ de la droite D .

a. Montrer qu'une équation de D dans le repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$ est $Y = aX$.

b. Vérifier que D est la droite passant par le point A et le point $B(1, a)$ dans le repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$

2) Application : La courbe (C) ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne $f'(1) = 3$ et $f'(-1) = -9$



Construire les tangentes à la courbe (C) aux points A et B .

3. Soient a et b deux réels. Donner, suivant le signe de a , les variations de la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.

Exemple

Trois voyageurs partent d'une même ville et suivent la même route,

- un piéton part à 8 h (heure zéro indiquée par le chronomètre) à la vitesse de 6 km/h,
- un cycliste part après une demi heure à la vitesse de 18 km/h,
- un automobiliste part 5 mn après le départ du cycliste à la vitesse de 90 km/h.

A 10h du matin, chacun d'eux atteint sa destination.

De combien de kilomètres l'automobiliste sera-t-il devancé par le piéton et en avance sur le cycliste ?

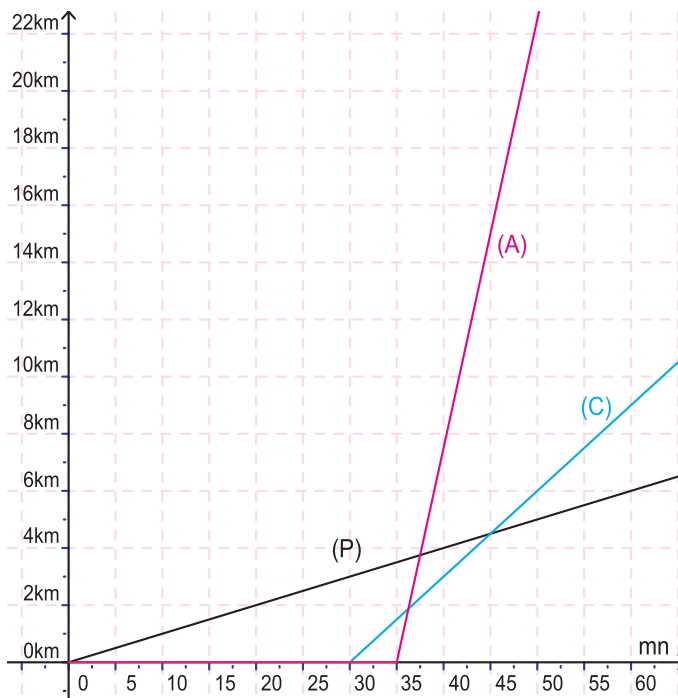
Eléments de solution

On introduit trois fonctions du temps (en heures) p , c et a définies sur $[0,2]$ par :

$$p(t) = 6t \quad ; \quad c(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \frac{1}{2} \\ 18(t - \frac{1}{2}) & \text{si } t \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad a(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \frac{7}{12} \\ 90(t - \frac{7}{12}) & \text{si } t \geq \frac{7}{12} \end{cases}$$

$p(t)$, $c(t)$ et $a(t)$ désignent les distances (en km) parcourues respectivement par le piéton, le cycliste et l'automobiliste. (P), (C) et (A) leurs courbes respectives

p est une fonction affine, c et a sont des fonctions affines par intervalles, elles modélisent les parcours effectués respectivement par le piéton, le cycliste et l'automobiliste. Elles sont toutes croissantes sur $[0,2]$



L'automobiliste est devancé par le piéton et en avance sur le cycliste dans les instants

$$t \text{ vérifiant: } 18(t - \frac{1}{2}) \leq 90(t - \frac{7}{12}) \leq 6t \text{ d'où } \frac{29}{48} \leq t \leq \frac{30}{48}$$

à la vitesse de 90km/h, l'automobiliste est devancé par le piéton et en avance sur le cycliste

pour $\frac{1}{48} \times 90$ km, c'est-à-dire pour 1,875 km

Auto évaluation

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1 \\ |x-3| + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

(C) est sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a. Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$

b. Tracer la courbe (C).

c. Etudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

2) a. Ecrire $f(x)$ sans valeur absolue.

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$, graphiquement puis par le calcul, l'inéquation $3f(x) - x > 0$.

3) Résoudre, graphiquement dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, le système $\begin{cases} 3y \leq x \\ y \geq f(x) \end{cases}$

2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} -x - 4 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x - 4 & \text{si } 0 < x \leq 3 \\ 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

(C) est sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a. Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

b. Tracer la courbe (C).

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$, graphiquement puis par le calcul, l'inéquation $2f(x) - x + 5 > 0$.

3) Hachurer la partie E du plan ensemble des points $M(x,y)$ vérifiant $y \leq 0$, $2y \geq -x$ et $y \geq f(x)$ puis calculer son aire.

3. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} |x+3| & \text{si } x \leq 0 \\ |2x-3| & \text{si } x > 0 \end{cases}$

(C) est sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a. Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

b. Tracer la courbe (C).

2) a. Ecrire $f(x)$ sans valeur absolue.

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$, graphiquement puis par le calcul, l'inéquation $f(x) \leq x$.

3) Résoudre, graphiquement, dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases} y \geq f(x) \\ y \leq x \end{cases}$

II. Fonctions trinômes du second degré

Activités préliminaires

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

- $(E_1): x^2 - 3x - 4 = 0$
- $(E_2): 2x^2 + 2\sqrt{3}x + 1 = 0$
- $(E_3): x^2 + 4x + 5 = 0$
- $(E_4): x^2 - 4x + \pi = 0$
- $(E_5): 2x^2 - 4x + 5 = 0$
- $(E_6): x^2 - 2\sqrt{2}x + 3 = 0$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes:

- $(E_1): x^2 + 2x + 7 < 0$
- $(E_2): x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 > 0$
- $(E_3): -3x^2 + 18x - 27 < 0$
- $(E_4): 2x^2 - 4x - 3 \geq 0$
- $(E_5): x^2 - 2\sqrt{2}x - 3 \leq 0$
- $(E_6): 2x^2 - \sqrt{2}x + 3 > 0$

3. On donne dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les paraboles $P: y = x^2$ et $P': y = x^2 - 3x + 1$

1) Tracer la parabole P .

2) a. Donner l'axe et le sommet de la parabole P'

b. Montrer que P' est l'image de P par une translation dont on déterminera le vecteur.

c. Tracer alors la parabole P' .

L'essentiel du cours

Soient a, b et c trois réels tels que $a \neq 0$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan. On a :

- f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2ax + b$.
- (C) est la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$, de sommet le point $S\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ et d'axe de symétrie la droite $(\Delta): x = \frac{-b}{2a}$.

Exemple

1) Soit la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = -x^2 + 4x + 5$. (C) est sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a. Préciser les branches infinies de la courbe (C) .

b. Ecrire l'équation de la tangente T à la courbe (C) au point A d'abscisse 3.

c. Tracer la droite T et la parabole (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} -x+5 & \text{si } x < 0 \\ u(x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

a. Tracer avec une autre couleur la courbe (C') de f .

b. Dresser le tableau de variations de la fonction f .

3) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. Interpréter, géométriquement, ces résultats.

4) Etudier la position relative de la courbe (C') par rapport à la droite $(d): y = 8$.

5) Soit (Δ) la droite d'équation $y = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$). Donner, graphiquement et suivant les valeurs de α , le nombre de points d'intersection de (C') et (Δ) .

6) Résoudre, graphiquement, l'inéquation $f(x) > x+5$ dans $\mathbb{R}$.

Eléments de solution

1) a. Branches infinies de (C)

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 + 4x + 5) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^2 = -\infty$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2 + 4x + 5) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 = -\infty$

La courbe (C) admet deux branches infinies.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{u(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2 + 4x + 5}{x} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{x^2}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty$$

Interprétation géométrique

Les branches infinies de la courbe (C) sont des branches paraboliques de direction celle de l'axe $(O, \vec{j})$.

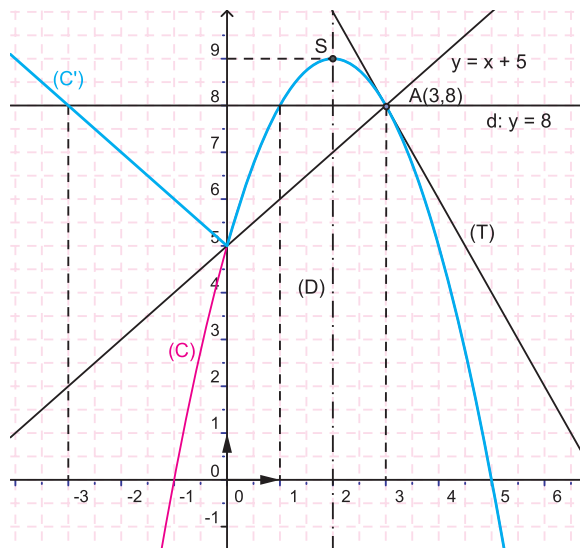
b. Tangente en A

La tangente T à (C) au point A(3,8) est déterminée par l'équation $y = u'(3)(x-3) + 8$
d'où T: $y = -2x + 14$

1) -d. Courbe (C)

2)-a. Courbe (C')

(C) est la parabole d'axe D: $x = 2$ et de sommet S(2,9).



2) a. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} -x+5 & \text{si } x < 0 \\ u(x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

b. Variations de f

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
f(x)	$+\infty$	5	9	$-\infty$

3) Continuité de f en 0

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (5-x) = 5 = f(0)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x^2 + 4x + 5) = 5 = f(0)$ d'où f est continue en zéro.

Dérivabilité de f en 0

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$ f est dérivable à gauche en zéro et de nombre dérivé à gauche $f'_g(0) = -1$.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2 + 4x}{x} = 4$, f est dérivable à droite en zéro et de nombre dérivé à droite $f'_d(0) = 4$.

Interprétation géométrique: La courbe (C) admet deux demi tangentes en I(0,5); l'une à gauche de coefficient directeur égal à -1 et l'autre à droite de coefficient directeur égal à 4.

4) Positions relatives de (d) et (C')

x	$-\infty$	-3	1	3	$+\infty$
Position de (d) et (C')	(C') est au dessus de (d)	(C') est au dessous de (d)	(C') est au dessus de (d)	(C') est au dessous de (d)	

5) $(\Delta) \cap (C')$

a	$]-\infty, 5[$	5	$]5, 9[$	9	$]9, +\infty[$
Nombre d'éléments de $(\Delta) \cap (C')$	1	2	3	2	1

6) $f(x) > x+5$ signifie que la droite d'équation $y = x+5$ est au dessous de (C) d'où $S_{\mathbb{R}} =]-\infty, 3[\cup \{0\}$

Auto évaluation

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x - 3$; (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et S le sommet de (C).

1) a. Montrer que la translation de vecteur $\vec{OS}$ transforme la parabole P d'équation $y = x^2$ en (C).

b. Ecrire l'équation de la parabole (C) dans le repère $(S, \vec{i}, \vec{j})$.

c. Tracer (C).

2) Déterminer, graphiquement, les points d'intersection de la courbe (C) avec l'axe des abscisses. Retrouver cette intersection par le calcul.

3) Tracer dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les courbes représentatives de $-f$ et de $|f|$.

4) Résoudre, graphiquement dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, l'inéquation $(x^2 - 2x - 3)^2 - y^2 \geq 0$.

2. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f: x \mapsto 2x^2 + 3x - 2$.

(C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Tracer la parabole (C). (On donnera son axe et son sommet).

2) Déterminer les intersections de la courbe (C) avec les axes du repère.

3) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -f(x)$.

Construire dans le même repère les courbes représentatives des fonctions g , h et k définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par $g(x) = -f(x)$, $h(x) = |f(x)|$ et $k(x) = f(x) + 3$

(On expliquera à chaque fois la construction)

3. 1) Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par $f(x) = -x^2 + x + 2$

$g(x) = x^2 + 2x - 1$, (C) et (C') leurs courbes représentatives respectives dans un repère orthogonal

a. Déterminer les intersections des courbes (C) et (C') avec l'axe des abscisses.

b. Déterminer les points d'intersection des courbes (C) et (C').

c. Tracer les courbes (C) et (C').

2) Hachurer la région du plan formée par les points $M(x, y)$ vérifiant :

$$x \in \left[-\frac{3}{2}, 1\right] \text{ et } y \in [f(x), g(x)].$$

4. La courbe (C) ci-contre est une parabole représentant une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

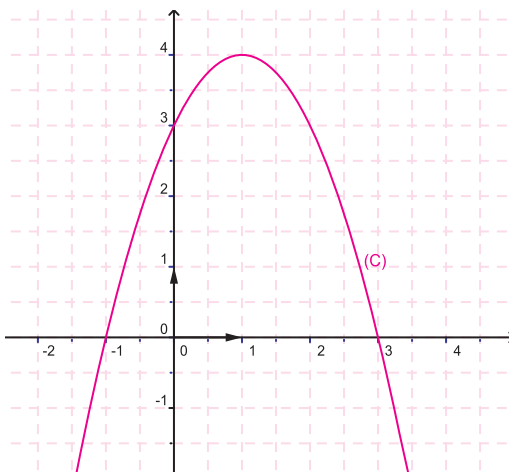
(où a , b et c sont des réels donnés)

1) Utiliser le graphique pour

a. Dresser le tableau de variations de f et déterminer l'axe de symétrie et le sommet de sa courbe (C).

b. Retrouver les coefficients a , b et c .

2) Donner l'équation de la tangente à (C) au point d'abscisse -1



III. Fonctions polynômes du troisième degré

1) Equations du troisième degré

Activités préliminaires

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes:

- (E1): $x^3 - 1 = 0$
- (E2): $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = 0$
- (E3): $x^3 - 4x^2 + x < 0$
- (E4): $(x-2)(x-3) - 2x + 6 + (x-3)^3 \leq 0$

Activités de découverte

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

(a, b, c et d étant quatre réels donnés)

1) Supposons que $a + b + c + d = 0$. Vérifier que 1 est un zéro de f .

2) Supposons que $a - b + c - d = 0$. Vérifier que -1 est un zéro de f .

3) Supposons que x_0 est un zéro de f .

a. Ecrire $f(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d) - (ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d)$.

En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a(x^3 - x_0^3) + b(x^2 - x_0^2) + c(x - x_0)$

b. Factoriser alors $f(x)$

Application

On considère, dans $\mathbb{R}$, l'équation (E) : $x^3 - 2x^2 - 4x + 3 = 0$.

Vérifier que 3 est une solution de (E) puis déterminer ses deux autres solutions.

Point de méthode

Pour résoudre, dans $\mathbb{R}$, une équation du troisième degré (E): $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, on pourra factoriser l'expression $ax^3 + bx^2 + cx + d$ soit directement soit en déterminant une solution apparente x_0 de (E), écrire $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x^3 - x_0^3) + b(x^2 - x_0^2) + c(x - x_0)$ puis factoriser cette expression. En particulier :

si $a + b + c + d = 0$ alors 1 est une solution de (E) et si $a - b + c - d = 0$ alors -1 est une solution de (E).

Auto évaluation

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes:

- (E₁): $x^6 - 1 = 0$
- (E₂): $\frac{x^2 + 3x - 3}{x + 1} - \frac{1}{2x} = 0$
- (E₃): $x^3 - 4x^2 + x + 6 > 0$
- (E₄): $-2x^3 - x^2 + 5x - 2 \leq 0$ (Vérifier que -2 est une solution.)

2. Déterminer une fonction polynôme de degré 3 dont on connaît trois zéros distincts α , β et γ . Existe-t-il d'autres fonctions polynômes de degré 3 ayant les mêmes zéros ?

2) Etude d'exemples de fonctions polynômes du troisième degré

Activités de découverte

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$. (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) a. Etudier les variations de f .
b. Montrer que f est impaire. Que peut-on dire de la courbe (C) ?
c. Etudier les branches infinies de (C)
 - 2) a. Donner l'équation de la tangente T_0 à la courbe (C) en O.
b. Vérifier que (C) traverse sa tangente T_0 en O.
- On dit que O est un point d'inflexion de (C).
- 3) a. Donner l'équation de la tangente T_1 à la courbe (C) au point I d'abscisse 1.
b. (C) traverse-t-elle sa tangente T_1 en I ?
 - 4) Tracer T_0 , T_1 et (C).
 - 5) Etudier le signe de la dérivée seconde de f sur $\mathbb{R}$. Que remarquez-vous ?

L'essentiel du cours

Soient x_0 un réel et f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I contenant x_0 . (C) est sa courbe dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

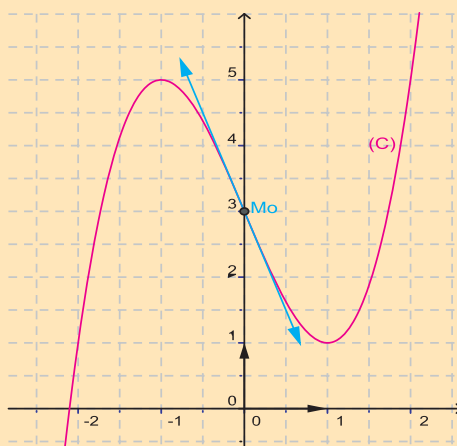
Point d'inflexion

Définition

Le point $M_0(x_0, f(x_0))$ est dit point d'inflexion de la courbe (C) si cette courbe traverse sa tangente en ce point.

Théorème (admis)

Si f est deux fois dérivable sur I alors le point $M_0(x_0, f(x_0))$ est point d'inflexion de la courbe (C) si et seulement si la dérivée seconde de f s'annule en changeant de signe en x_0 .



Exemple

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}$. (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) a. Etudier les variations de f.
b. Préciser les extremums de f.
c. Etudier les branches infinies de (C)
- 2) a. Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées.
b. Donner l'équation de la tangente T à la courbe (C) au point I.
c. Montrer que I est un centre de symétrie de la courbe (C).
- 3) Tracer la droite T et la courbe (C).
- 4) Vérifier, à l'aide du graphique, que l'équation (E) : $2x^3 - 9x^2 + 15 = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ trois solutions et encadrer chacune d'elles à 0.5 près.

Solution

1) a. Variations de f

f est une fonction polynôme elle est alors définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{3}x^3 = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}x^3 = +\infty$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = x^2 - 3x = x(x-3)$

b. Extremums de f

La fonction f présente deux extremums locaux,

un maximum local en 0 qui est $\frac{5}{2}$

et un minimum local en 3 qui est -2.

c. Branches infinies

La courbe (C) admet deux branches infinies.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\frac{1}{3}x^3}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{3}x^2 \right) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}x^2 = +\infty$$

Les branches infinies de la courbe (C) sont des branches paraboliques de direction celle de l'axe $(O, \vec{i})$.

2) a. Point d'inflexion de (C)

f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f''(x) = 2x - 3$

a	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+

f'' s'annule et change de signe en $\frac{3}{2}$ d'où $I(\frac{3}{2}, \frac{1}{4})$ est un point d'inflexion de (C)

b. Tangente T à (C) en I

L'équation de la tangente T à (C) en I est $y = f'(\frac{3}{2})(x - \frac{3}{2}) + f(\frac{3}{2})$, $T: y = -\frac{9}{4}x + \frac{29}{8}$

c. Centre de symétrie de (C)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a bien $(3-x) \in \mathbb{R}$ et on a

$$f(3-x) = \frac{1}{3}(3-x)^3 - \frac{3}{2}(3-x)^2 + \frac{5}{2} = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2 = \frac{1}{2} - (\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}) = \frac{1}{2} - f(x)$$

d'où $I(\frac{3}{2}, \frac{1}{4})$ est un centre de symétrie de la courbe

(C) ou encore (C) est la transformée d'elle-même

par la symétrie centrale de centre I.

3) Courbe (C)

Remarquons qu'il suffit de

représenter la restriction de f

sur $]-\infty, \frac{3}{2}]$ puis tracer son symétrique par rapport à I.

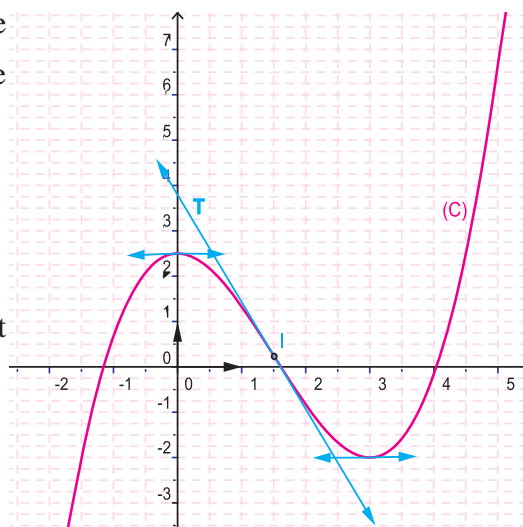


Tableau de valeurs

x	-1	0	1	$\frac{3}{2}$
f(x)	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{4}$

4) L'équation (E) : $2x^3 - 9x^2 + 15 = 0$ est équivalente à $f(x) = 0$.

La courbe (C) coupe l'axe $(O, \vec{i})$ en trois points, leurs abscisses respectives x_1, x_2

et x_3 sont les solutions de l'équation (E) et on a : $-1,5 < x_1 < -1$; $1,5 < x_2 < 2$ et $3,75 < x_3 < 4,25$.

Auto évaluation

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$. (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a. Etudier les variations de f et préciser ses extremums éventuels.

b. Montrer que f est impaire et préciser le centre de symétrie de sa courbe.

c. Etudier les branches infinies de (C).

2) a. Montrer que la courbe (C) admet l'origine O comme point d'inflexion.

b. Donner l'équation de la tangente T à la courbe (C) au point O.

3) Tracer T et (C).

4) a. Tracer dans le même repère la droite (D) d'équation $y = x$.

b. Etudier la position relative de (C) par rapport à (D).

5) Résoudre, graphiquement dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, le système $\begin{cases} y - x \geq 0 \\ 3y - x^3 + 3x \geq 0 \end{cases}$

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 - 2x + 1$.

(C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a. Etudier les variations de f .

b. Préciser les extremums de f .

c. Etudier les branches infinies de (C)

2) a. Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées.

b. Donner l'équation de la tangente T à la courbe (C) au point I.

c. Montrer que I est un centre de symétrie de la courbe (C).

3) Tracer T et (C).

4) a. Vérifier, graphiquement, que f admet un seul zéro α .

b. Donner un encadrement à 10^{-2} près de α .

5) Résoudre, graphiquement dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, l'inéquation $(y+2x)(y+x^3+2x-1) \geq 0$.

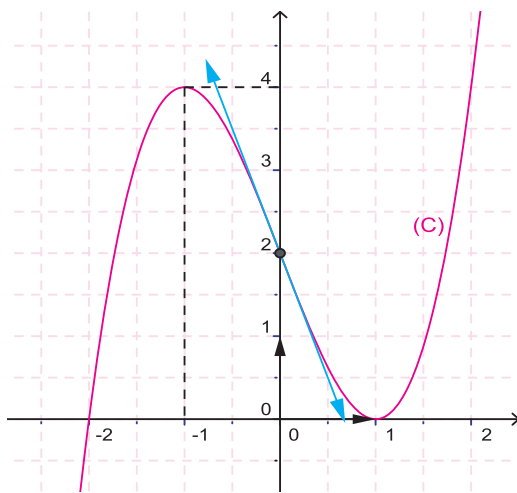
3. La courbe représentative (C) ci-contre, est celle d'une fonction polynôme du troisième degré définie par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (où a, b, c et d sont quatre réels donnés).

1) Utiliser le graphique pour :

a. Dresser le tableau de variations de f et déterminer le centre de symétrie et le point d'inflexion de (C).

b. Déterminer les intersections de (C) avec les axes du repère.

2) Retrouver les coefficients a, b, c et d .



IV. Fonctions polynômes du quatrième degré bicarrées

1) Equations du quatrième degré bicarrées

Activités de découverte

1. Factoriser puis résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes:

• $(E_1) : x^4 - 2x^2 + 1 = 0$ • $(E_2) : x^4 + 4x^2 + 4 = 0$ • $(F_1) : 2x^4 - 3x^2 < 0$ • $(F_2) : x^4 - 4 \geq 0$

2. 1) a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $2X^2 + 5X + 2 = 0$

b. Soit, dans $\mathbb{R}$, l'équation (F) : $2x^4 + 5x^2 + 2 = 0$.

Vérifier que la résolution de l'équation (F) revient à la résolution dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

du système
$$\begin{cases} 2X^2 + 5X + 2 = 0 \\ x^2 = X \end{cases}$$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (G) : $y^4 + \sqrt{2}y^2 + 1 = 0$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (H) : $-2t^4 + 4t^2 + \frac{1}{2} \leq 0$

Point de méthode

Pour résoudre, dans $\mathbb{R}$, une équation du quatrième degré bicarrée $ax^4 + bx^2 + c = 0$

(où a , b et c sont des réels tels que $a \neq 0$), on peut :

- décider du signe de l'expression $ax^4 + bx^2 + c$
- ou factoriser directement cette expression
- ou bien poser $x^2 = X$ et résoudre, dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, le système :
$$\begin{cases} aX^2 + bX + c = 0 \\ x^2 = X \end{cases}$$

Auto évaluation

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- (E_1) : $-x^4 - 2\sqrt{3}x^2 - 1 = 0$
- (E_2) : $x^3 + x + \frac{1}{x} = 0$
- (E_3) : $x^2 + \frac{1}{x^2} - 4 = 0$
- (E_4) : $8x^3 - 4x^2 + 2x - 1 = 0$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

- (E_1) : $x^4 - 2x^2 - 5 > 0$
- (E_2) : $-2x^4 + x^2 - 2 < 0$
- (E_3) : $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 \geq 0$

2) Etude de fonctions polynômes du quatrième degré bicarrées

Exemple

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$; (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a. Vérifier que f est paire.

b. Etudier les variations de f . Donner ses extremums.

c. Montrer que (C) admet deux points d'inflexion qu'on déterminera.

d. Déterminer les tangentes à (C) en ses points d'inflexion.

e. Etudier les branches infinies de (C) et tracer la.

2) Donner, graphiquement, une approximation des coordonnées des points d'intersection de la courbe (C) avec les axes du repère. Retrouver, par le calcul, ces intersections

Solution

1) a. Parité de f

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = x^4 - 2x^2 - 3$ d'où f est paire et par suite $(y'Oy)$ est un axe de symétrie de (C).

b. Variations et extremums de f

f est une fonction polynôme elle est alors définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, étant paire, il suffit de l'étudier sur $\mathbb{R}^+$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x-1)(x+1)$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'(x)	0	-	0	+	
f(x)	-3				$+\infty$

La fonction f présente trois extremums locaux, un

maximum local en 0 qui est -3 et un minimum global en 1 et en -1 (par raison de symétrie par rapport à (y'Oy)) qui est -4.

c. Points d'inflexion de (C)

f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = 12x^2 - 4 = 12(x^2 - \frac{1}{3})$

f'' s'annule en changeant de signe en $\frac{\sqrt{3}}{3}$ et en $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. Les points d'inflexion de (C) sont $I(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{32}{9})$ et son symétrique par rapport à l'axe (y'Oy) le point $J(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{32}{9})$

d. Tangentes à (C) en I et en J

• L'équation de la tangente T_1 à (C) en I

est $y = f'(\frac{\sqrt{3}}{3})(x - \frac{\sqrt{3}}{3}) + f(\frac{\sqrt{3}}{3})$,

$$T_1: y = -8\frac{\sqrt{3}}{9}x - \frac{8}{3}$$

• La tangente T_2 à (C) en J est la droite symétrique

$$T_2: y = 8\frac{\sqrt{3}}{9}x - \frac{8}{3}$$

e. Branches infinies et courbe (C)

La courbe (C) admet deux branches infinies.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^4}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^4}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = +\infty$$

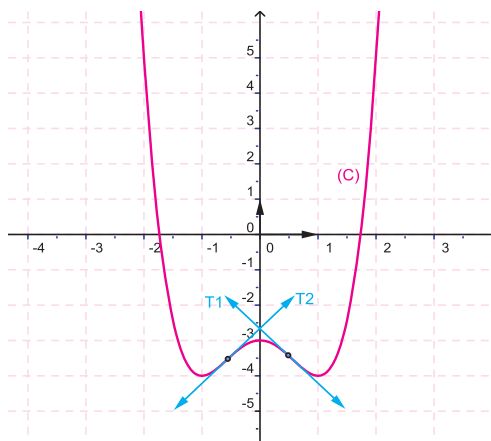
Les branches infinies de la courbe (C) sont des branches paraboliques de direction celle de l'axe (y'Oy).

Remarque On représente la restriction de f sur $\mathbb{R}^+$ et par considération de symétrie par rapport à (y'Oy) on en déduit la courbe (C).

2) $(x'Ox) \cap (C)$

Graphiquement

Cette intersection est approchée aux points A(1.7, 0) et son symétrique par rapport à l'axe (y'Oy).



Par le calcul

$$M(x,y) \in (x'Ox) \cap (C) \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 2x^2 - 3 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + 1)(x^2 - 3) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

D'où $(x'Ox) \cap (C) = \{A(\sqrt{3}, 0), A'(-\sqrt{3}, 0)\}$

$(y'Oy) \cap (C)$

Graphiquement

Cette intersection est le point $G(0, -3)$

Par le calcul

$$M(x,y) \in (y'Oy) \cap (C) \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 2x^2 - 3 = y \\ x = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \end{cases}$$

D'où $(y'Oy) \cap (C) = \{G(0, -3)\}$

Auto évaluation

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 + x^2 + 1$; (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a. Etudier les variations de f .

b. Vérifier que f est paire. Donner ses extremums.

c. (C) admet-elle des points d'inflexion ?

d. Déterminer la tangente à (C) au point d'abscisse 1.

e. Etudier les branches infinies de (C) et tracer la.

2) Donner, graphiquement, l'intersection de la courbe (C) avec la droite d'équation $y = 3$.

Retrouver, par le calcul, cette intersection.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}$.

(C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a. Etudier les variations de f .

b. Vérifier que f est paire. Donner ses extremums.

2) Soit g la restriction de f sur $\mathbb{R}^+$; (C') sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a. Montrer que (C') admet un point d'inflexion I qu'on déterminera.

b. Déterminer la tangente à (C') en I .

c. Etudier la branche infinie de (C') et tracer la.

d. Tracer alors la courbe (C) .

3. La courbe représentative (C) ci-contre, est celle d'une fonction polynôme bicarrée définie par

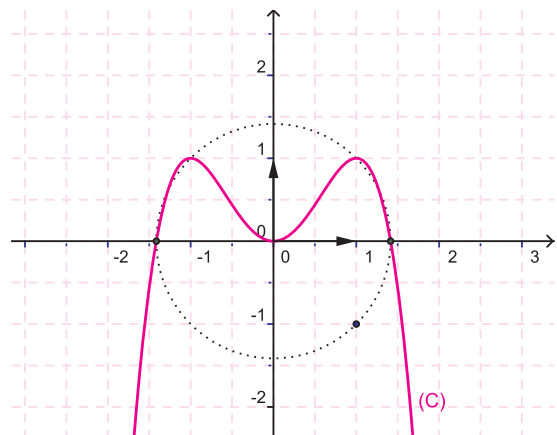
$f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ (où a , b et c sont trois réels donnés).

1) Utiliser le graphique pour :

a. Dresser le tableau de variations de f et déterminer l'axe de symétrie et les points d'inflexion de sa courbe (C).

b. Déterminer les intersections de (C) avec les axes du repère.

2) Retrouver les coefficients a , b et c .



TP1 A l'occasion d'une fête, deux boutiques qui vendent les mêmes articles ont offert à leurs clients des remises, ces remises sont décrites comme suit :

Remise de la boutique 1	Remise de la boutique 2
• 10 % si l'achat est au plus égal à 50 d • 15 % si l'achat dépasse 50 d	• 10 % si l'achat est au plus égal à 50 d • Si l'achat dépasse 50 dinars, la remise est de 10 % sur les premier 50 d ajoutée à 20 % de ce qui reste.

1) Modéliser chaque situation par une fonction exprimant la somme à payer en fonction du prix fixé avant la remise, ce prix étant au plus égal à 120 dinars.

2) Tracer dans un repère convenablement choisi, les courbes des deux fonctions ainsi définies.

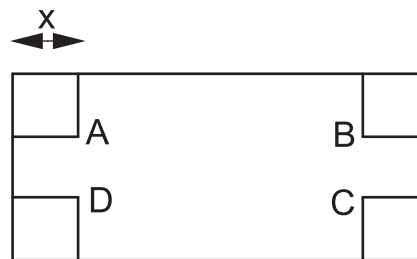
3) a. Que paye un client voulant acheter de la première boutique un article de 50 d ? de 52 d ?
 b. Que paye un client voulant acheter de la deuxième boutique un article de 50 d ? de 52 d ?

4) L'une des deux remises n'est pas raisonnable, laquelle ?

TP2 On dispose d'une feuille de carton rectangulaire de 80 cm de longueur et de 50 cm de largeur, avec laquelle on veut fabriquer une boîte sans couvercle et ayant la forme d'un parallélépipède rectangle.

Pour cela, on découpe dans la feuille quatre carrés isométriques aux quatre coins puis on plie le carton

suivant les segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. On désigne par x la mesure (en cm) du côté de chaque carré découpé.



1) Préciser les valeurs entre lesquelles peut varier x pour que la boîte soit réalisable.

2) Montrer que le volume V (en cm^3) de la boîte obtenue est défini en fonction de x par $V(x) = 4x^3 - 260x^2 + 4000x$.

3) a. Dresser le tableau de variation de la fonction V qui à x associe $V(x)$.

b. Construire la courbe représentative de la fonction V dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4) Quelle est la valeur de x qui rend le volume de la boîte maximal ?

1 Soit a un réel donné, on considère la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_a(x) = ax^2 - 2ax + 1.$$

(C_a) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- 1) a. Tracer les courbes (C_1) , (C_2) et (C_3) à l'aide d'un logiciel.
- b. Que peut-on conjecturer sur les points communs aux courbes (C_a) ?
- 2) Montrer que $(C_0) \cap (C_1)$ est formée de deux points A et B qu'on précisera.
- 3) Vérifier que A et B appartiennent à toutes les courbes (C_a) .

2 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x^2 + 2x + 5$.

(C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- 1) a. Tracer la courbe (C) à l'aide d'un logiciel.
- b. Vérifier graphiquement que (C) coupe l'axe des abscisses en un seul point.
- c. Préciser, à l'aide du logiciel les coordonnées de ce point d'intersection.
- d. Donner un encadrement à 10^{-2} près de l'unique zéro de f .
- 2) a. Vérifier que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- b. Quelle est l'image de $\mathbb{R}$ par f ?
- c. En déduire que f admet un seul zéro a et que $a \in]-2, -1[$
- d. Utiliser un tableur pour remplir le tableau suivant :

x	-2	-1,9	-1,8	-1,7	-1,6	-1,5	-1,4	-1,3	-1,2	-1,1	1
f(x)											

En déduire un encadrement de a à 10^{-1} près.

- 3) A l'aide du même tableur donner un encadrement de a à 10^{-2} près.

3 On se propose de déterminer l'ensemble des points équidistants d'une droite et d'un point extérieur à cette droite

- 1) Utiliser un logiciel de construction géométrique pour:
 - Faire apparaître un repère orthonormé.
 - Placer le point $F(0,1)$
 - Tracer la droite $\Delta: y = -3$
 - Placer sur Δ un point variable H
 - Tracer la médiatrice (D) du segment $[FH]$.
 - Tracer la perpendiculaire (D') à Δ en H.
 - Appeler M le point d'intersection de (D) et (D') .
 - Vérifier que $MH = MF$.
 - Faire varier H sur Δ
 - Observer le lieu (C) décrit par le point M.
- 2) Conjecturer sur la nature de (C)
- 3) Admettre la conjecture et trouver en s'appuyant sur le graphique l'équation de la courbe (C) .

1 1) Soit la fonction affine $f: x \mapsto 2x - \sqrt{3}$

a. Tracer sa courbe représentative (D) dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$

b. Tracer dans le même repère la courbe (γ) de la fonction $u: x \mapsto |f(x)|$

(On décrira l'obtention de (γ) à partir de (D))

2) Soit la fonction affine $g: x \mapsto -3x + 4\sqrt{3}$. Tracer sa courbe représentative (D') dans le même repère.

3) On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction h par $h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x < \sqrt{3} \\ g(x) & \text{si } x \geq \sqrt{3} \end{cases}$

a. Tracer sa courbe représentative (C) dans le même repère.

b. En déduire ses variations sur $\mathbb{R}$.

c. Etudier la continuité et la dérivabilité de h en $\sqrt{3}$.

4) Hachurer la région du plan formée par les points de coordonnées (x, y) vérifiant:
 $y \geq \sup(2x - \sqrt{3}, -3x + 4\sqrt{3})$

2 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + E(x)$, $E(x)$ désigne la partie entière de x .

(C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Soit k un entier relatif. Etudier la continuité de f en k .

2) Expliciter $f(x)$ sur chacun des intervalles $[-2, -1[$, $[-1, 0[$, $[0, 1[$ et $[1, 2[$.

3) Construire la courbe (C)

4) a. Soit $M(x, f(x))$ un point de (C) et $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$ un vecteur. Déterminer les coordonnées du point M' image de M par la translation de vecteur $\vec{u}$.

b. En déduire que la courbe (C) reste invariante par la translation de vecteur $\vec{u}$.

3 Deux villes A et B sont distantes de 15 km. Un piéton part de A à 10 heures en direction de la ville B à la vitesse de 6 km/h, il se repose pendant 10 mn tous les 3km. On désigne par $f(t)$ la distance parcourue par le piéton après un temps t .

1) Préciser les valeurs entre lesquelles peut varier t .

2) Expliciter $f(t)$.

3) Construire la courbe (C) de f dans un repère orthogonal.

4) A quelle distance de la ville A se trouve le piéton à 10h 45mn ?

5) Quel est le temps nécessaire pour que le piéton parcoure 11km ?

4 Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

a. $x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$ b. $x^2 - 9 = 0$ c. $x^2 + 2x - 3 = 0$ d. $(x - 2)^2 = 3 - 2x$

e. $x^2 + x - 6 = 0$ f. $2x^2 - x - 3 = 0$ g. $\frac{2x + 2}{5 - x} = x$ h. $x^2 - x - 12 = 0$

i. $(x - 1)(x - 5) + 2x - 10 = 0$

5 Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

a. $(2x+1)^2 - 3(2x+1) + 2 = 0$ b. $\frac{4}{x^2} - \frac{3}{x} - 1 = 0$ c. $\frac{-2}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} - 5 = 0$

6 1) Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $t^2 + t - 2 = 0$.

2) a. Développer $(x + \frac{1}{x})^2$.

b. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} = 0$ (On pourra poser $t = x + \frac{1}{x}$)

7 1) Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation : $x^2 - 4x + 3 = 0$.

2) Dédire la résolution, dans $\mathbb{R}$, de l'équation : $\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{4}{x+1} + 3 = 0$.

8 Soit, dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2 - 2x - \sqrt{2} = 0$. On désigne par x_1 et x_2 les solutions de cette équation. Sans calculer x_1 et x_2 , donner la valeur de chacune des expressions suivantes :

$$A = x_1^2 + x_2^2 \quad B = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \quad C = \frac{x_1 + 1}{x_2 + 1} + \frac{x_2 + 1}{x_1 + 1}$$

9 Factoriser les expressions suivantes :

a. $A(x) = x^2 - 7x - 8$ b. $B(x) = 5x^2 + x - 4$ c. $C(x) = 4x^2 - 17x + 4$

10 Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

a. $x^2 - 1 \geq 0$ b. $x^2 - 4x + 4 < 0$ c. $x^2 - 6x + 5 > 0$ d. $x^2 - x + 1 \leq 0$

e. $2x^2 + x - 6 < 0$ f. $2(x - 2)^2 > 5 - 3x$ g. $1 - \frac{1}{(x-1)^2} \leq 0$

11 On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = x^2 - 3x - 3$ et $g(x) = |2x - 3|$.
(C) et (C') leurs courbes représentatives respectives dans un repère orthogonal.

- 1) Tracer, dans le même repère, la parabole (C) et la courbe (C').
- 2) Déterminer, graphiquement, les points d'intersection des courbes (C) et (C')
- 3) Retrouver, par le calcul, $(C) \cap (C')$.
- 4) Hachurer la région du plan formée par les points de coordonnées (x, y) tels que $x^2 - 3x - 3 \leq y \leq |2x - 3|$.

12 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$
(C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- 1) Déterminer l'axe de symétrie Δ et le sommet S de la parabole (C) puis tracer la.
- 2) Tracer avec une autre couleur la courbe (C') de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = |\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1|$ puis dresser le tableau de variations de g .
- 3) Montrer que la droite Δ est un axe de symétrie de la courbe (C').
- 4) Déterminer, graphiquement, les extremums de g .
- 5) Colorier l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $\begin{cases} y \leq 0 \\ 2y - x^2 + 4x - 2 \geq 0 \end{cases}$

13 Soit la fonction $f: x \mapsto x^2 - 4|x| + 2$. On désigne par (C) sa courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = 0$.
- 2) Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$.
- 3) a. Dresser le tableau de variation de f .
b. Construire la courbe (C).
- 4) Soit $a \in]0, +\infty[- \{2\}$. On désigne par A et B les points de (C) d'abscisses respectives a et $-a$.
a. Ecrire une équation de la tangente T_1 à (C) en A.
b. Ecrire une équation de la tangente T_2 à (C) en B.
c. Montrer que T_1 et T_2 se coupent en un point de l'axe $(O, \vec{j})$.

14 Soit la fonction f définie par : $f(x) = x^2 + 3x$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Construire la parabole (C). On note S son sommet.
- 2) Soit a un réel différent de $(-\frac{3}{2})$. On considère le point M de (C) d'abscisse a , M' le projeté orthogonal de M sur la droite $\Delta: y = -\frac{9}{4}$ et N le milieu de $[M'S]$.
a. Exprimer, en fonction de a , les coordonnées de M , M' et N .
b. Montrer que (MN) est la tangente à (C) en M .
- 3) Dédire de (C) la courbe représentative de la fonction $g: x \mapsto x^2 + 3x + 2$.

15 Un champ rectangulaire est tel que la mesure de la longueur est égale à la mesure de la largeur plus 15 m. On note x la largeur du champ ($x > 0$)

1) Calculer en fonction de x , l'aire $A(x)$ du champ.

2) Construire dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe représentative de la fonction A ainsi définie.

3) Sachant que la superficie du champ est égale à 700 m^2 , calculer la longueur et la largeur du champ.

16 Des démographes ont établi que le nombre d'habitants d'une ville dans x années est décrit par la fonction P définie sur $[1990, 2020]$ par

$$P(x) = (x-1990)^2 - 40(x-1990) + 25000$$

1) Construire la courbe (C) de la fonction P dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2) Quelle est actuellement la population de la ville ?

3) Quel serait le nombre d'habitants de la ville en 2020 ?

4) En quelle année la population de la ville sera-t-elle minimale ?

5) En quelle année la population de la ville comptera-t-elle plus de 25500 habitants?

17 Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes:

a. $x^3 - 4x^2 + 4x = 0$

b. $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0$

c. $3x + \frac{x-3}{x+1} = x^2$

d. $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$

e. $x(x^2 - 1) + 2 - 2x^2 = 0$

f. $x^3 + 64 = 0$

18 Soit la fonction f définie par : $f(x) = x^3 - 3x^2$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) a. Dresser le tableau de variation de f .

b. Déterminer le point d'inflexion I de (C) .

c. Montrer que I est un centre de symétrie de (C) .

2) Construire la courbe (C) .

3) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = |x-1|(x^2 - 2x - 2) - 2$.

a. Montrer que la droite $\Delta : x = 1$ est un axe de symétrie de la courbe (C') de g .

b. Vérifier que si $x \in [1, +\infty[$ on a : $g(x) = f(x)$.

c. Dédurre la courbe (C') de la courbe (C) .

d. Déterminer, graphiquement, le nombre de solutions

de l'équation : $\left| \frac{3}{x-1} \right| = x^2 - 2x - 2$ dans $\mathbb{R}$.

4) Résoudre, graphiquement, dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système
$$\begin{cases} y \leq x^2 \\ y - x^3 + 3x^2 \geq 0 \end{cases}$$

19 Soit la fonction f définie par : $f(x) = -2x^3 + 9x^2 - 12x - 2$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a. Dresser le tableau de variations de f .

b. Montrer que (C) admet un point d'inflexion I et que I est un centre de symétrie de (C) .
Construire (C) .

2) Soit la fonction g définie par $g(x) = -2|x|^3 + 9x^2 - 12|x| - 2$.

a. Montrer que g est paire.

b. Dédire de (C) , la courbe représentative (C') de la fonction g .

c. Soit l'équation $(E) : 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| + 1 + a = 0$ ($a \in \mathbb{R}$).

Déterminer graphiquement, les valeurs de a pour lesquelles l'équation (E) admet exactement quatre solutions distinctes.

20 1) Tracer, dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe (C) de la fonction f définie sur $[0, 5]$ par $f(x) = 2x^3 - 6x$.

2) Une entreprise estime que le revenu mensuel pour les 5 années à venir, à compter d'aujourd'hui exprimé en million de dinars, d'un produit est décrit par :

$$R(t) = 2(t^3 - 3t) \text{ où } t \text{ désigne le nombre d'années.}$$

a. Que peut-on dire du revenu de l'entreprise dans la première année ?

Peut-on donner une explication ?

b. Quel est le taux de croissance du revenu entre 0 et 3 ans ?

c. A partir de quelle année l'entreprise ne sera plus déficitaire dans la fabrication de ce produit ?

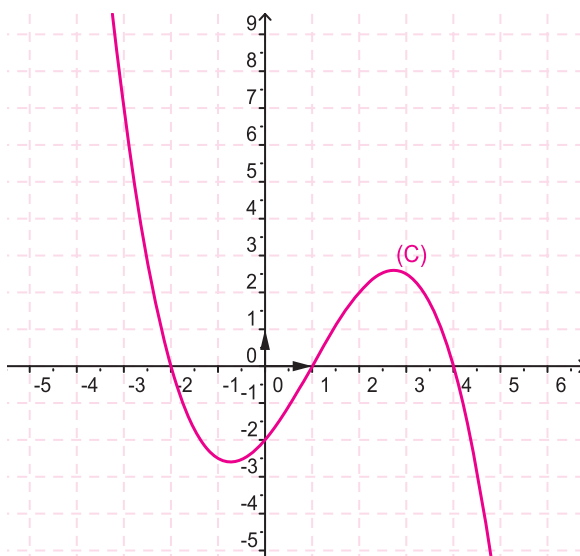
21 La courbe représentative (C) ci-contre est celle d'une fonction polynôme du troisième degré définie par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (où a, b, c et d sont quatre réels donnés).

1) Utiliser le graphique pour dresser le tableau de variations de f et déterminer le centre de symétrie et le point d'inflexion de (C) .

2) Déterminer l'intersection de (C) avec les axes du repère.

3) Déterminer alors les coefficients a, b, c et d .

4) Retrouver les résultats de la 1^{ère} question.



22 Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

a. $x^4 - 6x^2 + 9 = 0$

b. $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$

c. $x^4 - 12x^2 = 0$

d. $(x^2 - 1)^2 + 1 - x^2 = 0$

e. $(x^2 + 3)^2 = 4x^4$

23 Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

a. $x^3 - x \leq 0$

b. $x^3 - 2x^2 + x - 2 < 0$

c. $2x^3 - 3x^2 - 5x \leq 0$

d. $x^4 - 16 > 0$

e. $x^4 + x^2 - 2 < 0$

f. $x^4 - 2x^2 + 1 \geq 0$

24 1) Construire dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la parabole (P) d'équation $y = -x^2 + 1$.

2) Soit I le point du plan de coordonnées (0, 3) et M le point de la parabole (P) d'abscisse x.

On note $f(x) = IM^2$.

a. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 + 5x^2 + 4$.

b. Construire, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative de la fonction f.

c. Déterminer la position de M sur (P) pour que la distance IM soit minimale.

25 On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^4 - x^2$

et $g(x) = 2x^3 - 2x$. On désigne par (C) et (C') les courbes respectives des fonctions f et g dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Etudier les variations de f et g.

2) Construire les courbes (C) et (C').

3) Déterminer les points d'intersection des deux courbes (C) et (C').

4) Résoudre l'inéquation $f(x) \geq g(x)$.

5) Résoudre, graphiquement, dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ l'inéquation $(y - f(x))(y - g(x)) \leq 0$.

<i>Equation du 2ème degré</i>	
<i>Les Babiloniens 1800-1500 av.J.-C.</i>	Les tablettes de cette époque conservent une foule d'informations, en particulier elles révèlent une algèbre déjà très développée et témoigne de la maîtrise des Babyloniens à résoudre des équations du second degré
<i>Diophante (4e siècle)</i>	Diophante (4e siècle) poursuit les recherches des Babyloniens . Il aura une approche algébrique du problème.
<i>Al-kwarizmi Vers 820-830</i>	Vers 820-830, Al-Khwarizmi , membre de la communauté scientifique réunie autour du calife al Mamoun, décrit, dans son traité d'algèbre, des transformations algébriques permettant de résoudre des équations du 2e degré
<i>Les racines négatives sont ignorées jusqu'au 16ème siècle</i>	Suivant les idées développées par Stevin en 1585, Girard en 1629 donne des exemples d'équations avec racines négatives. "Le négatif en géométrie indique une régression, alors que le positif correspond à un avancement.". Il n'a d'ailleurs pas plus de scrupules avec les racines complexes.
<i>Equation du 3ème degré</i>	
<i>Ménachme (375 à 325 av.J.-C., Grèce)</i>	Les grecs ont résolu ces équations géométriquement, par intersection de coniques (ellipses, paraboles et hyperboles). Le plus ancien des problèmes du 3e degré remonterait à Ménéchme (375 à 325 av.J.-C.).
<i>Archimède (287-212 av.J.-C.)</i>	Archimède (287-212 av.J.-C.) avait lui cherché à couper une sphère de rayon R par un plan de façon que le rapport des volumes des 2 parties ait une valeur donnée k. Cela donne une équation de degré 3.
<i>Omar Khayyâm (1048-1131) Sharaf ad Din at Tusi (vers 1160)</i>	Astronome et mathématicien, Omar Khayyâm, dans son traité d'algèbre (1074) étudie les équations du 3e degré à coefficients strictement positifs. 100 ans plus tard Sharaf ad Din at Tusi classe les équations, non pas comme Omar Khayyâm suivant le signe des coefficients, mais suivant l'existence de racines strictement positives.
<i>Scipio del ferro (1465-1526) Niccolo Tartaglia (1500-1557) Jérôme cardan (1501-1576)</i>	Scipio del Ferro (1465-1526), professeur à Bologne, découvre la résolution algébrique des équations : $(p,q>0)$ (il ne considère pas les coef. négatifs) $x^3 + px = q \quad (1)$ $x^3 = px + q \quad (2)$ $x^3 + q = px \quad (3)$ En 1535, Niccolo Tartaglia réussit à résoudre une trentaine de problèmes de type (1), mais il garde secrète sa méthode. Par la suite, Jérôme Cardan (1501-1576), lui arrache son secret (en 1539) et réussit à étendre la méthode aux équations de type (2) et (3). (Pour plus de précisions, cf. Le conflit Tartaglia-Cardan).
<i>Euler (1707-1783)</i>	Mais c'est Euler qui a éclairci la détermination des 3 racines dans un article en latin de 1732.
<i>Equation du 4ème degré</i>	
<i>Jérôme Cardan (1501-1576) Lodovico Ferrari (1522-1565).</i>	Cardan donne une méthode au chapitre 39 de l'Ars Magna. Il précise qu'elle a été trouvée par son élève Lodovico Ferrari.
<i>Viète (1540-1603, France)</i>	Dans son texte de 1615, François Viète expose clairement la méthode de Ferrari.
<i>Descartes (1596-1650)</i>	Descartes expose aussi une autre méthode de résolution, par coefficients indéterminés. $x^4 + px^2 + qx + r = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$

PLAN DU CHAPITRE

- I) Fonctions du type $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$, $c \neq 0$
- II) Fonctions du type $x \mapsto \frac{ax^2+bx+c}{dx+e}$, $ad \neq 0$
- III) Fonctions du type $x \mapsto \sqrt{ax+b}$, $a \neq 0$
- IV) Fonctions du type $x \mapsto \sin(ax+b)$ ou $x \mapsto \cos(ax+b)$

Travaux pratiques

Avec l'outil informatique

Exercices et problèmes

Mathématiques et culture

I. Fonctions du type $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$

Activités préliminaires

1. On donne, dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$,

les hyperboles $H : y = \frac{2}{x}$ et $H' : y = \frac{x-1}{x-3}$

1) a. Déterminer les asymptotes et le centre de symétrie de chacune des hyperboles H et H' .

b. Tracer les courbes H et H' .

2) Déterminer une translation qui transforme H en H' .

2. Soit ABC un triangle équilatéral de côté 2 cm. M un point variable sur le segment $[AB]$, N le point de $[AC]$ tel que $(MC) \parallel (BN)$, on note $AM = x$ et $AN = f(x)$. Expliciter $f(x)$ et tracer la courbe représentative de la fonction f ainsi définie dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

L'essentiel du cours

a, b, c et d étant quatre réels donnés avec $ad-bc \neq 0$ et $c \neq 0$, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-\frac{d}{c}\}$ par $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan. On a :

- La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{-\frac{d}{c}\}$ et pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-\frac{d}{c}\}$,

$$f'(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}.$$
- (C) est une hyperbole d'équation $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, d'asymptotes les droites d'équations respectives $x = -\frac{d}{c}$ et $y = \frac{a}{c}$ et de centre de symétrie le point $I(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c})$.

Exemple

1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-3\}$ par $f(x) = \frac{2x+1}{x+3}$.

(C) est sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a. Préciser le centre de symétrie I et les asymptotes de l'hyperbole (C) .

b. Ecrire l'équation de la tangente T à la courbe (C) au point A d'abscisse 2.

2) Ecrire l'équation de (C) dans le repère $(I, \vec{i}, \vec{j})$.

3) Tracer la droite T et la courbe (C) .

Solution

1 a. Centre de symétrie I et asymptotes de l'hyperbole

- La courbe (C) admet une asymptote verticale d'équation $x = -3$ et une asymptote horizontale d'équation $y = 2$
- La courbe (C) est une hyperbole de centre de symétrie l'intersection des deux asymptotes, soit $I(-3,2)$

On peut vérifier cela par le fait que pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-3\}$, $(-6-x) \in \mathbb{R} - \{-3\}$ et $f(-6-x) = 4 - f(x)$.

b. Tangente en $A(2,1)$

La tangente T à (C) au point $A(2,1)$ a pour équation $y = f'(2)(x-2)+1$, $T: y = \frac{1}{5}x + \frac{3}{5}$

2) Equation de l'hyperbole (C) dans le repère $(I, \vec{i}, \vec{j})$

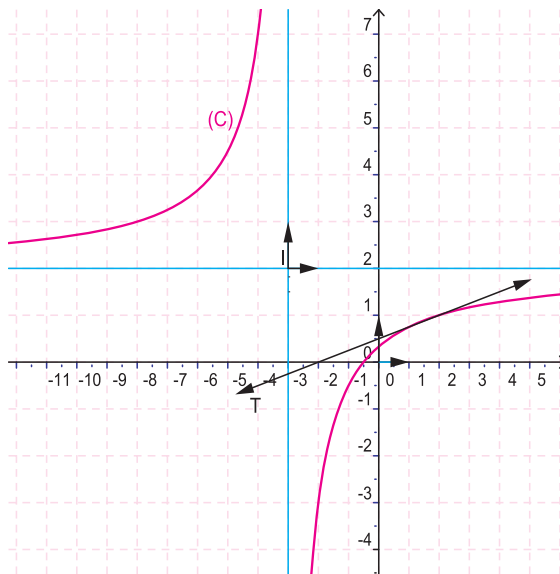
Si $M(x,y)$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $M(X,Y)$ dans $(I, \vec{i}, \vec{j})$, on a $\vec{IM} = \vec{IO} + \vec{OM}$ par suite

$X = x+3$ et $Y = y-2$.

$$\begin{aligned} M \in (C) &\Leftrightarrow (x \in \mathbb{R} - \{-3\} \text{ et } y = \frac{2x+1}{x+3}) \\ &\Leftrightarrow (X \in \mathbb{R}^* \text{ et } Y+2 = \frac{2(X-3)+1}{(X-3)+3}) \\ &\Leftrightarrow (X \in \mathbb{R}^* \text{ et } Y = \frac{-5}{X}) \end{aligned}$$

(C) a donc pour équation $Y = \frac{-5}{X}$ dans le repère $(I, \vec{i}, \vec{j})$

3) Courbe (C)



Auto évaluation

1. 1) Tracer dans un repère orthogonal les courbes P et H d'équations respectives

$$y = x^2 - 4x + 2 \text{ et } y = \frac{3}{x}$$

2) Utiliser le graphique précédent pour donner une valeur approchée de la solution de l'équation $x^3 - 4x^2 + 2x - 3 = 0$.

2. 1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par $f(x) = \frac{1}{x-2}$.

(C) est sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a. Donner le centre de symétrie I et les asymptotes de l'hyperbole (C).

b. Ecrire l'équation de la tangente T à la courbe (C) au point A d'abscisse 3.

2) Ecrire l'équation de (C) dans le repère $(I, \vec{i}, \vec{j})$.

3) Tracer la droite T et la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4) a. Tracer dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe (C') de la fonction $|f|$.

b. Vérifier graphiquement que (C') admet un axe de symétrie. Justifier ce résultat.

3. 1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ par $f(x) = \frac{-2\sqrt{2}x+6}{x+2}$.

(C) est sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Ecrire une équation de la tangente T à la courbe (C) au point A d'abscisse 0.

2) On désigne par I le centre de l'hyperbole (C).

Ecrire une équation de l'image (C') de (C) par la translation de vecteur $\vec{IO}$

3) Tracer la droite T, la courbe (C') puis la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4) a. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $f(x) > 0$.

b. Vérifier graphiquement ce résultat.

5) Déterminer les intersections de (C) avec les axes du repère.

II. Fonctions du type $x \mapsto \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$

Exemple 1

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 2}$.

(C) est sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Etudier les variations de f . Préciser ses extremums éventuels.

2) a. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R} - \{2\}$, $f(x) = x + 1 + \frac{3}{x-2}$

b. Montrer que la courbe (C) admet deux asymptotes dont on précisera les équations.

3) a. Montrer que le point d'intersection I des deux asymptotes est un centre de symétrie de la courbe (C)

b. Ecrire l'équation de la tangente T à la courbe (C) au point A d'abscisse 1.

c. Tracer la droite T et la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4) a. Ecrire l'équation de (C) dans le repère $(I, \vec{i}, \vec{j})$.

b. Retrouver le centre de symétrie de la courbe (C).

Solution

1) Variations de f

f est une fonction rationnelle; elle est alors définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}-\{2\}$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - x + 1}{x - 2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x) = -\infty \quad \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{x^2 - x + 1}{x - 2} \right) = -\infty \quad \bullet \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{x^2 - x + 1}{x - 2} \right) = +\infty$$

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}-\{2\}, f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 1}{(x - 2)^2} = \frac{(x - 2 - \sqrt{3})(x - 2 + \sqrt{3})}{(x - 2)^2}$$

x	$-\infty$	$2 - \sqrt{3}$	2	$2 + \sqrt{3}$	$+\infty$
f'(x)	+	0	-	0	+
f(x)	$-\infty$	$3 - 2\sqrt{3}$	$+\infty$	$3 + 2\sqrt{3}$	$+\infty$

f présente un maximum local en $2 - \sqrt{3}$ qui est $3 - 2\sqrt{3}$ et un minimum local en $2 + \sqrt{3}$ qui est $3 + 2\sqrt{3}$.

$$2) \text{ a. Pour tout } x \in \mathbb{R}-\{2\}, x + 1 + \frac{3}{x - 2} = \frac{(x + 1)(x - 2) + 3}{x - 2} = f(x)$$

b. $\bullet \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$ donc (D) : $x = 2$ est une asymptote verticale de (C)

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (x + 1)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x - 2} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x + 1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x - 2} = 0$$

donc (Δ) : $y = x + 1$ est une asymptote oblique de (C)

3) a. L'intersection des deux asymptotes est le point I(2,3)

pour tout $x \in \mathbb{R}-\{2\}$, on a bien

$$\bullet (4 - x) \in \mathbb{R}-\{2\}$$

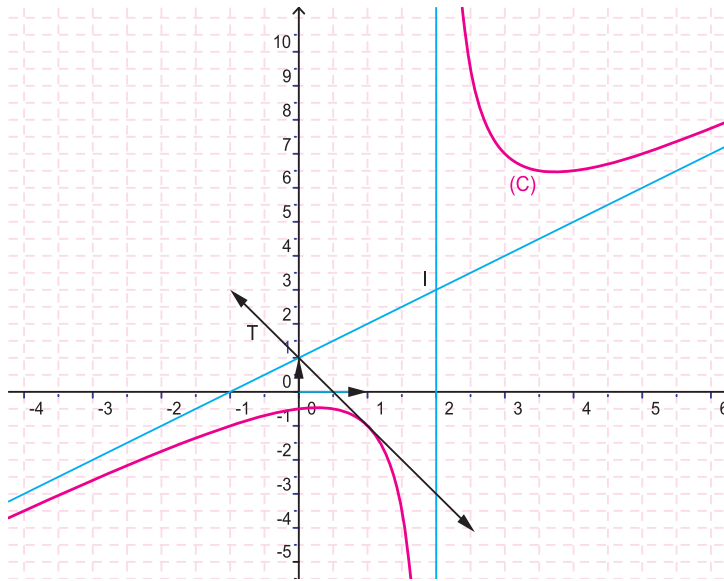
$$\bullet \text{ et } f(4 - x) = (4 - x) + 1 + \frac{3}{(4 - x) - 2} = 5 - x - \frac{3}{x - 2} = 6 - f(x)$$

Le point I est alors un centre de symétrie de (C)

b. Tangente en A(1,-1)

La tangente T à (C) au point A(1,-1) a pour l'équation $y = f'(1)(x - 1) - 1$, T: $y = -2x + 1$

c. Courbe (C)



4) a. Equation de la courbe (C) dans le repère $(I, \vec{i}, \vec{j})$.

Si $M(x,y)$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $M(X,Y)$ dans $(I, \vec{i}, \vec{j})$, on a $\vec{IM} = \vec{IO} + \vec{OM}$ par suite $X = x-2$ et $Y = y-3$.

$$\begin{aligned} M \in (C) &\Leftrightarrow y = x + 1 + \frac{3}{x-2} \\ &\Leftrightarrow (Y+3) = (X+2) + 1 + \frac{3}{(X+2)-2} \\ &\Leftrightarrow Y = X + \frac{3}{X} \end{aligned}$$

D'où (C) : $Y = X + \frac{3}{X}$ dans le repère $(I, \vec{i}, \vec{j})$. La fonction $F : X \mapsto X + \frac{3}{X}$ est impaire.

b. I est alors un centre de symétrie de la courbe (C).

Exemple 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{3\}$ par $f(x) = \frac{2x^2 - 6x - 1}{3 - x}$.

(C) est sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) a. Ecrire $f(x)$ sous la forme $ax + b + \frac{c}{3-x}$
 b. Etudier les variations de f . Vérifier qu'elle n'a pas d'extremums.
- 2) Montrer que la courbe (C) admet deux asymptotes dont une est oblique.
- 3) a. Montrer que le point d'intersection I des deux asymptotes est un centre de symétrie de la courbe (C)
 b. Ecrire l'équation de la tangente T à la courbe (C) au point A d'abscisse 2.
 c. Tracer la droite T et la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- 4) a. Résoudre, graphiquement, l'inéquation $f(x) + 2x < 0$ dans $\mathbb{R}$.
 b. Vérifier ce résultat par un calcul numérique.

Solution

1) a. pour tout $x \in \mathbb{R} - \{3\}$, $f(x) = \frac{2x^2 - 6x - 1}{3 - x} = \frac{-2x(3 - x) - 1}{3 - x} = -2x - \frac{1}{3 - x}$.

b. Variations de f

f est une fonction rationnelle; elle est alors définie, continue et dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R} - \{3\}$.

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-2x - \frac{1}{3 - x} \right) = +\infty$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

- $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \left(-2x - \frac{1}{3 - x} \right) = -\infty$

- $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \left(-2x - \frac{1}{3 - x} \right) = +\infty$

Pour tout $x \in \mathbb{R} - \{3\}$, $f'(x) = -2 - \frac{1}{(3 - x)^2} < 0$

f ne présente aucun extremum

2) Pour tout $x \in \mathbb{R} - \{3\}$, $f(x) = -2x - \frac{1}{3 - x}$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
f(x)	—		—
f(x)	$+\infty$ ↘ —∞		$+\infty$ ↘ —∞

- $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$ (D) : $x = 3$ est une asymptote verticale de (C)

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-2x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{3 - x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (-2x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{3 - x} = 0$

donc (Δ) : $y = -2x$ est une asymptote oblique de (C)

3) a. L'intersection des deux asymptotes est le point I(3, -6)

pour tout $x \in \mathbb{R} - \{3\}$, on a bien

- $(6 - x) \in \mathbb{R} - \{3\}$

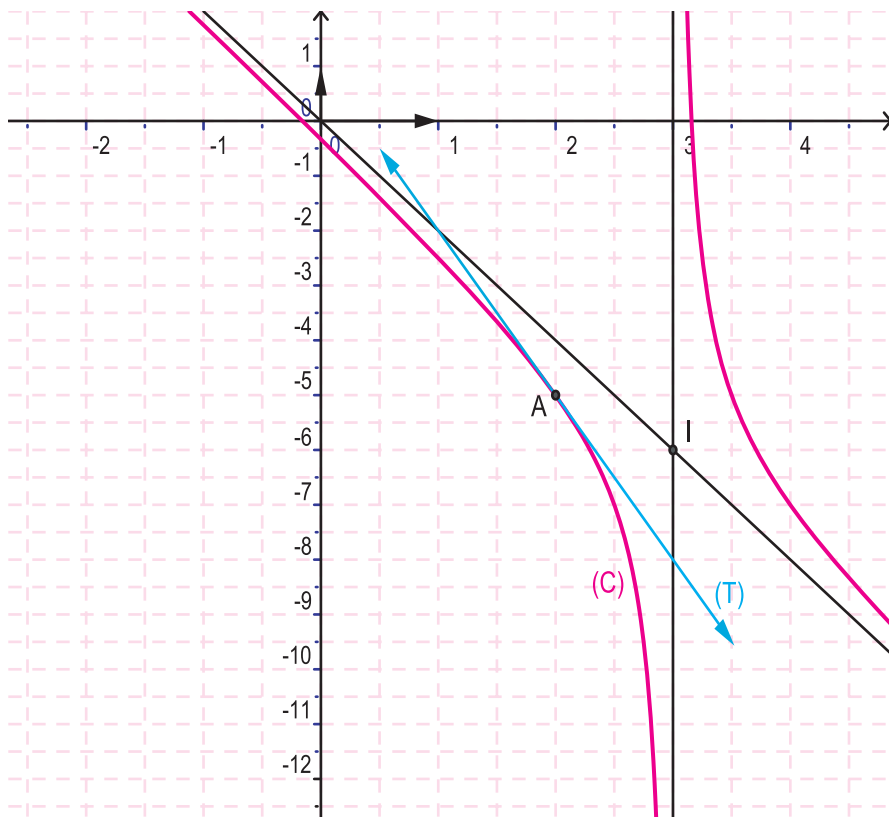
- et $f(6 - x) = -2(6 - x) - \frac{1}{3 - (6 - x)} = -12 + 2x + \frac{1}{3 - x} = -12 - f(x)$

Le point I est alors un centre de symétrie de (C)

b. Tangente en A(2, -5)

La tangente T à (C) au point A(2, -5) a pour équation $y = f'(2)(x - 2) - 5$, T: $y = -3x + 1$

c. Courbe (C)



4) Inéquation (I) : $f(x) + 2x < 0$

Graphiquement

Les solutions de (I) sont les abscisses des points de (C) situés au dessous de l'asymptote (D), soit l'intervalle $]-\infty, 3[$.

Par le calcul, pour tout $x \in \mathbb{R} - \{3\}$, on a:

$$\begin{aligned} f(x) + 2x < 0 &\Leftrightarrow -2x - \frac{1}{3-x} + 2x < 0 \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{3-x} < 0 \\ &\Leftrightarrow x < 3. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (I) est bien $]-\infty, 3[$.

Auto évaluation

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{-x^2 - 1}{x}$.

(C) est sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) a. Ecrire $f(x)$ sous la forme $ax + b + \frac{c}{x}$ où a , b et c sont trois réels que l'on déterminera.
b. Etudier les variations de f puis déterminer ses extremums.
- 2) a. Vérifier que f est impaire, que peut-on dire de sa courbe (C) ?
b. Montrer que la courbe (C) admet deux asymptotes dont une est oblique.

- 3) a. Ecrire une équation de la tangente T à la courbe (C) au point A d'abscisse 1.
b. Tracer la droite T et la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- 4) a. Résoudre, graphiquement l'équation $f(x) = 2$ dans $\mathbb{R}$.
b. Vérifier ce résultat par un calcul numérique.

2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{3\}$ par $f(x) = 2x - 5 + \frac{1}{3-x}$.

(C) est sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Etudier les variations de f. Vérifier qu'elle n'a pas d'extremums.
- 2) a. Vérifier que la droite D : $x = 3$ est une asymptote verticale à la courbe (C).
b. Montrer que la droite $(\Delta) : y = 2x - 5$ est une asymptote à (C).
- 3) a. Vérifier que f n'est ni paire ni impaire
b. Montrer que le point d'intersection I des deux asymptotes est un centre de symétrie de la courbe (C).
c. Ecrire une équation de la tangente T à la courbe (C) au point A d'abscisse 0.
d. Tracer la droite T et la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- 4) a. Soit (Δ') la droite perpendiculaire à (Δ) en I, représenter sur l'axe $(x'Ox)$ les abscisses des points de (C) pour lesquels cette courbe est au dessus de (Δ') .
b. Déterminer ces réels par un calcul numérique.

III. Fonctions du type $x \mapsto \sqrt{ax+b}$

Activités préliminaires

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- $\sqrt{-x+1} = \sqrt{2x-3}$
- $\sqrt{2x+3} = \sqrt{x-2}$
- $\sqrt{3x-2} = x$
- $\sqrt{x+2} = 1$

Activités de découverte

- 1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x}$. (C) est sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
a. Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter géométriquement le résultat.
b. Etudier les variations de f. Préciser la branche infinie de sa courbe représentative.
c. Ecrire l'équation de la tangente T à la courbe (C) au point A d'abscisse 1.
- 2) Tracer la droite T et la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3. 1) Etudier les variations de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = \sqrt{-x-3}$.
- 2) Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- Préciser la branche infinie de la courbe (C) .
 - Vérifier que la courbe (C) admet une demi tangente verticale en $A(-3,0)$.
 - Construire la courbe (C) .

Exemple

Soit la fonction f définie sur $[2, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x-2}$.

(C) est sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- Etudier la dérivabilité de f en 2. Interpréter géométriquement le résultat.
 - Etudier les variations de f .
- Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter le résultat graphiquement.
 - Ecrire l'équation de la tangente T à la courbe (C) au point A d'abscisse 3.
 - Tracer la droite T et la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- Tracer la courbe (P) d'équation $y = x^2 + 2$ et $x \geq 0$.
 - Que peut-on conjecturer sur la relation entre (P) et (C) ?
 - Prouver cette conjecture.

Solution

- 1) a. f est définie et continue sur $[2, +\infty[$ et dérivable sur $]2, +\infty[$

Dérivabilité à droite en 2

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-2}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{\sqrt{x-2}} = +\infty$$

f n'est pas dérivable à droite en 2

- et (C) admet une demi tangente verticale au point $A(2,0)$
- b. Pour tout $x \in]2, +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}} > 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

x	2	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	$+\infty$

$$2) \text{ a. } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = 0$$

donc la courbe (C) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

b. Tangente en $A(3,1)$

La tangente T à (C) au point $A(3,1)$ a pour équation $y = f'(3)(x-3)+1$, $T: y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

c. (Voir graphique)

3) a. (Voir graphique)

b. Conjecture sur la relation entre P et (C)

L'image de (C) par la symétrie S_{Δ} d'axe $\Delta : y = x$ est incluse dans P

c. Soit $M(x,y)$ un point du plan, $M'(x',y') = S_{\Delta}(M)$ on a ($x' = y$ et $y' = x$)

$$M \in (C) \Rightarrow (x \geq 2 \text{ et } y = \sqrt{x-2})$$

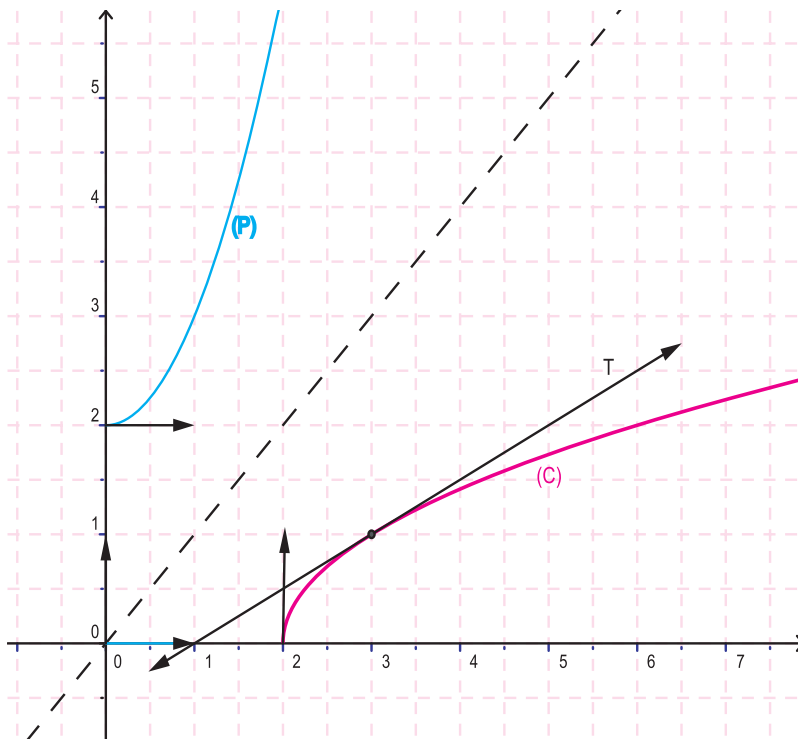
$$\Rightarrow (y^2 = x - 2 \text{ et } y \geq 0)$$

$$\Rightarrow (x = y^2 + 2 \text{ et } y \geq 0)$$

$$\Rightarrow (y' = x'^2 + 2 \text{ et } x' \geq 0)$$

$$\Rightarrow M' \in P$$

Par suite $S_{\Delta}(C)$ est incluse dans P .



Auto évaluation

1. Soit la fonction f définie sur $]-\infty, 1[$ par $f(x) = \sqrt{3-3x}$.

(C) est sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a. Etudier la dérivabilité de f en 1. Interpréter géométriquement le résultat.

b. Etudier les variations de f .

- 2) a. Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter le résultat graphiquement.
 b. Ecrire l'équation de la tangente T à la courbe (C) au point A d'abscisse 0.
 c. Tracer la droite T et la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- 3) a. Tracer la droite (D) : $y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}$
 b. Résoudre, graphiquement puis par le calcul, l'inéquation $\sqrt{1-x} > 1-x$ dans $\mathbb{R}$.

2. Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = \sqrt{3+2x}$.

(C) est sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) a. Donner l'ensemble de définition D de f. Etudier la dérivabilité de f sur D. Interpréter géométriquement les résultats obtenus.
 b. Etudier les variations de f.
- 2) a. Etudier la branche infinie de (C).
 b. Ecrire l'équation de la tangente T à la courbe (C) au point A d'abscisse $\frac{1}{2}$.
 c. Tracer la droite T et la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 3) a. Montrer qu'un point M(x,y) appartient à (C) si et seulement si

$$(x = \frac{1}{2} \quad y^2 = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad y \geq 0)$$

- b. Conclure.

3. Soient les fonctions f et g définies respectivement sur $[-2, +\infty[$ et sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(x) = \sqrt{x+2} \quad \text{et} \quad g(x) = \sqrt{2x}$$

(C) et (C') leurs courbes respectives dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) a. Etudier la dérivabilité de f en -2 et celle de g en 0. Interpréter géométriquement les résultats.
 b. Etudier les variations de f et de g.
- 2) a. Etudier la branche infinie de (C) et celle de (C').
 b. Tracer les courbes (C) et (C') dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- 3) Résoudre, graphiquement puis par le calcul, l'inéquation $f(x) > g(x)$ dans $\mathbb{R}$.

IV. Fonctions du type $x \mapsto \sin(ax+b)$ ou $x \mapsto \cos(ax+b)$

1) Fonctions périodiques

Activités de découverte

1. 1) Expliquer la périodicité des mouvements suivants :

- La rotation d'une aiguille d'une montre.
- Le mouvement d'un pendule.
- Le mouvement d'un solide suspendu à l'extrémité libre d'un ressort écarté de sa position d'équilibre puis relâché.

d. La rotation de la terre autour du soleil.

2) Les contractions du muscle cardiaque résultent des stimulations électriques. Ces impulsions produisent entre deux points du corps une différence de potentiel qui est une fonction du temps. Un électrocardiogramme est la représentation graphique d'une restriction de cette fonction.

De quoi dénote un électrocardiogramme non parfaitement périodique ?

3) Citer d'autres phénomènes périodiques.

2. 1) a. Remarquer que la fonction sinus vérifie: pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x+2\pi) = \sin x$

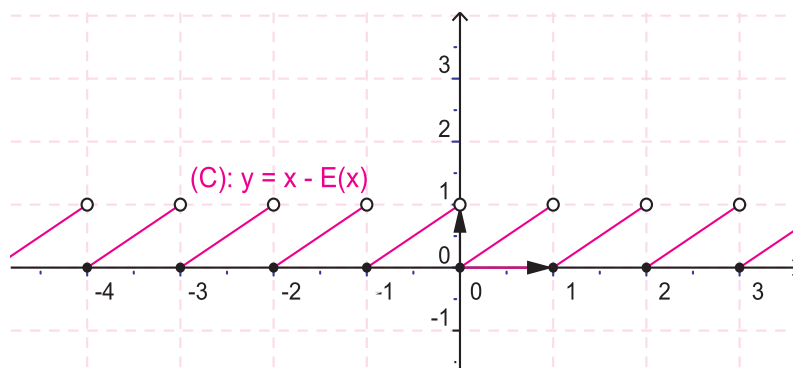
(On dit qu'elle est périodique sur $\mathbb{R}$ et que 2π est une période)

b. Vérifier que la fonction cosinus est périodique sur $\mathbb{R}$ et en donner une période.

2) On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x - E(x)$$

a. Vérifier que la courbe (C) suivante est sa représentation graphique.



b. Prouver que f est périodique sur $\mathbb{R}$ et que 1 est une période de f .

3. Montrer que les fonctions suivantes sont périodiques :

(on donnera deux périodes à chaque fonction)

a. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \sin(2x)$$

b. $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$$

c. $h : \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \operatorname{tg} x.$$

4. Montrer que si un réel T est une période d'une fonction f , alors pour tout entier relatif non nul k , kT est aussi une période de f .

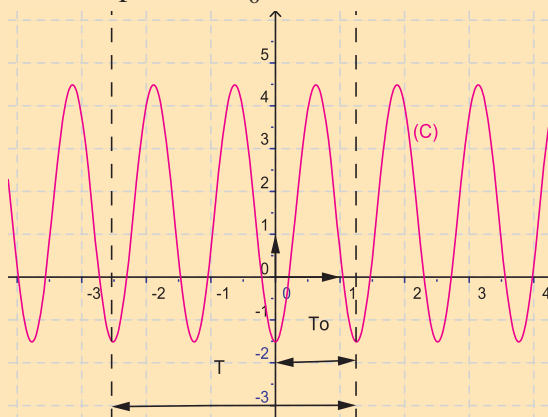
L'essentiel du cours

Fonction périodique

- Une fonction f définie sur un ensemble D est dite **périodique** sur D s'il existe un réel non nul T tel que pour tout $x \in D$, $x+T \in D$ et $f(x+T) = f(x)$.

Le réel T est dit **période** de f .

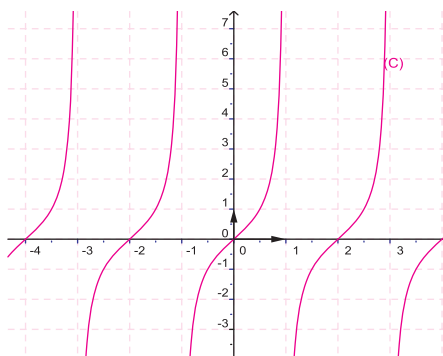
- Si T est une période de f sur D alors pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, nT est une période de f sur D
- La plus petite période strictement positive T_0 de f sur D , si elle existe, est appelée la **période** de f sur D .



Auto évaluation

1. Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

La courbe (C) suivante est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. Vérifier que f est périodique sur $\mathbb{R}$ et en donner une période.



2. Montrer que les fonctions suivantes sont périodiques et faire correspondre à chacune une période parmi les réels $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, π , 2π , 5π et 10π .

a. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

b. $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

c. $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

d. $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto \sin(2x+3)$

$x \mapsto \cos(-3x + \frac{\pi}{2})$

$x \mapsto \sin\frac{1}{2}x$

$x \mapsto \cos(\frac{2}{5}x+1)$

3. Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Construire une courbe (C) qui représente une fonction f périodique sur $\mathbb{R}$ et de période 3.

2) Dérivabilité des fonctions trigonométriques

Activités de découverte

1. 1) On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \sin x$$

a. Recopier et compléter:

x	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2^2}$	$\frac{\pi}{2^5}$	$\frac{\pi}{2^8}$	$\frac{\pi}{2^{12}}$
$\frac{f(x) - f(0)}{x}$					

Que peut-on conjecturer sur $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$?

c. Admettre cette conjecture. Montrer alors que f est dérivable en 0.

2) On considère la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

a. Recopier et compléter :

x	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2^2}$	$\frac{\pi}{2^5}$	$\frac{\pi}{2^8}$	$\frac{\pi}{2^{12}}$
$\frac{g(x + \frac{\pi}{2}) - g(\frac{\pi}{2})}{x}$					

b. Que peut-on conjecturer sur $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{g(x + \frac{\pi}{2}) - g(\frac{\pi}{2})}{x} \right)$?

► On admet, plus généralement, que la fonction $h : x \mapsto \sin(ax+b)$ où a et b sont des réels donnés est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = a \cos(ax+b)$

c. Vérifier la conjecture.

2. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ où a et b sont des réels donnés.

$$x \mapsto \cos(ax+b)$$

1) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(ax + b + \frac{\pi}{2})$

2) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -a \sin(ax+b)$.

3) Etudier la dérivabilité de chacune des fonctions $f : x \mapsto \sin x$, $g : x \mapsto \cos x$

et $h : x \mapsto \operatorname{tg} x$ sur son ensemble de définition.

3. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} \quad (a \in \mathbb{R}), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} ax}{x} \quad (a \in \mathbb{R}).$$

L'essentiel du cours

Théorème (admis) :

La fonction $f : x \mapsto \sin(ax+b)$ où a et b sont des réels donnés est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = a \cos(ax+b)$.

En particulier:

La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin'x = \cos x$

Conséquences :

- La fonction $g : x \mapsto \cos(ax+b)$ où a et b sont des réels donnés est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -a \sin(ax+b)$.

En particulier :

La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos'x = -\sin x$

- La fonction $h : x \mapsto \operatorname{tg} x$ est dérivable sur $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ et pour tout $x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

$$\operatorname{tg}'x = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Limites particulières:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} = a$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} ax}{x} = a$$

Auto évaluation

1. Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \sin 5x \quad g : x \mapsto \sin(3x+4) \quad h : x \mapsto \cos(-2x+2) \quad k : x \mapsto x - \sin^2 x + \cos^2 x.$$

2. Même question pour les fonctions:

$$F : x \mapsto \frac{1}{\cos x} \quad G : x \mapsto \frac{1}{\sin x} \quad H : x \mapsto \frac{\cos x}{1 - \sin x} \quad K : x \mapsto \frac{\sin 2x}{1 - 2\cos x}.$$

3. Dans chacun des cas suivants, étudier la limite éventuelle de la fonction f en 0.

$$u : x \mapsto \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x} \quad v : x \mapsto \frac{1 - \cos x}{x \sin x} \quad p : x \mapsto \frac{\sin 7x}{\operatorname{tg} 5x} \quad q : x \mapsto \frac{\cos x}{x}.$$

3) Exemples de fonctions du type $x \mapsto \sin(ax+b)$ ou $x \mapsto \cos(ax+b)$

Activités préliminaires

1. 1) Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ puis dans $\mathbb{R}$, les équations :

$$\bullet \sin x = 0 \quad \bullet \cos x = 0 \quad \bullet \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \bullet \cos x = -\frac{1}{2}$$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ les équations :

$$\bullet \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \bullet \cos(-2x - \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$$

2. 1) Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ puis dans $\mathbb{R}$, les inéquations :

$$\bullet \sin x > 0 \quad \bullet \cos x > 0 \quad \bullet \sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \bullet \cos x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2) Résoudre dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, les inéquations : $\bullet \sin(2x + \frac{\pi}{3}) > 0 \quad \bullet \cos(-2x + \frac{3\pi}{4}) \leq 0$

3) Résoudre dans $[0, 6\pi[$, les inéquations : $\bullet \sin(-\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{2}) > 0 \quad \bullet \cos(\frac{1}{3}x + \pi) \geq 0$

Activités de découverte

3. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(ax + b)$ où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.

On se propose de démontrer que f est périodique et que la période de f est $\frac{2\pi}{|a|}$.

1) Soit T est une période de f .

a. En calculant $f(0)$, $f(T)$, $f(-\frac{\pi}{2a})$ et $f(-\frac{\pi}{2a} + T)$, montrer que l'on a :

$$\sin(aT + b) = \sin b \text{ et } \cos(aT + b) = \cos b$$

b. Montrer que $T = \frac{2k\pi}{2a}$ où $k \in \mathbb{Z}^*$.

c. En déduire que $\frac{2\pi}{|a|}$ est **la période** de f .

2) Montrer, de façon analogue, que $\frac{2\pi}{|a|}$ est la période de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \cos(ax + b)$ où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.

4. On se propose de tracer les courbes représentatives respectives (C) et (C') des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x$ et $g(x) = \cos x$.

1) a. Remarquer qu'il suffit d'étudier la fonction f sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

b. Etudier les variations de f sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

c. Ecrire une équation de la tangente T à la courbe (C) au point O d'abscisse 0 .

d. Tracer la courbe (C) de la fonction f dans un repère orthogonal

(on expliquera les différentes étapes de la construction).

- 2) a. Remarquer qu'il suffit d'étudier la fonction g sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
 b. Etudier les variations de g sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
 c. Ecrire une équation de la tangente T' à la courbe (C') au point I d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.
 d. Tracer la courbe (C') de la fonction g dans un autre repère orthogonal
 (on expliquera les différentes étapes de la construction).

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(2x - \frac{3\pi}{4})$

- 1) a. Montrer que f est périodique et que π est une période de f .
 b. Montrer que f' s'annule sur $[0, \pi]$ en $\frac{\pi}{8}$ et en $\frac{5\pi}{8}$.
 c. Etudier les variations de f sur $[0, \pi]$.
 2) Tracer la courbe (C) , représentative de f , dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
 3) Utiliser le graphique pour donner le nombre de solutions de l'équation
 $f(x) = -\frac{1}{2}$ dans $[-\pi, 2\pi]$

Solution

1) a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+\pi) = \sin(2(x+\pi) - \frac{3\pi}{4}) = \sin(2x - \frac{3\pi}{4}) = f(x)$ d'où f est périodique et π est une période de f sur $\mathbb{R}$, il suffit alors de l'étudier sur $[0, \pi]$.

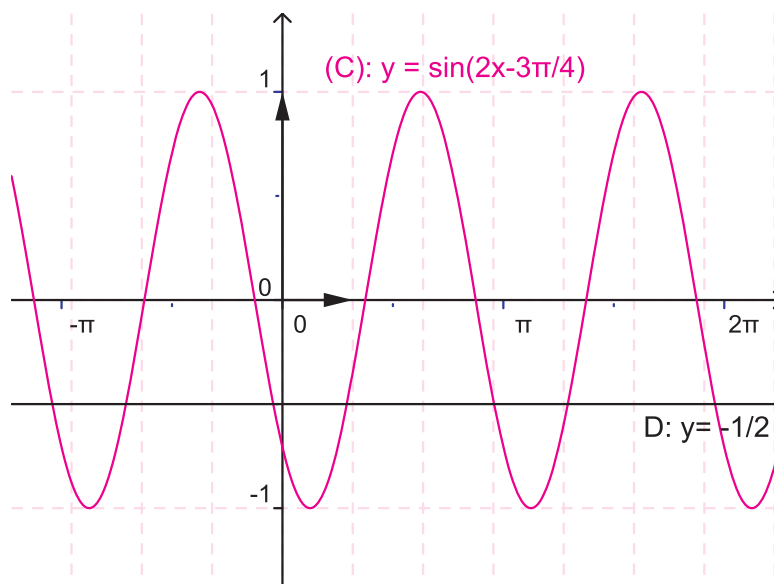
b. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2\cos(2x - \frac{3\pi}{4})$.

$(f'(x) = 0 \text{ et } x \in [0, \pi]) \Leftrightarrow (x = \frac{5\pi}{8}) \text{ ou } (x = \frac{\pi}{8})$

c. Tableau de variations de f sur $[0, \pi]$.

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{8}$	π
$f'(x)$	$(-\sqrt{2})$	0	0	$(-\sqrt{2})$
$f(x)$	$(-\frac{\sqrt{2}}{2})$		1	$(-\frac{\sqrt{2}}{2})$

2) Courbe représentative de la fonction f



3) L'équation $f(x) = -\frac{1}{2}$ admet, dans $[-\pi, 2\pi]$, six solutions.

Auto évaluation

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(-\frac{1}{2}x + \pi)$

- 1) a. Montrer que f est périodique et que 4π est une période de f.
 b. Résoudre, dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0, 4\pi]$, l'équation (E) : $\sin(\frac{x}{2}) = 0$.
 c. Etudier les variations de f sur $[0, 4\pi]$.
- 2) Tracer la courbe (C), représentative de f, dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- 3) Utiliser le graphique pour étudier le signe de f sur $[0, 4\pi]$.

2. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \cos(3x + \pi) + \sin(3x)$

- 1) a. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{2} \sin(3x - \frac{\pi}{4})$
 b. Montrer que g est périodique et que $\frac{2\pi}{3}$ est une période de g.
 c. Etudier les variations de g sur $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$.
- 2) Tracer la courbe (C'), représentative de g, dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- 3) Donner les intersections de (C') avec les axes de coordonnées.

TP1 A. 1) Etudier les variations de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$t \mapsto t + 1 + \frac{1}{t-2}.$$

2) Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a. Déterminer les asymptotes de la courbe (C).

b. Tracer la courbe (C).

B. Un mobile se déplace sur un axe (Δ) d'origine I son abscisse $x(t)$ à l'instant t est

$$x(t) = t + 1 + \frac{1}{t-2}. \quad (t \text{ varie dans l'intervalle } [0, 1,9]).$$

1) Utiliser la courbe (C) pour décrire la trajectoire du mobile sur l'axe (Δ).

2) Soit A un point d'abscisse a, de l'axe (Δ) où le mobile passe deux fois aux instants t_1 et t_2 .

a. Montrer que $t_1 t_2 - 2(t_1 + t_2) + 3 = 0$ (On pourra utiliser la somme et le produit des solutions d'une équation du second degré)

b. Retrouver alors, le point où le mobile rebrousse chemin.

TP2 Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère l'ensemble E des points $M(x,y)$ tels que $x^2 - y^2 = 1$.

1) a. Vérifier que E n'est pas vide.

b. Montrer que si $M(x,y) \in E$ alors $|x| \geq 1$.

c. Montrer que les axes des coordonnées sont des axes de symétrie de E.

d. Montrer que le point O est un centre de symétrie de E.

2) Soient les vecteurs $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$

a. Montrer que $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthogonal du plan.

b. Soit M un point du plan. On pose $M(x,y)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $M(X,Y)$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Ecrire x et y en fonction de X et Y.

3) a. Ecrire une équation de E dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

b. Quelle est la nature de E ?

TP3 Un point matériel est animé d'un mouvement rectiligne sinusoïdal sur un axe

autour de la position $x = 0$. A l'instant $t = 0$, le mobile est situé à l'origine et est animé d'une vitesse de $0.4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ dans le sens négatif.

La fréquence du mouvement est $f = 5 \text{ Hz}$.

1) Déterminer l'équation horaire du mouvement.

2) Calculer la position et la vitesse du mobile à la date $t = 2 \text{ s}$.

3) Tracer, dans un repère convenablement choisi, la représentation graphique de ce mouvement pendant les trois premières secondes.

1 a, b, c et d étant quatre réels donnés tels que $a \neq 0$ et $c \neq 0$, on considère la famille de fonctions f définies sur $\mathbb{R} - \{-d\}$ par $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+d}$.

1) Construire à l'aide d'un logiciel et sur des repères différents, les courbes de quatre fonctions de la famille ci-dessus en choisissant des réels a, b, c et d vérifiant:

1) $a > 0$ et $c > 0$ 2) $a > 0$ et $c < 0$ 3) $a < 0$ et $c > 0$ 4) $a < 0$ et $c < 0$

2) Par quoi est caractérisé chaque cas de figure ?

3) a. Définir la fonction dérivée de f.

b. Retrouver une justification de la réponse à la question 2).

2 On considère, dans un repère orthonormé du plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe $(\zeta) = \{M(x,y) \text{ tels que } (x^4 - y^2)(y^4 - x^2) = 0, x \in [-1,1], \text{ et } y \in [-1,1]\}$.

1) a. Construire la courbe (ζ) à l'aide d'un logiciel.

b. Donner les axes de symétrie de la courbe (ζ) .

c. Remarquer que (ζ) est la réunion de courbes de fonctions qu'on déterminera.

2) a. Construire, dans une autre page de travail et à l'aide du même logiciel, la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \sqrt{x}$

b. Retrouver la courbe (ζ) , à l'aide de ce même logiciel.

3 On se propose de déterminer l'ensemble des points dont la valeur absolue de la différence des distances à deux points donnés est constante.

a. Utiliser un logiciel de construction géométrique pour:

- Faire apparaître un repère orthonormé.
- Placer les points **F(-1,-1)** et **F'(3,3)**
- Tracer les droites d'équations respectives $x = 1$ et $y = 1$.
- Tracer la droite (FF').
- Tracer le cercle (ζ) de centre F et de rayon 4
- Placer un point N variable sur (ζ) .
- Tracer la médiatrice (Δ) du segment [F'N]
- Appeler M le point d'intersection de (Δ) et (NF).
- Vérifier que $|MF' - MF| = 4$.
- Faire varier N sur (ζ) .
- Observer le lieu (H) décrit par le point M.

b. Conjecturer sur la nature de (H).

c. Admettre la conjecture et trouver, en s'appuyant sur le graphique, l'équation de la courbe (H).

4 Deux pendules P_1 et P_2 oscillant en même temps font à tout instant t des écarts angulaires avec la verticale donnés respectivement par $a_1(t) = 6\cos(0.3t + \frac{\pi}{4})$ et $a_2(t) = 3\sin(0.3t)$. ($a_1(t)$ et $a_2(t)$ en degrés et t en secondes).

- 1) Tracer, à l'aide d'un logiciel et dans un repère convenablement choisi, les représentations graphiques des fonctions $t \mapsto a_1(t)$ et $t \mapsto a_2(t)$ sur l'intervalle $[0, 15]$.
- 2) Utiliser le graphique pour donner les dates t des 15 premières secondes, pour lesquels les pendules P_1 et P_2 font les mêmes écarts avec la verticale.

Exercices et problèmes

- 1** 1) Construire dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la parabole (P) d'équation $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$ et l'hyperbole (H) d'équation $y = \frac{1}{x}$.
- 2) En déduire, graphiquement, que l'équation $\frac{1}{2}x^3 + x - 1 = 0$ admet une seule solution α appartenant à l'intervalle $]0, 1[$.
- 3) Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $f(x) > g(x)$.

- 2** 1) Construire, dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, l'hyperbole (H) d'équation $y = \frac{x+3}{2x-1}$.
- 2) Soit $M(x, y)$ un point de (H). Déterminer les coordonnées du point M' image du point M par la symétrie centrale de centre $\Omega(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
- 3) Déterminer l'équation de la courbe (H') symétrique de (H) par rapport au point Ω . Conclure.

3 On considère les fonctions f et g définies par : $f(x) = (x+1)^2$ et $g(x) = \frac{1}{x+1}$. On note (C) et (C') leurs courbes respectives dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Tracer les courbes (C) et (C').
- 2) Résoudre, graphiquement, dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) \geq g(x)$.
- 3) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = (x+1)|x+1|$. Utiliser (C) pour construire la courbe représentative de h .
- 4) Soit la fonction k définie par : $k(x) = \begin{cases} \sup(g(x), h(x)) & \text{si } x \in]-\infty, -1[\\ \inf(g(x), h(x)) & \text{si } x \in]-1, +\infty[\end{cases}$
 - a. Tracer la courbe (C'') de k dans le même repère.
 - b. Déduire le tableau de variation de k .

4 Soit (H^+) la branche de l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) α un réel strictement positif et M le point de (H^+) d'abscisse α .

- 1) Ecrire l'équation de la tangente T à (H^+) en M .
- 2) a. Montrer que T coupe la demi droite $[Ox)$ en un point A dont on donnera l'abscisse.
b. Préciser comment l'on peut construire la tangente à (H^+) en un point M donné.

5 Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Une droite Δ variable pivote autour du point $A(3, 2)$. Δ coupe l'hyperbole (H) d'équation $y = \frac{2}{x}$ en deux points P et Q . On désigne par I le milieu du segment $[PQ]$.

- 1) Si $\Delta : y = ax + b$. Déterminer les coordonnées des points P, Q et I .
- 2) Quel est l'ensemble des points I ?

6 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par : $f(x) = \frac{2x+4}{x+1}$. On désigne par (H) la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Tracer la courbe (H) de la fonction f .
- 2) Soit (P) la parabole d'équation $y = -x^2 + 4$.
a. Tracer la parabole (P) .
b. Montrer que (H) et (P) ont trois points communs dont-on précisera les coordonnées.
- 3) Soit la fonction g définie par $g(x) = \sup(f(x), -x^2 + 4)$
a. Dresser le tableau de variation de g .
b. Discuter, suivant les valeurs du réel a , le nombre de solutions de l'équation $g(x) = a$.

7 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère la fonction f définie

$$\text{par : } f(x) = \begin{cases} \frac{2x-1}{x-1} & \text{si } x \in]-\infty, 0[\cup [3, +\infty[\\ \frac{1}{2}x^2 - x + 1 & \text{si } x \in [0, 3[\end{cases}$$

- 1) a. Montrer que f est dérivable en 0 .
b. Ecrire une équation de la tangente à la courbe (C) de f au point d'abscisse 0 .
- 2) Etudier la dérivabilité de f en 3 .
- 3) Dresser le tableau de variation de f .
- 4) a. Préciser l'asymptote de (C) .
b. Construire la courbe (C) .

8

On donne, ci-contre, la courbe représentative (C) d'une fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) a. Déterminer, graphiquement les limites de f en 0^+ ,

0^- , $-\infty$ et en $+\infty$

b. Préciser les asymptotes de (C).

c. Dresser le tableau de variation de f .

d. Déterminer, graphiquement, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = x$.

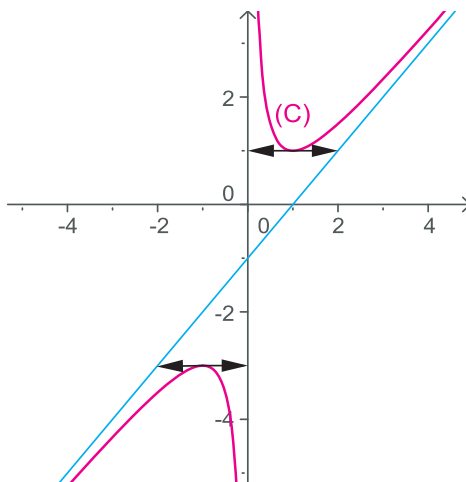
2) On suppose que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x}$ où a , b et c sont trois réels.

Déterminer les trois réels a , b et c .

3) Soit la fonction g définie par $g(x) = f(|x|)$.

a. Déduire de (C) la courbe représentative (C') de g .

b. Déterminer, graphiquement, le nombre de solutions de l'équation $x^2 + 1 = 3|x|$



9

1) Construire dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative (C) de la fonction f définie par : $f(x) = \frac{3-x}{x}$.

2) Soient A et B les points de (C) d'abscisses respectives 1 et 3. Trouver une équation cartésienne de la droite (AB).

3) Une parallèle quelconque à l'axe $(y'Oy)$ coupe la courbe (C) au point M et coupe la droite (AB) en N. On désigne par P le milieu du segment [MN].

Montrer que les coordonnées x et y du point P vérifient la relation : $y = \frac{-x^2 + 2x + 3}{2x}$.

4) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = \frac{-x^2 + 2x + 3}{2x}$. On désigne par (C') sa courbe représentative.

a. Montrer que la droite $\Delta : y = -\frac{1}{2}x + 1$ est une asymptote de la courbe (C'). Quelle est l'autre asymptote de (C')?

b. Etudier les variations de g .

c. Construire la courbe (C') sur le même repère que la courbe (C).

5) Déterminer les coordonnées des points P de (C') distinct de A tel que le triangle AMN soit isocèle de sommet principal A.

10 Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a. Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R} - \{2\}$, on a : $f(x) = x + \frac{4}{x - 2}$.

b. Préciser les asymptotes de (C).

c. Montrer que le point $I(2, 2)$ est un centre de symétrie de (C).

2) a. Dresser le tableau de variation de f .

b. Construire (C).

3) Soit la fonction g définie par $g(x) = \frac{x^2}{|x| - 2}$

a. Montrer que g est paire.

b. Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$, on a : $g(x) = f(x) + 2$.

c. Dédurre de (C) la courbe représentative (C') de g .

11 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 5x & \text{si } x < 2 \\ \frac{x^2 - 5x + 8}{x - 1} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Montrer que f est dérivable en 2.

2) Dresser le tableau de variation de f .

3) Montrer que la droite $\Delta : y = x - 4$ est une asymptote de la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

4) a. Ecrire une équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 2.

b. Construire la tangente T et la courbe (C).

12 Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 1}$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a. Montrer que la droite $D : y = x - 3$ est une asymptote de (C).

b. Préciser l'autre asymptote de (C).

2) a. Dresser le tableau de variation de f .

b. Construire (C).

3) Soit la fonction g définie par : $g(x) = 4 + \frac{x^2}{1 - |x|}$.

a. Montrer que g est paire.

b. Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, on a : $g(x) = -f(x)$.

c. Construire alors la courbe représentative de g .

13 On donne les deux fonctions f et g définies par : $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$ et $g(x) = x^2-3x-3$

On désigne par (C) et (C') les courbes respectives des fonctions f et g dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) a. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, on a $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$.
 b. Etudier les variations de f .
 c. Construire (C) .
- 2) a. Déterminer les points d'intersection des deux courbes (C) et (C') .
 b. Montrer que les deux courbes (C) et (C') ont la même tangente T au point d'abscisse 0.
 c. Tracer la tangente T et la courbe (C') dans le même repère que celui de (C) .
 d. Résoudre, graphiquement, l'inéquation : $\frac{1}{x-1} \geq \frac{x^2-3x-3}{x^2+3}$.

14 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par : $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2x-7}{x-3} & \text{si } x < -1 \\ \frac{x-3}{x^3+x^2+2} & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

- 1) Etudier la continuité et la dérivabilité en -1 .
- 2) Montrer que la droite $D : y = x + 5$ est une asymptote de (C) au voisinage de $-\infty$.
- 3) Dresser le tableau de variation de f .
- 4) Construire (C) .
- 5) Soit A le point de coordonnées $(1, 4)$.

Existe-t-il des tangentes à (C) passant par le point A ?

15 Dans l'impression d'un livre on doit respecter sur chaque page des marges de 2cm à gauche et à droite, de 3cm en haut et en bas. On désigne par x la mesure, en cm, de la largeur d'une page entière ($x < 20$) et par y la mesure de sa hauteur. L'aire totale de la page étant de 600 cm^2 .

- 1) Exprimer la hauteur y de la page en fonction de x .
- 2) Montrer que l'aire $A(x)$ de la surface imprimable est donnée par la relation :

$$A(x) = 624 - 6x - \frac{2400}{x}$$

- 3) Quelles doivent être les dimensions d'une page du livre pour que : $A(x) = 352 \text{ cm}^2$?

16 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $f(x) = \frac{x^2-3x+1}{x-1}$.

(C) est sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Ecrire $f(x)$ sous la forme $ax + b + \frac{c}{x-1}$
- 2) a. Montrer que la courbe (C) admet deux asymptotes dont une est oblique.
 b. Montrer que le point d'intersection I des deux asymptotes est un centre de symétrie de (C) .

- 3) a. Etudier les variations de f . Déterminer ses extremums.
 b. Tracer la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- 4) a. Soit $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$. Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{j}$ sont deux vecteurs directeurs respectifs de l'asymptote oblique et de l'asymptote verticale.
 b. Vérifier que $(I, \vec{u}, \vec{j})$ est un repère du plan.
 c. Soit M un point de coordonnées (x, y) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et de coordonnées (X, Y) dans le repère $(I, \vec{u}, \vec{j})$. Exprimer x et y en fonction de X et Y .
 d. Ecrire l'équation de (C) dans le repère $(I, \vec{u}, \vec{j})$.

17

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $f(x) = \frac{2x^2 + 3x}{x + 1}$.
 (C) est sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) a. Ecrire $f(x)$ sous la forme $ax + b + \frac{c}{x + 1}$
- 2) a. Déterminer les asymptotes de la courbe (C) .
 b. Montrer que le point d'intersection I des deux asymptotes est un centre de symétrie de (C) .
- 3) a. Etudier les variations de f . Déterminer ses extremums.
 b. Tracer la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- 4) Comment obtenir, à partir de (C) les courbes représentatives des fonctions g , h et k définies par $g(x) = |f(x)|$, $h(x) = f(|x|)$ et $k(x) = -1 + f(x-1)$? Tracer ces courbes.

18

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{9 - 2x}$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) a. Déterminer l'ensemble de définition E de f .
 b. Construire la courbe (C) .
- 2) Soit le point A des coordonnées $(4, 0)$ et M le point de (C) d'abscisse x . ($x \in E$)
 On pose $g(x) = AM$.
 a. Préciser l'ensemble de définition de g .
 b. Exprimer $g(x)$ en fonction de x .
- 3) On désigne par (D) la courbe représentative de la fonction g .
 a. Montrer que (C) et (D) se rencontrent en un seul point B qu'on déterminera.
 b. Montrer que (D) est la tangente à (C) au point B .

19 Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{si } x \in]-\infty, 1] \\ \sqrt{x-1} & x \in [1, +\infty[\end{cases}$

- 1) a. Etudier la dérivabilité de f en 1.
b. Dresser le tableau de variation de f .
- 2) Construire la courbe représentative (C) de f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- 3) Soit la fonction g définie par : $g(x) = |f(x)|$
a. Dédurre de (C) la courbe représentative (C') de g .
b. Dresser le tableau de variation de g .
- 4) Résoudre, graphiquement, l'équation $g(x) = -x - 1$.

20 Soit (C) la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = 2\sqrt{x}$ dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit A le point de (C) de coordonnées $(1, 2)$. A tout réel $x > 0$ et différent de 1, on associe le point M de (C) d'abscisse x et on désigne par $m(x)$ le coefficient directeur de la droite (AM) .

- 1) Expliciter $m(x)$.
- 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} m(x)$. Interpréter ce résultat.

21 Chacune des fonctions f, g, h et k définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par :

$$f(x) = \sin(6x), g(x) = 2x - E(2x+1), h(x) = \cos(-2\pi x + 1) \text{ et } k(x) = 2\sin\left(\frac{1}{3}x + \pi\right).$$

a au moins une période dans l'ensemble $E = \{2, 6\pi, 1, \frac{\pi}{3}, -\pi\}$.

Faire cette correspondance.

22 Montrer que chacune des fonctions suivantes est périodique sur $\mathbb{R}$ et donner la période:

$$f: x \mapsto \sin(-2x + \pi), g: x \mapsto \sin\left(\frac{2}{5}x - 1\right), h: x \mapsto \cos(\pi x) \text{ et } k: x \mapsto \cos(-\sqrt{2}x)$$

23 Etudier le signe de $f(x)$ sur $[-\pi, \pi]$ dans chacun des cas suivants :

$$\text{a. } f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \quad \text{b. } f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{c. } f(x) = \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$$

24 Résoudre dans $[0, \pi]$, chacune des inéquations suivantes :

$$\text{a. } 2\sin x - \sqrt{3} \leq 0 \quad \text{b. } \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) < 0 \quad \text{c. } 2\sin(2x + \frac{\pi}{6}) - 1 > 0 \quad \text{d. } 2\cos 2x \geq 1$$

25 On donne l'expression $A(x) = 2\sin^2 x + \cos x - 1$

- 1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A(x) = (\cos x - 1)(-2\cos x - 1)$
- 2) Déterminer le signe de $A(x)$ sur $[0, 2\pi]$.

26 Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble sur lequel f est dérivable et déterminer sa fonction dérivée f' .

a/ $f(x) = \cos 2x$ b/ $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)$ c/ $f(x) = \sin^2 x$ d/ $f(x) = \cos^3 x$
e/ $f(x) = \sin x \cdot \cos\left(5x - \frac{\pi}{3}\right)$ f/ $f(x) = \operatorname{tg}^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

27 1) a. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos x + \sqrt{3} \sin x = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

b. Déterminer le signe du réel $\cos x + \sqrt{3} \sin x$ sur $[0, 2\pi]$.

2) Soit la fonction f définie sur $[0, 2\pi]$ par $f(x) = \sin x - \sqrt{3} \cos x$

a. Calculer $f'(x)$.

b. Dresser le tableau de variation de f sur $[0, 2\pi]$.

28 Etudier la limite éventuelle de la fonction f en 0 dans chacun des cas suivants :

a. $f(x) = \frac{1 - \cos 2x}{x}$ b. $f(x) = \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$ c. $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x \sin x}$ d. $f(x) = \frac{1 - \cos^2 x}{x^2}$
e. $f(x) = \frac{\sin^2 x - \sin 2x}{x}$ f. $f(x) = \frac{\cos 2x - 2\cos x + 1}{\sin 2x}$ g. $f(x) = \frac{\sin x}{\cos 2x - 1}$ h. $f(x) = \frac{\cos x - 1}{\sin^5 x}$

29 Soit la fonction f définie par : $f(x) = -2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a. Montrer qu'il suffit d'étudier f sur $[0, \pi]$.

b. Montrer que pour tout entier k le point $I_k\left(\frac{\pi}{3} + k\pi, 0\right)$ est un centre de symétrie de (C) .

c. Montrer que les droites $D_k : x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ sont des axes de symétries de (C) .

2) a. Dresser le tableau de variation de f sur $[0, \pi]$.

b. Tracer la courbe de la restriction de f à l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

30 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \sin(\omega t + \varphi)$ où $\omega \in \mathbb{R}^*_+$ et $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

1) Déterminer les deux réels ω et φ pour que la période de f soit égale à π et que $f(0)$ soit égale à $\frac{1}{2}$.

2) Etudier la fonction f obtenue et tracer sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

31 Un triangle ABC , isocèle de sommet principal A , est inscrit dans un cercle de centre O et de rayon 1. Soit H le projeté orthogonal de A sur $[BC]$.

On désigne par x une mesure de l'angle $\widehat{HOC}$, on suppose que $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

1) a. Exprimer BC et AH en fonction de x .

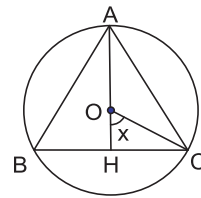
b. Montrer que l'aire du triangle ABC est égale à $\sin x \cdot (1 + \cos x)$.

2) On considère la fonction f définie par : $f(x) = \sin x \cdot (1 + \cos x)$ avec $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

a. Calculer $f'(x)$.

b. Vérifier que $f'(x) = 2\cos^2 x + \cos x - 1$.

c. Dresser le tableau de variation de f .



3) a. Montrer qu'il existe une valeur x_0 de x que l'on déterminera pour laquelle l'aire du triangle ABC est maximale.

b. Quelle est la nature du triangle ABC pour la valeur x_0 ?

32 L'équation horaire du mouvement d'un oscillateur mécanique rectiligne est donnée par la relation : $x(t) = 3\cos(2t + \frac{\pi}{4})$ avec $x(t)$ en cm et t en s.

1) Déterminer la période et la fréquence des oscillations.

2) Exprimer la vitesse et l'accélération de l'oscillateur en fonction de t .

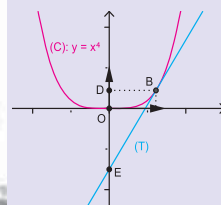
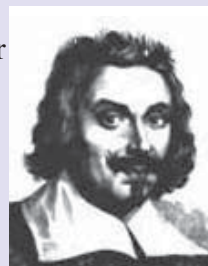
3) Calculer la vitesse et l'élongation aux dates $t = 0$ s et $t = 4$ s.

4) Tracer, dans un repère convenablement choisi, la représentation graphique de la fonction $t \mapsto x(t)$ sur l'intervalle $[0, 10]$.

Savoir plus sur les tangentes

Evangelista Torricelli (1608-1647) fut un mathématicien et physicien disciple de Galilée. Il donne une méthode pour construire une tangente à une courbe C en un point B quelconque de cette courbe.

«Qu'on prenne ED égale à la longueur DO multipliée par l'exposant de la parabole, donc quatre fois dans le cas présent et la ligne qui joint E et B sera la tangente... »

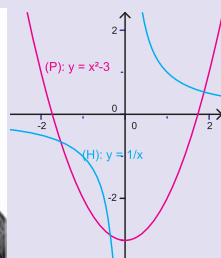
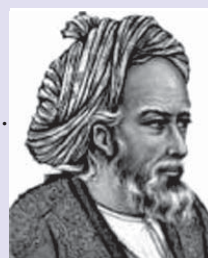


Réflexion sur le texte :

Vérifier la méthode dans le cas où $p = 4$, puis dans le cas où p est un entier naturel quelconque. Généraliser cette méthode au cas où p est un entier négatif.

Savoir plus sur les équations

Omar Khayyâm (1048-1123) poète et mathématicien perse résout géométriquement les équations du 3eme degré. L'équation $x^3 = 3x + 1$ devient $x^2 - 3 = \frac{1}{x}$ et les solutions sont les abscisses des points d'intersection d'une parabole et d'une hyperbole.



Savoir plus sur la trigonométrie

Trigonométrie, branche des mathématiques qui traite des relations entre les côtés et les angles des triangles, et des propriétés des fonctions trigonométriques. On distingue la trigonométrie plane, qui étudie les triangles du plan, et la trigonométrie sphérique, qui s'intéresse aux triangles situés sur la surface d'une sphère (triangles sphériques).

Autrefois, la trigonométrie était essentiellement utilisée en navigation, en topographie et en astronomie, où elle servait notamment à calculer des distances non directement mesurables, telles que la largeur d'un grand lac ou la distance entre la Terre et la Lune. Aujourd'hui, on l'emploie dans tous les domaines de la physique, en particulier dans l'étude des phénomènes périodiques tels que les vibrations du son ou les courants alternatifs. Les fonctions trigonométriques jouent aussi un grand rôle en analyse mathématique.

C'est en Égypte et en Mésopotamie que naît la trigonométrie plus de deux mille ans avant notre ère. Elle y est, en effet, utilisée par les astronomes et les ingénieurs, notamment dans la construction des pyramides égyptiennes. Elle se développe ensuite chez les Grecs au IIe siècle av. J.-C., à l'initiative d'Hipparque d'Alexandrie qui calcule pour un angle donné la longueur de la corde sous-tendue. Trois cents ans plus tard, Ptolémée publie dans son manuel astronomique l'Almageste la première table trigonométrique de l'histoire, pour des angles compris entre 0° et 180° , par intervalle de $0,75^\circ$. Parallèlement aux travaux de Ptolémée, les Indiens élaborent un autre système trigonométrique qui introduit un paramètre se rapprochant du sinus actuel.

S'inspirant des trigonométries grecque et indienne, les mathématiciens arabes définissent les six lignes trigonométriques à la fin du Xe siècle. Ces résultats, qui sont retranscrits par l'astronome Nasir Ala-Din al-Tusi dans son traité du quadrilatère complet, ne seront connus des européens qu'au XVe siècle, grâce à l'astronome et mathématicien allemand Regiomontanus. Un siècle plus tard, l'astronome allemand Rheticus définit le sinus sous sa forme actuelle et le mathématicien français Viète introduit les coordonnées polaires en trigonométrie sphérique. Au XVIIIe siècle, Euler établit les relations entre exponentielles complexes et fonctions trigonométriques, ces dernières pouvant être, dès lors, considérées comme des cas particuliers d'exponentielles.

Deuxième partie

Trigonométrie

8

PLAN DU CHAPITRE

- I.** Angles géométriques.
- II.** Arcs orientés.
- III.** Cosinus et sinus d'un réel
- IV.** Tangente d'un réel

Travaux pratiques

Avec l'outil informatique

Exercices et problèmes

Mathématiques et culture

I. Angles géométriques

Activités préliminaires

1. 1) Un angle donné est de mesure a en radians, b en degrés et c en grades.

Etablir les relations entre a , b et c .

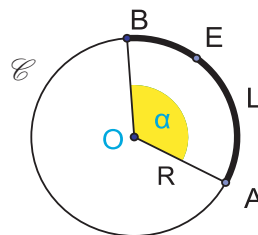
2) Application : Donner, en radians puis en grades, la mesure d'un angle géométrique si celle-ci est de 40 degrés.

2. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon R .

A , B et E trois points distincts du cercle $\mathcal{C}$, α l'angle au centre qui intercepte l'arc géométrique d'extrémités A et B qui contient E . On note L la longueur de cet arc.

a. Déterminer L pour $\alpha = \pi$ et pour $\alpha = 2\pi$.

b. Plus généralement, montrer que $L = \alpha R$



L'essentiel du cours

Formules de conversion

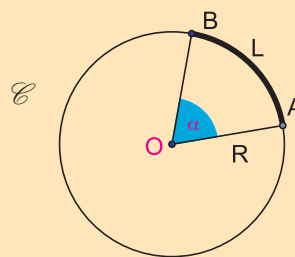
Si a , b et c sont les mesures respectives en radians, en degrés et en grades d'un angle donné alors on a : $\frac{a}{\pi} = \frac{b}{180} = \frac{c}{200}$

Longueur d'un arc

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon R .

A et B deux points du cercle $\mathcal{C}$ tels que $\widehat{AOB} = \alpha$ radians comme l'indique la figure ci-contre.

La longueur L de l'arc géométrique intercepté par l'angle α est $L = R\alpha$.



Cas particulier : pour $R = 1$, $L = \alpha$.

Auto évaluation

1. Répondre par vrai ou faux.

1) La longueur d'un arc de cercle triple lorsque le rayon de ce cercle triple.

2) La somme des mesures des angles d'un quadrilatère convexe est égale à 360° .

3) Un triangle rectangle peut avoir un angle mesurant 92 grades.

2. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon 2. $ABCDEF$ est un hexagone régulier inscrit dans $\mathcal{C}$. Calculer la longueur de chacun des arcs géométriques suivants :
- L'arc d'extrémités A et C et qui contient B .
 - L'arc d'extrémités A et C et qui ne contient pas B .
 - L'arc d'extrémités E et C et qui contient F .
 - L'arc d'extrémités E et C et qui contient D .

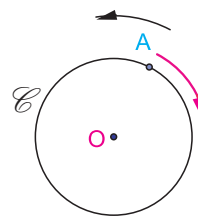
II. Arcs orientés.

Activités de découverte

1. Soient $\mathcal{C}$ un cercle de rayon 1, A un point de $\mathcal{C}$ et L un réel appartenant à $]0, 2\pi[$.

a. Placer sur $\mathcal{C}$ les points M tels que l'arc géométrique d'extrémités A et M soit de longueur L . Vérifier qu'il y'en a deux.

b. Vérifier que si l'on fixe, à partir de A , un sens de parcours sur $\mathcal{C}$, un point M et un seul convient.



► Le sens contraire de celui dans lequel tournent les aiguilles d'une montre est appelé sens direct.

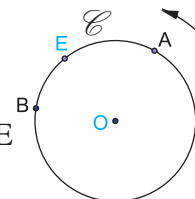
• Orienter le plan c'est choisir un même sens de parcours pour tous les cercles.

• Un cercle trigonométrique est un cercle de rayon 1 dont le sens de parcours choisi est le sens direct.

2. Soit $\mathcal{C}$ un cercle trigonométrique. A , B et E trois points distincts appartenant à $\mathcal{C}$.

Soit L la longueur de l'arc géométrique d'extrémités A et B et qui contient E

► L'arc géométrique d'extrémités A et B et qui contient E est parcouru dans le sens direct, il est dit arc orienté et on le note $\overrightarrow{AB}$.



1) Déterminer la longueur de l'arc géométrique d'extrémités A et B et qui ne contient pas E .

2) On considère un mobile M se déplaçant sur $\mathcal{C}$ toujours dans le même sens et allant de A vers B et on convient que la mesure l du trajet parcouru est égale à :

• La longueur du trajet parcouru, si M se déplace dans le sens direct.

• L'opposé de la longueur du trajet parcouru, si M se déplace dans le sens contraire.

a. On suppose que M se déplace dans le sens direct :

Déterminer l dans le cas où M atteint B

• Pour la première fois.

• Pour la deuxième fois.

• Pour la $k^{\text{ième}}$ fois ($k \in \mathbb{N}^*$).

b. On suppose que M se déplace dans le sens indirect :

Déterminer l dans le cas où M atteint B

• Pour la première fois.

• Pour la deuxième fois.

• Pour la $k^{\text{ième}}$ fois ($k \in \mathbb{N}^*$).

► Tout réel $L + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ est appelé mesure de l'arc orienté $\widehat{AB}$ et on le note $\text{mes}(\widehat{AB})$

3. On considère quatre réels a, b, x et y .

1) Vérifier que si $x = a + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et $y = a + 2k'\pi$, $k' \in \mathbb{Z}$ alors $x - y = 2k''\pi$, $k'' \in \mathbb{Z}$.

► Si $x - y = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, on dit que " x est congru à y modulo 2π " et on note $x \equiv y [2\pi]$

2) Vérifier que si $(x \equiv a [2\pi])$ et $(y \equiv b [2\pi])$ alors $(x+y) \equiv (a+b) [2\pi]$

3) α étant un réel donné.

Montrer qu'il existe un seul entier relatif k tel que $(\alpha + 2k\pi) \in]-\pi, \pi]$.

4. Soit $\mathcal{C}$ un cercle trigonométrique et A, B et C trois points de ce cercle.

1) On suppose que B est dans l'arc orienté d'origine A et d'extrémité C :

a. Vérifier que la longueur de l'arc géométrique associé à l'arc orienté $\widehat{AC}$ est la somme des longueurs des arcs géométriques associés respectivement aux arcs orientés $\widehat{AB}$ et $\widehat{BC}$.

En déduire que $\text{mes}(\widehat{AB}) + \text{mes}(\widehat{BC}) \equiv \text{mes}(\widehat{AC}) [2\pi]$

b. Vérifier que la somme des longueurs des arcs géométriques associés respectivement aux arcs orientés $\widehat{AB}$ et $\widehat{BA}$ est égale à 2π .

En déduire que $\text{mes}(\widehat{BA}) \equiv -\text{mes}(\widehat{AB}) [2\pi]$

2) On suppose que B n'est pas dans l'arc orienté d'origine A et d'extrémité C :

a. Montrer que $\text{mes}(\widehat{AC}) + \text{mes}(\widehat{CB}) \equiv \text{mes}(\widehat{AB}) [2\pi]$

b. En déduire que $\text{mes}(\widehat{AB}) + \text{mes}(\widehat{BC}) \equiv \text{mes}(\widehat{AC}) [2\pi]$

L'essentiel du cours

Orientation du plan

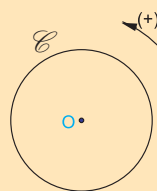
Il est visible que sur un cercle donné, il existe deux sens de parcours :

- L'un de ces sens est dit direct ou positif c'est le sens contraire de celui dans lequel tournent les aiguilles d'une montre.

- L'autre sens est dit indirect ou négatif.

Un cercle est dit **orienté** si on a choisi un sens de parcours sur ce cercle.

Le plan est dit **orienté**, si la convention des sens précédente est adoptée pour tous les cercles du plan.



Cercle trigonométrique

On appelle cercle trigonométrique tout cercle de rayon 1, orienté dans le sens direct.

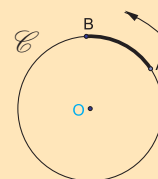
Arcs orientés

Soit $\mathcal{C}$ un cercle trigonométrique.

- A et B deux points distincts de $\mathcal{C}$. Il y a deux arcs géométriques d'origine A et d'extrémité B dont un seul est parcouru suivant l'orientation du cercle $\mathcal{C}$.

Cet arc est appelé arc orienté d'origine A et d'extrémité B et on note $\widehat{AB}$.

- On convient que le couple (A, A) définit un arc orienté dont l'origine et l'extrémité sont confondues.



Mesures d'un arc orienté

Soit $\mathcal{C}$ un cercle trigonométrique $\widehat{AB}$ un arc orienté

L la longueur de l'arc géométrique associé.

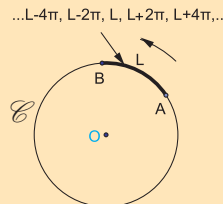
On appelle **mesure** de l'arc orienté $\widehat{AB}$ tout réel $L + 2k\pi$

où k est un entier relatif et on note $\text{mes}(\widehat{AB})$.

Si x et y sont deux mesures de l'arc $\widehat{AB}$,

alors il existe un entier relatif k tel que $x - y = 2k\pi$.

On note $x \equiv y [2\pi]$ et on lit " x est congru à y modulo 2π ".



Mesure principale d'un arc orienté

On appelle mesure principale d'un arc orienté $\widehat{AB}$ l'unique mesure de cet arc, appartenant à $]-\pi, \pi]$.

Propriétés

Soit $\mathcal{C}$ un cercle trigonométrique. A , B et C trois points quelconques de $\mathcal{C}$. On a :

- $\text{mes}(\widehat{AB}) + \text{mes}(\widehat{BC}) \equiv \text{mes}(\widehat{AC}) [2\pi]$ (Relation de Chasles)
- $\text{mes}(\widehat{BA}) \equiv -\text{mes}(\widehat{AB}) [2\pi]$

Auto évaluation

1. Soit $\mathcal{C}$ un cercle trigonométrique et $\widehat{AB}$ un arc orienté de $\mathcal{C}$ dont une mesure est $\frac{2\pi}{3}$.

1) Donner, parmi les réels suivants, ceux qui sont des mesures de l'arc orienté $\widehat{AB}$

- a. $\frac{\pi}{3}$ b. $\frac{14\pi}{3}$ c. $-\frac{18\pi}{3}$ d. $-\frac{2\pi}{3}$

2) Trouver les entiers relatifs k pour lesquels $(\frac{2\pi}{3} + k \frac{\pi}{3})$ est une mesure de l'arc orienté $\widehat{AB}$

2. Soit $\mathcal{C}$ un cercle trigonométrique et $\widehat{AB}$ et $\widehat{CD}$ deux arcs orientés de $\mathcal{C}$ dont deux mesures respectives sont $(125) \frac{\pi}{3}$ et $(-151) \frac{\pi}{4}$.

- 1) Donner la mesure principale de chacun de ces deux arcs.
- 2) Déterminer l'ensemble des mesures de chacun des deux arcs.
- 3) Déterminer, pour chaque arc, une mesure appartenant à $[21\pi, 23\pi[$.

III. Cosinus et sinus d'un réel

On suppose dans toute la suite du chapitre que le plan est orienté dans le sens direct.

1) Repère orthonormé direct du plan

L'essentiel du cours

Soient O un point du plan et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de normes égales à 1. On désigne par $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique de centre O et A et B les points de $\mathcal{C}$ tels que :

$$\vec{u} = \vec{OA} \text{ et } \vec{v} = \vec{OB}$$

Le triplet $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est dit repère orthonormé direct du plan si, $\text{mes}(\widehat{AB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

Auto évaluation

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct du plan.

1) Donner, parmi les repères suivants, ceux qui sont orthonormés directs :

$$\bullet (O, \vec{i}, -\vec{j}) \quad \bullet (O, -\vec{i}, -\vec{j}) \quad \bullet (O, \vec{j}, -\vec{i}) \quad \bullet (O, -\vec{j}, -\vec{i}) \quad \bullet (O, \vec{i} + \vec{j}, \vec{i} - \vec{j})$$

2) Vérifier que le repère $(O, \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} - \vec{j}), \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j}))$ est orthonormé direct.

2) Définitions et propriétés

Activités de découverte

1. Soit α un réel donné. On désigne par $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles trigonométriques de centres respectifs O et O' et par I et I' deux points fixes respectifs de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{C}'$.

1) On pose $\vec{OI} = \vec{i}$ et on rapporte le plan au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit sur le cercle $\mathcal{C}$ le point M tel que $\alpha \equiv \text{mes}(\widehat{IM}) [2\pi]$, notons (x, y) son couple de coordonnées. Faire une figure.

2) On pose $\vec{OI}' = \vec{i}'$ et on rapporte le plan au repère orthonormé direct $(O', \vec{i}', \vec{j}')$.

Soit sur le cercle $\mathcal{C}'$ le point M' tel que $\alpha \equiv \text{mes}(\widehat{I'M'}) [2\pi]$, notons (x', y') son couple de coordonnées.

a. Faire une figure.

b. Que peut-on conjecturer sur x et x' et sur y et y' ?

► On admet cette conjecture et on appelle x et y respectivement **cosinus** de α et **sinus** de α et on note $x = \cos \alpha$ et $y = \sin \alpha$.

2. On rapporte le plan à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et on considère le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ de centre O.

Soit M un point du cercle $\mathcal{C}$. On désigne par M_1 le symétrique de M par rapport à l'axe $(O, \vec{i})$, M_2 son symétrique par rapport au point O et M_3 son symétrique par rapport par rapport à la droite d'équation $y = x$.

1) a. Vérifier que les points M_1, M_2 et M_3 appartiennent à $\mathcal{C}$.

b. Faire une figure.

2) On note par (a, b) le couple de coordonnées du point M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Vérifier que $a^2 + b^2 = 1$.

3) Ecrire les coordonnées de M_1, M_2 et M_3 en fonction de a et b.

3. Soit α un réel donné et M le point de $\mathcal{C}$ tel que $\alpha \equiv \text{mes}(\widehat{IM}) [2\pi]$.

a. Soit $k \in \mathbb{Z}$, Vérifier que $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos \alpha$ et que $\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin \alpha$

b. Vérifier que $(\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2 = 1$

c. Ecrire, en fonction de $\cos \alpha$ ou de $\sin \alpha$, les expressions suivantes :

$\cos(-\alpha), \sin(-\alpha), \cos(\alpha + \pi), \sin(\alpha + \pi), \cos(\pi - \alpha), \sin(\pi - \alpha), \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha), \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha),$
 $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha)$ et $\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)$.

L'essentiel du cours

Dans toute la suite du chapitre on désigne par O un point du plan, par $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique de centre O, par I un point fixe de $\mathcal{C}$, par $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et par $\vec{j}$ le vecteur tel que $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé direct du plan.

Cosinus et sinus d'un réel

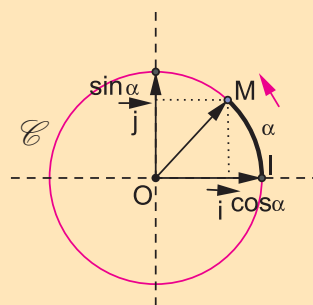
Soient α un réel donné, M le point du cercle $\mathcal{C}$ tel que

$\alpha \equiv \text{mes}(\widehat{IM}) [2\pi]$ et (x, y) son couple de coordonnées dans le repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Le réel x est appelé **cosinus** de α et on note $x = \cos \alpha$

Le réel y est appelé **sinus** de α et on note $y = \sin \alpha$

On a alors $\overrightarrow{OM} = (\cos \alpha) \vec{i} + (\sin \alpha) \vec{j}$



Premières propriétés

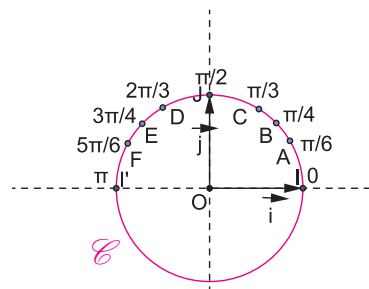
Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a :

- $-1 \leq \cos a \leq 1$ et $-1 \leq \sin a \leq 1$
- Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\cos(a + 2k\pi) = \cos a$ et $\sin(a + 2k\pi) = \sin a$
- $(\cos a)^2 + (\sin a)^2 = 1$
- $\cos(-a) = \cos a$ et $\sin(-a) = -\sin a$

- $\cos(a+\pi) = -\cos a$ et $\sin(a+\pi) = -\sin a$
- $\cos(\pi-a) = -\cos a$ et $\sin(\pi-a) = \sin a$
- $\cos(\frac{\pi}{2}-a) = \sin a$ et $\sin(\frac{\pi}{2}-a) = \cos a$
- $\cos(a+\frac{\pi}{2}) = -\sin a$ et $\sin(a+\frac{\pi}{2}) = \cos a$.

Auto évaluation

- 1) Montrer que le triangle OIC de la figure ci-contre est équilatéral. En déduire $\cos \frac{\pi}{3}$ puis $\sin \frac{\pi}{3}$.
- 2) Montrer que B appartient à la droite d'équation $y = x$. En déduire $\cos \frac{\pi}{4}$ et $\sin \frac{\pi}{4}$.
- 3) Vérifier que $\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$. En déduire $\cos \frac{\pi}{6}$ et $\sin \frac{\pi}{6}$.
- 4) Recopier et compléter :



a	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$2\frac{\pi}{3}$	$3\frac{\pi}{4}$	$5\frac{\pi}{6}$	π
cos a									
sin a									

2. Une seule des réponses proposées est correcte, trouvez la:

- 1) a. $\cos(51\pi-x) = \cos x$ b. $\cos(51\pi-x) = \sin x$ c. $\cos(51\pi-x) = -\cos x$
- 2) a. $\cos(13\frac{\pi}{2}-x) = \cos x$ b. $\cos(13\frac{\pi}{2}-x) = \sin x$ c. $\cos(13\frac{\pi}{2}-x) = -\cos x$
- 3) a. $\cos^2(3x) + \sin^2(3x) = 3$ b. $\cos^2(3x) + \sin^2(3x) = 9$ c. $\cos^2(3x) + \sin^2(3x) = 1$

3) Formules

Activités de découverte

1. Soient a et b deux réels donnés, on se propose d'écrire $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$ en fonction de $\cos a$, $\cos b$, $\sin a$ et $\sin b$.

Soit M le point du cercle $\mathcal{C}$ tel que $a \equiv \text{mes}(\overrightarrow{IM}) [2\pi]$

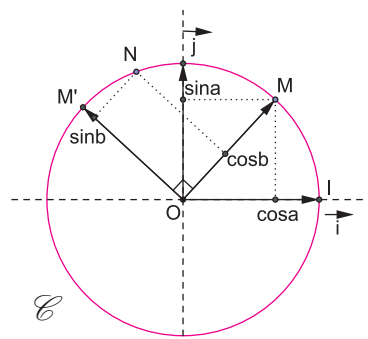
et soit N le point de $\mathcal{C}$ tel que $b \equiv \text{mes}(\overrightarrow{MN}) [2\pi]$

- 1) Vérifier que $(a+b) \equiv \text{mes}(\overrightarrow{IN}) [2\pi]$

et que $\overrightarrow{ON} = (\cos(a+b))\vec{i} + (\sin(a+b))\vec{j}$

- 2) On désigne par M' le point de $\mathcal{C}$ tel que $\text{mes}(\overrightarrow{MM'}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

a. Vérifier que $(O, \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$ est un repère orthonormé direct du plan.



- b. Prouver que $\vec{ON} = (\cos b) \vec{OM} + (\sin b) \vec{OM'}$.
- c. Vérifier que $\vec{OM} = (\cos a) \vec{i} + (\sin a) \vec{j}$.
- d. Vérifier que $\vec{OM'} = (\cos(a + \frac{\pi}{2})) \vec{i} + (\sin(a + \frac{\pi}{2})) \vec{j}$.
- e. En déduire que :
- $$\vec{ON} = ((\cos a)(\cos b) - (\sin a)(\sin b)) \vec{i} + ((\sin a)(\cos b) + (\cos a)(\sin b)) \vec{j}.$$

3) Déduire que l'on a :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad \text{et} \quad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

2. Soient a et b deux réels donnés.

1) Ecrire en fonction de $\cos a$, $\sin a$, $\cos b$ et $\sin b$ les expressions suivantes :

$\cos(a - b)$, $\sin(a - b)$, $\cos 2a$ et $\sin 2a$.

2) Ecrire $\cos^2 a$ et $\sin^2 a$ en fonction de $\cos 2a$.

L'essentiel du cours

Formules d'addition

Pour tous réels a et b, on a :

- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

Formules de multiplication par deux.

- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$
- $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$.

Conséquences

- $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$
- $\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$

Auto évaluation

1. Une seule égalité est correcte, trouvez la :

- 1) a. $\frac{1}{2} \cos(2x) = \cos x$ b. $2 \cos(3x) \sin(3x) = \sin(6x)$ c. $\cos(x+y) = \cos x + \cos y$
- 2) a. $\cos^2(x) = \cos(x^2)$ b. $\sin x \sin y = \sin(xy)$ c. $\cos x \sin x = \frac{1}{2} \sin 2x$
- 3) a. $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ b. $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ c. $\cos \frac{\pi}{8} = -\frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}}$

2. Montrer que $\sin^2(\frac{\pi}{12}) + \sin^2(3\frac{\pi}{12}) + \sin^2(5\frac{\pi}{12}) = \frac{3}{2}$

3. Soient x et y deux réels de $[0, \frac{\pi}{2}]$ tels que $\cos x = \frac{2}{3}$ et $\sin y = \frac{3}{5}$.

Calculer $\sin x$ et $\cos y$. En déduire $\cos(2x+y)$ et $\sin(2x-4y)$.

4) Equations et inéquations

Activités de découverte

1. 1) On considère, dans $\mathbb{R}$, l'équation (E_1) : $\cos x = -\frac{1}{2}$.
 - a. Vérifier que (E_1) admet, dans $]-\pi, \pi]$, deux solutions opposées qu'on déterminera.
 - b. Donner alors l'ensemble des solutions de l'équation (E_1) dans $\mathbb{R}$.
 - c. Représenter les solutions de (E_1) sur le cercle $\mathcal{C}$.
- 2) On considère, dans $\mathbb{R}$, l'équation (E_2) : $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
 - a. Vérifier que $\frac{\pi}{4}$ et $3\frac{\pi}{4}$ sont les seules solutions de (E_2) dans $]-\pi, \pi]$.
 - b. Donner alors l'ensemble des solutions de l'équation (E_2) dans $\mathbb{R}$.
 - c. Représenter les solutions de (E_2) sur le cercle $\mathcal{C}$.

2. 1) Soient α et β deux réels de $]-\pi, \pi]$,
 Montrer que l'on a :
$$\begin{cases} \cos \alpha = \cos \beta \\ \sin \alpha = \sin \beta \end{cases} \Leftrightarrow (\alpha = \beta)$$
- 2) En déduire que si α et β sont deux réels quelconques, on a :

$$\begin{cases} \cos \alpha = \cos \beta \\ \sin \alpha = \sin \beta \end{cases} \Leftrightarrow (\alpha \equiv \beta [2\pi])$$

3. 1) On considère, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation (I_1) : $\cos x \leq \frac{1}{2}$.
 - a. Vérifier que l'arc bleu de la figure ci-contre représente, sur le cercle $\mathcal{C}$, les solutions de l'inéquation (I_1) .
 - b. Déterminer les solutions de (I_1) dans $]-\pi, \pi]$.
 - c. Déterminer les solutions de (I_1) dans $[0, 2\pi[$.
 - d. Montrer que l'ensemble des solutions de (I_1) dans $\mathbb{R}$ est la réunion de tous les ensembles de la forme :

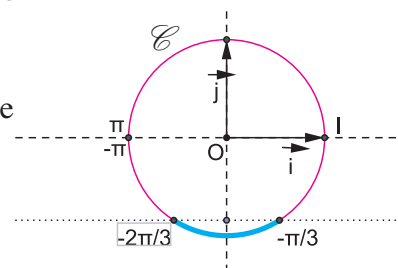
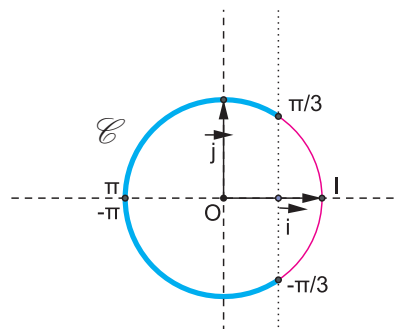
$$[-\pi + 2k\pi, -\frac{\pi}{3} + 2k\pi] \cup [\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \pi + 2k\pi] \text{ où } k \in \mathbb{Z}.$$

ou simplement la réunion des intervalles : $[\frac{\pi}{3} + 2k\pi, 5\frac{\pi}{3} + 2k\pi]$ où $k \in \mathbb{Z}$

- 2) On considère, dans $\mathbb{R}$, l'équation (I_2) : $\sin x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

- a. Vérifier que l'arc bleu de la figure ci-contre représente sur le cercle $\mathcal{C}$, les solutions de l'inéquation (I_2) .
- b. Déterminer les solutions de (I_1) dans $]-\pi, \pi]$.
- c. Déterminer les solutions de (I_1) dans $[0, 2\pi[$.
- d. Montrer que l'ensemble des solutions de (I_1) dans $\mathbb{R}$

est la réunion des intervalles $[-2\frac{\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{\pi}{3} + 2k\pi]$ où $k \in \mathbb{Z}$



Equations de la forme $\cos x = c$ ou $\sin x = c$.

Point de méthode : Soit c un réel donné.

1) Pour résoudre, dans $\mathbb{R}$, une équation (E_1) : $\cos x = c$, on procède comme suit :

- Si $c \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty [$ alors (E_1) n'a pas de solutions.
- Si $c \in [-1, 1]$, on détermine un réel α tel que $\cos \alpha = c$, on aura (E_1) : $\cos x = \cos \alpha$.

L'ensemble des solutions de (E_1) est $\{\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

2) Pour résoudre, dans $\mathbb{R}$, une équation (E_2) : $\sin x = c$, on procède comme suit:

- Si $c \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty [$ alors (E_2) n'a pas de solutions.
- Si $c \in [-1, 1]$, on détermine un réel β tel que $\sin \beta = c$, on aura (E_2) : $\sin x = \sin \beta$.

L'ensemble des solutions de (E_2) est $\{\beta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \beta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Remarque

Soit a un réel donné. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$\begin{cases} \cos x = \cos \alpha & \Leftrightarrow (x \equiv \alpha [2\pi]) \\ \sin x = \sin \alpha \end{cases}$$

Inéquations de la forme $\cos x \leq c$ ou $\sin x \leq c$.

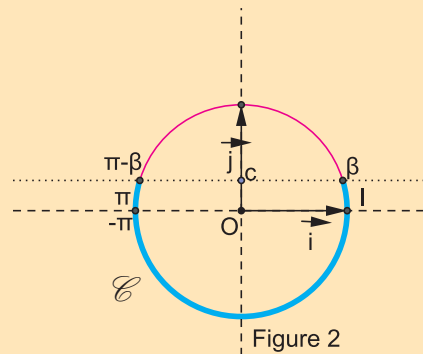
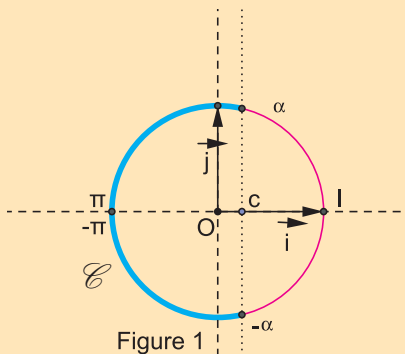
Point de méthode : Soit c un réel donné.

1) Pour résoudre, dans $\mathbb{R}$, une inéquation (I_1) : $\cos x \leq c$, on procède comme suit :

- Si $c \in]-\infty, -1[$ alors (I_1) n'a pas de solutions.
- Si $c \in [1, +\infty [$ alors tous les réels sont solutions de l'inéquation (I_1) .
- Si $c \in [-1, 1[$,
 - * on résout, dans $]-\pi, \pi]$, l'équation $\cos x = c$,
 - * on représente, sur le cercle $\mathcal{C}$, les solutions de (I_1) , (voir figure 1)
 - * on détermine l'ensemble E des solutions de (I_1) dans un intervalle de longueur 2π ,
 - * les solutions de (I_1) dans $\mathbb{R}$, sont les éléments de E auxquels on ajoute $2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

2) Pour résoudre, dans $\mathbb{R}$, une inéquation (I_2) : $\sin x \leq c$, on procède comme suit:

- Si $c \in]-\infty, -1[$ alors (I_2) n'a pas de solutions.
- Si $c \in [1, +\infty [$ alors tous les réels sont solutions de l'inéquation (I_2) .
- Si $c \in [-1, 1[$,
 - * on résout, dans $]-\pi, \pi]$, l'équation $\sin x = c$,
 - * on représente, sur le cercle $\mathcal{C}$, les solutions de (I_2) , (voir figure 2)
 - * on détermine l'ensemble F des solutions de (I_2) dans un intervalle de longueur 2π ,
 - * les solutions de (I_2) dans $\mathbb{R}$, sont les éléments de F auxquels on ajoute $2k\pi, k \in \mathbb{Z}$



Auto évaluation

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

$$(E) : (\sin x + 2)(\cos x - 1) = 0.$$

$$(F) : (\sin x)(2\cos x - 3) = 0.$$

$$(G) : (\sin x - \sin \frac{\pi}{5})(\cos^2 x) = 0.$$

2. Résoudre dans $]-\pi, \pi]$, les équations suivantes :

$$(E_1) : \sin(2x) + \cos x = 0.$$

$$(E_2) : \cos^2 x = \sin^2 x.$$

$$(E_3) : \cos^2 x - \cos^2(121 \frac{\pi}{7}) = 0.$$

$$(E_4) : \cos^2 x + 2\cos x - 3 = 0.$$

3. Résoudre dans $]-\pi, \pi]$, puis dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$(I_1) : \sin x \leq 0.$$

$$(I_2) : \cos x \geq 0.$$

$$(I_3) : \cos 2x - \frac{1}{2} \leq 0.$$

$$(I_4) : (\sin x - 2)(\sin 2x - \sqrt{3} \cos x) \geq 0.$$

V. Tangente d'un réel

Activités de découverte

1. 1) Montrer que l'ensemble des solutions, dans $\mathbb{R}$, de l'équation $\cos x = 0$,

$$\text{est } \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

2) Montrer que l'ensemble des solutions, dans $\mathbb{R}$, de l'équation $\sin x = 0$,

$$\text{est } \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

M le point du cercle $\mathcal{C}$ tel que $\alpha \equiv \text{mes}(\widehat{IM}) [2\pi]$.

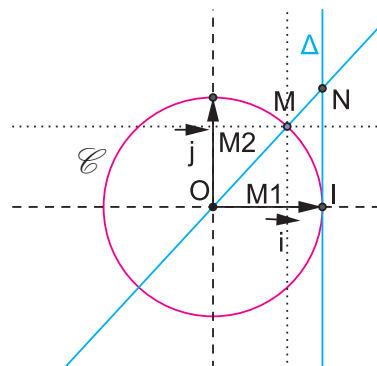
M_1 et M_2 les projetés orthogonaux respectifs de M. sur les axes $(O, \vec{i})$ et $(O, \vec{j})$.

► On définit la tangente de α par $\text{tg } \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

1) Soit Δ la droite tangente à $\mathcal{C}$ au point I.

Montrer que Δ et (OM) sont sécantes, soit N leur point d'intersection.

2) Démontrer, en utilisant le théorème de Thalès, que $\text{tg } \alpha = \overline{IN}$



3. Soit $a \in \mathbb{R} - \{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$, montrer que l'on a :

a. $\operatorname{tg}(-a) = -\operatorname{tga}$.

b. $\operatorname{tg}(a+2k\pi) = \operatorname{tga}$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $\operatorname{tg}(a+(2k+1)\pi) = -\operatorname{tga}$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$

c. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\operatorname{tg}(a+k\pi) = \operatorname{tga}$.

4.1) Soit a un réel différent de $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, Montrer que $1 + \operatorname{tg}^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}$

2) Soient a et b deux réels appartenant à $\mathbb{R} - \{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$,

a. On suppose que $(a+b) \in \mathbb{R} - \{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$, écrire $\operatorname{tg}(a+b)$ en fonction de tga et tgb .

b. En déduire, si $(a-b) \in \mathbb{R} - \{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$, l'expression de $\operatorname{tg}(a-b)$ en fonction de

tga et tgb .

c. Prouver que si $2a \in \mathbb{R} - \{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$, $\operatorname{tg}(2a) = \frac{2 \operatorname{tga}}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$.

L'essentiel du cours

Tangente d'un réel

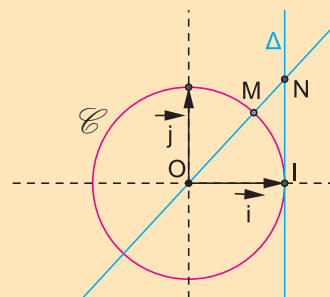
Pour tout $\alpha \in \mathbb{R} - \{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$, on appelle tangente de α , le réel noté $\operatorname{tg} \alpha$ ou $\tan(\alpha)$ défini par $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

Interprétation géométrique

Soit M le point du cercle $\mathcal{C}$ tel que $\alpha \equiv \operatorname{mes}(\widehat{IM}) [2\pi]$.

et N le point d'intersection de la droite tangente à $\mathcal{C}$ en I

et de la droite (OM) . On a : $\operatorname{tg} \alpha = \overline{IN}$.



Propriétés

Soit a un réel donné.

- Si $a \in \mathbb{R} - \{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\operatorname{tg}(a+k\pi) = \operatorname{tga}$
- Si $a \in \mathbb{R} - \{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$, $\operatorname{tg}(-a) = -\operatorname{tga}$
- Si $a \in \mathbb{R} - \{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$, $1 + \operatorname{tg}^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}$.
- Si a, b et $a+b$ appartiennent à $\mathbb{R} - \{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$, on a : $\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tga} + \operatorname{tgb}}{1 - \operatorname{tga} \operatorname{tgb}}$.
- Si a, b et $a-b$ appartiennent à $\mathbb{R} - \{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$, on a : $\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tga} - \operatorname{tgb}}{1 + \operatorname{tga} \operatorname{tgb}}$.
- Si a et $2a$ appartiennent à $\mathbb{R} - \{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$, on a : $\operatorname{tg}(2a) = \frac{2 \operatorname{tga}}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$.

Auto évaluation

1. Recopier et compléter :

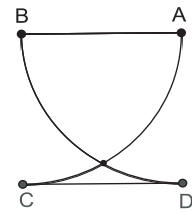
a	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$2\frac{\pi}{3}$	$3\frac{\pi}{4}$	$5\frac{\pi}{6}$	π
tg a									

2. Répondre par vrai ou faux :

- 1) a. $\text{tg}(x-\pi) = \text{tg}(x+\pi)$ b. $\text{tg } x = \text{tg}(x+\pi)$ c. $\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{tg } x$
- 2) a. $\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + a\right) = 1 + \text{tg } a$ b. $\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + a\right) = \frac{1 + \text{tga}}{1 - \text{tg } a}$ c. $\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + a\right) = \text{tg}\left(\frac{\pi}{4} - a\right).$

TP1

Soit ABCD un carré de côté a . On se propose de déterminer l'aire de la partie fermée ci-contre (figure 1).



(figure 1)

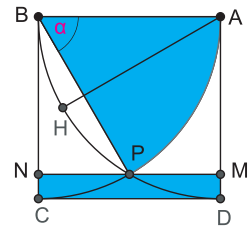
Stratégie de résolution

1) Soit P le point d'intersection des deux quarts de cercle (figure 2),

H l'intersection de l'arc géométrique d'extrémités B et P avec la perpendiculaire à la droite (BP), issue de A.

a. Vérifier que le triangle ABP est équilatéral.

b. Montrer que $\alpha = \frac{\pi}{3}$



(figure 2)

2) Soient M et N les projetés orthogonaux respectifs de P sur (AD) et (BC). (figure 2)

a. Montrer que l'aire cherchée est égale à l'aire du domaine colorié en bleu.

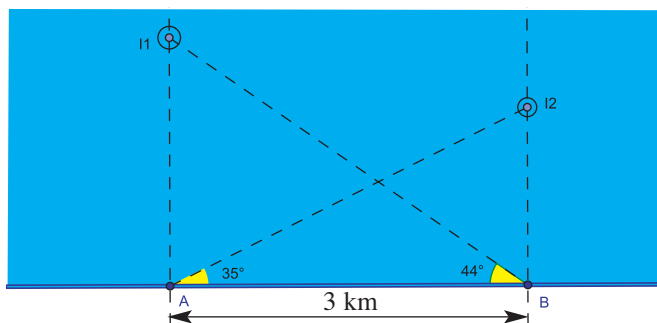
b. Montrer que l'aire du rectangle MNCD est $a^2 (1 - \frac{\sqrt{3}}{2})$.

c. Montrer que l'aire du secteur circulaire de centre B et d'extrémités A et P est $\frac{\pi}{6} a^2$.

3) Vérifier alors que l'aire cherchée est $a^2 (\frac{\pi}{6} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2})$.

TP2

Deux îlets I_1 et I_2 sont telles que :



Quelle est la distance entre ces deux îlets ?

TP3

Un ballon atmosphérique survole la Terre.

Un observateur, dans ce ballon, voit d'une hauteur h (hauteur par rapport à la Terre) l'horizon de la Terre sous un angle α avec la verticale.

Calculer le diamètre de la Terre en fonction des données ($\alpha = 89.65^\circ$ et $h = 120$ m)

1 On donne deux points distincts A et B et un réel $\alpha \in [0, \pi]$ et on se propose de déterminer, à l'aide d'un logiciel de construction géométrique, l'ensemble E des points M du plan tels que $\widehat{AMB} = \alpha$

1) Quel doit être l'ensemble E si $\alpha = 0$, si $\alpha = \pi$, si $\alpha = \frac{\pi}{2}$?

2) On prend $\alpha = \frac{\pi}{3}$

a. Montrer que deux uniques points M_0 et M_1 de la médiatrice du segment [AB] appartiennent à E.

b. Donner, à l'aide d'un logiciel de construction géométrique, une conjecture sur E.

3) Refaire le même travail avec α arbitrairement choisi dans $]0, \pi[$.

2 1) Soient deux cercles C_1 et C_2 de centres respectifs O_1 et O_2 et de rayons respectifs R_1 et R_2 ($0 < R_1 < R_2$), tangents extérieurement.

On désigne par D une tangente commune aux cercles C_1 et C_2 respectivement en A_1 et A_2 et on note P le point d'intersection des droites (A_1A_2) et (O_1O_2) .

Calculer $\sin(\widehat{O_1PA_1})$ en fonction de R_1 et R_2 .

2) On considère un point P, une demi droite δ d'origine P.

a. Construire deux cercles de rayons respectifs 1 et 2, tangents extérieurement et tangents tous les deux à δ .

b. Refaites la construction à l'aide d'un logiciel de construction géométrique en choisissant R_1 et R_2 arbitrairement.

Exercices et problèmes

1 On donne un triangle ABC isocèle de sommet principal A. Le cercle de diamètre [BC] coupe [AB] en E et [AC] en F.

- 1) Montrer que $\widehat{ECB} = \widehat{CBF}$
- 2) En déduire que $\widehat{EFB} = \widehat{CBF}$
- 3) Prouver que les deux droites (EF) et (BC) sont parallèles.

2 Soit ABC un triangle isocèle de sommet principal A et P un point quelconque de [AC].

- 1) Marquer le point Q de la demi droite [AC) tel que (BC) soit la bissectrice du secteur [BP, BQ].
- 2) Montrer que $\widehat{ABQ} = \widehat{APB}$
- 3) Montrer que les deux triangles ABQ et ABP sont semblables.
- 4) En déduire que $AB^2 = AP \times AQ$.

3 1) Quelle est la mesure en degrés et en radians d'un angle qui a pour mesure 120 grades ?

2) Quelle est la mesure en degrés et en grades d'un angle qui a pour mesure $\frac{\pi}{6}$ radians ?

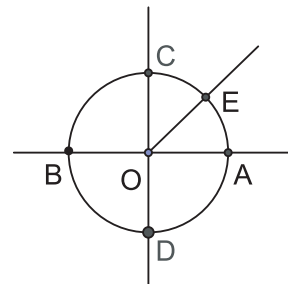
3) Quelle est la mesure en grades et en radians d'un angle qui a pour mesure 47 degrés ?

4 Un cycliste parcourt un trajet circulaire de rayon 1km à une vitesse de 15,7km/h. Il part d'un point A fixe.

- 1) Quelle est la longueur du trajet ?.
 - 2) Déterminer le temps nécessaire pour revenir au point A.
 - 3) Préciser la position du cycliste sur la trajectoire après 10 minutes, après 30 minutes du départ.
 - 4) Après un temps t_1 le cycliste se trouve en un point B tel que : $\widehat{AOB} = \frac{5\pi}{8}$
- Déterminer t_1 . (O étant le centre de la trajectoire)

5 Le plan est orienté dans le sens direct

On place, sur un cercle trigonométrique de centre O, cinq points A, B, C, D et E tels que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires et la demi-droite [OE) est la bissectrice du secteur [OA, OC]



1) Déterminer la mesure principale de chacun des arcs

orientés suivants : $\widehat{AB}$, $\widehat{AC}$, $\widehat{EA}$ et $\widehat{DE}$.

2) Parmi les réels $-5\frac{\pi}{4}$, $15\frac{\pi}{4}$, $75\frac{\pi}{4}$, $-13\frac{\pi}{4}$ et $-17\frac{\pi}{4}$, quels sont ceux qui sont des mesures de l'arc $\widehat{DE}$?

6 Soit $(\mathcal{C})$ un cercle trigonométrique et A un point de $(\mathcal{C})$.

Soient $x = \frac{1261\pi}{3}$ et $y = \frac{-41\pi}{6}$ des mesures respectives de deux arcs orientés $\widehat{AB}$ et $\widehat{AC}$ du cercle $(\mathcal{C})$.

1) Déterminer la mesure principale de chacun de ces deux arcs.

2) Placer les points B et C sur le cercle $(\mathcal{C})$.

7 Une seule des réponses proposées est correcte, trouver la :

1) $\cos \frac{11\pi}{3}$ est égal à :

a. $\frac{1}{2}$

b. $-\frac{1}{2}$

c. $\frac{11}{2}$

2) Pour tout réel x, $\cos(x) + \cos(-x)$ est égal à:

a. 0

b. $2\cos x$

c. 1

3) Pour tout réel x, $\sin(x - \frac{3\pi}{2})$ est égal à:

a. $-\sin x$

b. $1 + \sin x$

c. $\cos x$

4) Soit a un réel, $\sin(-a)$ est égal à:

a. $\cos(-a + \frac{\pi}{2})$

b. $\cos(-a - \frac{\pi}{2})$

c. $\sin(\frac{5\pi}{2} + a)$

5) Pour tout réel x, le réel $1 + \sin x$ est égal à :

a. $\sin(\frac{\pi}{2} + x)$

b. $(1 + \sin \frac{x}{2})^2$

c. $(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2})^2$

8 x et y étant deux réels, simplifier les expressions suivantes :

1) $\cos^3 x + \sin^3 x + (\cos x + \sin x)(\cos x \cdot \sin x - 1)$

2) $\cos^4 x (3 - 2 \cos^2 x) + \sin^4 x (3 - 2 \sin^2 x)$

3) $\sin^6 x + \cos^6 x + \sin^4 x + \cos^4 x + 5 \cos^2 x \cdot \sin^2 x$

9 Calculer :

$$A = \sin(\frac{19\pi}{6}) + \cos(-\frac{7\pi}{3}) + \cos(\frac{27\pi}{2}) + \cos(\frac{9\pi}{4})$$

$$B = \cos^2(-\frac{23\pi}{12}) + \cos^2(\frac{29\pi}{12}) + \cos^2(\frac{31\pi}{12}) + \cos^2(-\frac{37\pi}{12})$$

$$C = \cos^2 \frac{\pi}{10} + \cos^2 \frac{2\pi}{5} + \cos^2 \frac{3\pi}{5} + \cos^2 \frac{9\pi}{10}.$$

10 Montrer que :

- a. $\cos^6 x + \sin^6 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x$
- b. $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$
- c. $\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$
- d. $\cos^4 x = \frac{1}{8} \cos 4x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{8}$

11 Montrer que :

- a. Pour tout réel x , on a : $\sin^2 x + \sin x - 6 < 0$
- b. $\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = 0$
- c. $\sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \sin^2 \frac{7\pi}{8} = 2$

12 Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \cos(17\pi + x) + \cos(3\pi - x) + \sin(9\pi + x) + \sin(21\pi - x)$$

$$B = \cos(3\pi + x) + \cos(x - \frac{\pi}{2}) + \cos(\frac{15\pi}{2} - x) + \sin(\frac{21\pi}{2} + x) + \sin(x - \frac{\pi}{2})$$

13 1) Montrer que pour tout réel a , on a : $\cos(a + \frac{4\pi}{3}) + \cos(a - \frac{4\pi}{3}) = -\cos a$.

2) Soient

$$A = \cos^2 x + \cos^2(x + \frac{2\pi}{3}) + \cos^2(x - \frac{2\pi}{3})$$

$$B = \sin^2 x + \sin^2(x + \frac{2\pi}{3}) + \sin^2(x - \frac{2\pi}{3})$$

a. Calculer $A + B$.

b. Calculer $A - B$.

c. En déduire que : $A = B = \frac{3}{2}$

14 On donne $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ et $\cos x = -\frac{2}{3}$ et $y \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $\cos 2y = \frac{3}{4}$.

1) Calculer $\cos 2x$ et $\sin 2x$.

2) Calculer $\cos y$ et $\sin y$.

3) Calculer $\cos(2x - y)$ et $\sin(2x + y)$.

15 1) Montrer que pour tout réel x , $\sin 4x = \sin x (8\cos^3 x - 4\cos x)$.

2) Déduire que $8\cos^3 \frac{\pi}{5} - 4\cos \frac{\pi}{5} - 1 = 0$.

3) a. Vérifier que $8x^3 - 4x - 1 = (2x + 1)(4x^2 - 2x - 1)$ puis résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $8x^3 - 4x - 1 = 0$.

b. En déduire que $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

16 1) Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ puis dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- $2\sin^2 x + \sin x = 0$.
- $4\cos^2 x - 4\cos x - 3 = 0$.
- $(\sqrt{2}\cos x - 1)(2\sin x + 1) = 0$.
- $\sin 2x = \sin x$.

2) Déterminer les solutions des équations précédentes dans $[0, 2\pi[$.

17 Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ puis dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes:

- $\cos^2 x + 3\cos x < 0$
- $2\sin^2 x - 1 \leq 0$
- $(2\sin x - \sqrt{3})\cos x \geq 0$
- $\cos^2 x < -2$
- $4\sin^2 x - 2(1 + \sqrt{3})\sin x + \sqrt{3} > 0$

18 1) Sachant que $\sin x = -\frac{1}{2}$ et $x \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$, calculer $\cos x$ et $\operatorname{tg} x$.

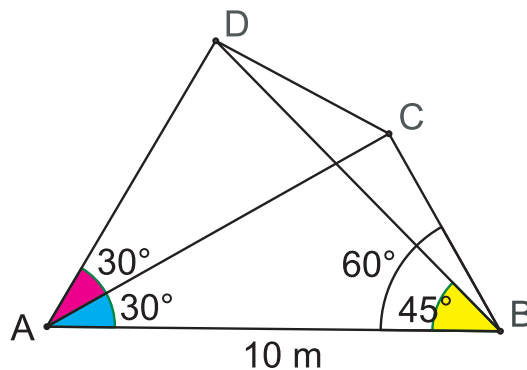
2) Sachant que $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}$ et $x \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ calculer $\cos x$ et $\sin x$.

- 19** 1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x + \frac{\pi}{3}) = -\cos(x + \frac{5\pi}{6})$
 2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin^2(x + \frac{\pi}{6}) + \sin^2(x + \frac{2\pi}{3}) = 1$.

- 20** 1) Calculer l'expression $A = \operatorname{tg} \frac{\pi}{10} + \operatorname{tg} \frac{2\pi}{5} + \operatorname{tg} \frac{3\pi}{5} + \operatorname{tg} \frac{9\pi}{10}$
 2) Simplifier l'expression $B = \operatorname{tg}(7\pi + x) + \operatorname{tg}(x - 35\pi)$.

- 21** Dans un triangle ABC, la médiane AM est égale au côté AB.
 a. Démontrer la relation : $\operatorname{tg} \hat{B} = 3 \operatorname{tg} \hat{C}$.
 b. Démontrer que : $\sin \hat{A} = 2 \sin(\hat{B} - \hat{C})$.

- 22** Déterminer, à partir des données fournies sur le dessin ci-après, la distance CD.



- 23** Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points

$$I(1,0), A(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) \text{ et } B(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$$

- 1) Montrer que les points A et B sont situés sur le cercle trigonométrique ($\mathcal{C}$) de centre O.
- 2) Donner une mesure de l'arc orienté $\widehat{IA}$.
- 3) Soit M le point tel que : OAMB est un parallélogramme.
 - a. Déterminer les coordonnées du point M.
 - b. Montrer que OAMB est un carré.
 - c. En déduire une mesure de l'arc orienté $\widehat{IM}$.

4) Soit H le projeté orthogonal de M sur $(O, \vec{i})$.

a. Calculer les distances OM et HM.

b. En déduire $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$.

24 Soit O un point du plan et $(\mathcal{C})$ le cercle trigonométrique de centre O.

On considère un diamètre [AC] de ce cercle.

1) a. Marquer sur $(\mathcal{C})$ le point B tel que $\text{mes}(\widehat{AB}) \equiv \frac{5\pi}{6}[2\pi]$.

b. Vérifier que $\text{mes}(\widehat{BC}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$.

2) On désigne par H le projeté orthogonal de B sur le segment [AC].

a. Calculer OH et BH.

b. Montrer que $AH = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}$ et $AB = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

3) Calculer alors les valeurs de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

a et b sont deux réels donnés, On a :

- * $-1 \leq \cos a \leq 1$ et $-1 \leq \sin a \leq 1$
- * Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\cos(a+2k\pi) = \cos a$ et $\sin(a+2k\pi) = \sin a$
- * $(\cos a)^2 + (\sin a)^2 = 1$
- * $\cos(-a) = \cos a$ et $\sin(-a) = -\sin a$
- * $\cos(a+\pi) = -\cos a$ et $\sin(a+\pi) = -\sin a$
- * $\cos(\pi-a) = -\cos a$ et $\sin(\pi-a) = \sin a$
- * $\cos(\frac{\pi}{2} - a) = \sin a$ et $\sin(\frac{\pi}{2} - a) = \cos a$
- * $\cos(a + \frac{\pi}{2}) = -\sin a$ et $\sin(a + \frac{\pi}{2}) = \cos a$.
- * $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- * $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- * $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- * $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
- * $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$
- * $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$.
- * $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$
- * $\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$
- * Si $a \in \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\operatorname{tg}(a+k\pi) = \operatorname{tg} a$
- * Si $a \in \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, $\operatorname{tg}(-a) = -\operatorname{tg} a$
- * Si $a \in \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, $1 + \operatorname{tg}^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}$
- * Si a, b et a+b appartiennent à $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, on a : $\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$
- * Si a, b et a-b appartiennent à $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, on a : $\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$
- * Si a et 2a appartiennent à $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, on a : $\operatorname{tg}(2a) = \frac{2\operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$

a	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
cos a	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
sin a	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
tg a	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\sqrt{3}$		0

1

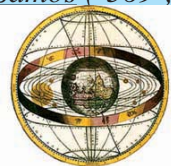
Le mot **trigonométrie** vient du grec "trigone" (triangle) et "metron" (mesure). Il faut remonter jusqu'aux babyloniens, 2000 ans avant notre ère, pour trouver les premières traces de **tables de données astronomiques**. Car à la base, la trigonométrie est une géométrie appliquée à l'étude du monde, de l'univers et est indissociable de l'astronomie.

L'héritage de ces tables données aux grecs et la numération sexagésimale des babyloniens (base 60) contribueront à l'introduction du partage du cercle en 360° . Eratosthène de Cyrène (-276 ; -196) et Aristarque de Samos (-310 ; -230) utilisent ces tables pour l'astronomie. Eratosthène se rendra célèbre pour avoir calculé la circonférence de la terre avec une précision tout à fait remarquable (seulement 3% d'erreur).

Mais on attribue à Hipparque de Nicée (-190 ; -120) les premières **tables trigonométriques**. Elles font correspondre l'angle au centre et la longueur de la corde interceptée dans le cercle.

Le grec Claude Ptolémée (90 - 160) poursuit dans l'*Almageste* les travaux d'Hipparque avec une meilleure précision et introduit les premières formules de trigonométrie. Ptolémée croyait au géocentrisme : la terre est le centre de l'univers, tous les astres gravitent autour d'elle. Il faudra attendre le XVI^e siècle pour rétablir la vérité pourtant déjà connue de Pythagore de Samos (-569 ; -475) au Ve siècle avant J.C.

La terre,
centre de
l'univers selon
Ptolémée



La règle
de
Ptolémée



En Orient, l'indien Aryabhata l'Ancien (476 ; 550) utilise la demi corde et donne les premières tables de sinus. On retrouve la configuration du sinus dans le triangle rectangle telle qu'elle est enseignée aujourd'hui. Aryabhata est le premier à voir la trigonométrie hors du cercle. Dès le XIII^e siècle, les arabes, tel que le perse Mohammed Al Khawarizmi (780 - 850) traduisent les ouvrages provenant de l'Orient. Mohammed al Battani (850 - 929) introduit les **tables de tangentes** et de nouvelles formules, puis après lui Mohammed Abu'l-Wafa (940 - 998) précise encore ces tables.

Avec le perse al Tusi (1201-1274), la trigonométrie se sépare de l'astronomie.

Plus tard, l'astronome et mathématicien allemand Regiomontanus (1436 -1476), de son vrai nom Johann Müller développe la trigonométrie comme une branche des mathématiques indépendantes. Il serait à l'origine de l'usage systématique du terme sinus. Au XVI^e siècle, le français François Viète (1540 - 1607), conseiller d'Henri IV, fera évoluer la trigonométrie pour lui donner le caractère qu'on lui connaît aujourd'hui. De nos jours, la trigonométrie trouve des applications très diverses, particulièrement dans les sciences physiques. La propagation des ondes, par exemple, est transcrite par des fonctions trigonométriques.



Produit Scalaire Dans Le Plan

9

PLAN DU CHAPITRE

- I.** Définition.
- II.** Propriétés.
- III.** Produit scalaire en géométrie analytique.
- IV.** Applications du produit scalaire dans le triangle.

Travaux pratiques.

Avec l'outil informatique.

Exercices et problèmes.

Mathématiques et culture.

I. Définition

Activités préliminaires

1. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, A et B deux points du plan et α un réel.
Recopier et relier par une flèche les quantités égales des deux colonnes ci-dessous :

$\ \vec{u}\ $	$2AB$
$\ \vec{AB}\ $	$\ \vec{u}\ + \ \vec{v}\ $
$\ -\vec{AB}\ $	$\ -\vec{u}\ $
$\vec{0}$	AB
$\ \alpha \vec{u}\ $	$\alpha \ \vec{u}\ $
$\ \vec{u} + \vec{v}\ $	$ \alpha \ \vec{u}\ $
$\ \vec{AB}\ + \ \vec{BA}\ $	0

2. Soit ABC un triangle isocèle de sommet principal A, G son centre de gravité et H le pied de la hauteur issue de A .

Faites une figure puis répondez par vrai ou faux.

$\ \vec{AB}\ = \ \vec{BC}\ $	
$\ \vec{AB}\ = \ \vec{AC}\ $	
$\ \vec{AB}\ + \ \vec{AC}\ = \ \vec{BC}\ $	
$\ \vec{AB}\ ^2 + \ \vec{AC}\ ^2 = \ \vec{BC}\ ^2$	
$\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires et de sens contraires	
$\vec{AG}$ et $\vec{AH}$ sont colinéaires et de même sens	
$\vec{BH}$ et $\vec{CH}$ sont colinéaires et de sens contraires.	

3. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

On donne les vecteurs $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{v} = -\sqrt{3}\vec{i} + \vec{j}$

et les points $A(2, -1)$ et $B(-\sqrt{3}, 1)$

1) Calculer $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$, $\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$, $\|\vec{u} + \vec{v}\|$ et $\|\vec{v} - \vec{u}\|$.

2) En déduire les distances OA , OB et AB .

Activités de découverte

4. On considère deux vecteurs colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et un point A du plan.

On désigne par B et C les deux points du plan tels que $\vec{AC} = \vec{v}$ et $\vec{AB} = \vec{u}$.

1) Vérifier que A , B et C sont alignés.

2) On pose
$$p = \begin{cases} AB \times AC & \text{si } B \in [AC) \\ -AB \times AC & \text{sinon} \end{cases}$$

Ecrire p en fonction de $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.

3) Déterminer p dans le cas où l'un des vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul.

4) Déterminer p en fonction de $\|\vec{u}\|$ dans chacun des cas suivants :

• $\vec{v} = \vec{u}$

• $\vec{v} = -\vec{u}$

• $\vec{v} = 2\vec{u}$

• $\vec{v} = -3\vec{u}$

5. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires.

1) Soit A un point du plan. On désigne par B et C les deux points du plan tels que $\vec{AB} = \vec{u}$ et $\vec{AC} = \vec{v}$ et on note H le projeté orthogonal de B sur la droite (AC) .

Trois cas peuvent se présenter, suivant la position de H sur (AC) , illustrer chaque cas par une figure.

2) Soit E un point différent de A .

F et G les deux points du plan tels que $\vec{EF} = \vec{u}$ et $\vec{EG} = \vec{v}$. On désigne par K le projeté orthogonal de F sur la droite (EG) .

Montrer que $\vec{AH} = \vec{EK}$

Produit scalaire de deux vecteurs

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs quelconques du plan.

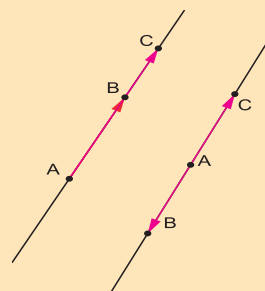
On appelle **produit scalaire** des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel, qu'on note $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et qu'on lit " $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ " défini par :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont de même sens.} \\ -\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont de sens contraires.} \end{cases}$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, on choisit un point A et on désigne par B et C les deux points du plan tels que $\vec{AB} = \vec{u}$ et $\vec{AC} = \vec{v}$ et on note H le projeté orthogonal de B sur la droite (AC). $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{AH} \cdot \vec{AC}$

Illustration graphique :

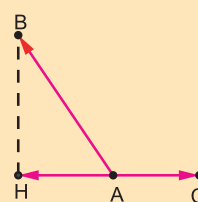
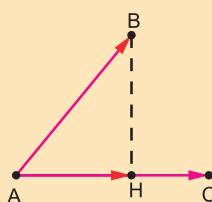
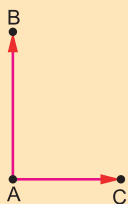
a. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires:

- Si l'un des vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens : $\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AC$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraires : $\vec{u} \cdot \vec{v} = -AB \times AC$



b. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{AH} \cdot \vec{AC}$



Auto évaluation

1. Soit D un axe du plan, muni d'un repère $(O, \vec{i})$ et soit Δ la droite perpendiculaire à D au point A d'abscisse -2. B un point, différent de A, de Δ et C le point du plan tel que AOBC est un parallélogramme.

1) Déterminer $\vec{AB} \cdot \vec{OA}$, $\vec{OA} \cdot \vec{i}$, $\vec{OB} \cdot \vec{i}$ et $\vec{OB} \cdot \vec{BC}$.

2) Répondre par vrai ou faux:

a. $\vec{OB} \cdot \vec{OA} = -4$ b. $\vec{OB} \cdot \vec{AC} = 4$ c. $\vec{OB} \cdot \vec{AC} = OB^2$ d. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 2AB$ e. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$

2. Soit D un axe du plan, muni d'un repère $(O, \vec{i})$ et soient A un point de la droite D et B un point du plan. On désigne par H le projeté orthogonal de B sur D.

Montrer que $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \overline{OA} \times \overline{OH}$

3. Soit ABCD un rectangle de centre O tel que $AB = a$ et $AD = b$

Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$, $\vec{AD} \cdot \vec{AC}$, $\vec{OA} \cdot \vec{AB}$ et $\vec{OB} \cdot \vec{AB}$.

4. Soit ABCD un trapèze tel que (AC) est perpendiculaire à (BC).

1) Faire une figure.

2) Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

II. Propriétés

Activités de découverte

1. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls quelconques et A un point du plan.

On désigne par B et C les deux points du plan tel que $\vec{AB} = \vec{u}$ et $\vec{AC} = \vec{v}$

Et on se propose de démontrer que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{v}\| \|\vec{u}\| \cos(\widehat{BAC})$ (P).

1) Vérifier que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, on a immédiatement la propriété (P)

2) On suppose que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires :

On note H le projeté orthogonal de B sur la droite (AC).

a. Distinguer trois cas de figure.

b. Ecrire AH en fonction de $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$, $\vec{v}$ et $\cos(\widehat{BAC})$.

c. Montrer alors la propriété (P).

2. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs donnés.

1) Comparer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et $\vec{v} \cdot \vec{u}$

2) Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

3) Soit α un réel. Montrer que l'on a : $(\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = \alpha \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$.

4) Montrer que l'on a : $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$. ($\vec{u} \cdot \vec{u}$ est noté $\vec{u}^2$ est appelé carré scalaire de $\vec{u}$)

3. Soit $\vec{u}$ un vecteur donné.

Montrer que $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$ et en déduire que $\vec{u}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.

4. Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs quelconques.

On se propose de montrer que $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ (Q).

1) Vérifier que si $\vec{u}$ est nul, on a immédiatement la propriété (Q).

2) On suppose que $\vec{u}$ est non nul et que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires :

En écrivant $\vec{v} = \alpha \vec{u}$ et $\vec{w} = \beta \vec{u}$, prouver (Q).

3) On suppose que $\vec{u}$ est non nul et que $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont quelconques :

Soit O un point du plan et A, B et C les points tels que $\vec{OA} = \vec{u}$, $\vec{OB} = \vec{v}$ et $\vec{BC} = \vec{w}$

E et F désignent les projetés orthogonaux respectifs de B et C sur la droite (OA).

a. Montrer que $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{OA} \cdot \vec{OE} + \vec{OA} \cdot \vec{EF}$

b. Déduire de la question 2) que $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{OF}$.

c. Ecrire autrement $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$ et en déduire la propriété (Q).

L'essentiel du cours

Propriétés du produit scalaire

P1: Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, si $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{AC}$ on a :
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\widehat{BAC})$

P2: Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

P3: Inégalité de **Cauchy-Schwarz** : Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$

P4: Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux équivaut à $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

P5: Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et tout réel α , on a :

$$(\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = \alpha \times (\vec{u} \cdot \vec{v}).$$

P6: Pour tout vecteur $\vec{u}$, on a : $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$ et $\vec{u}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$ ($\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$)

P7: Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

Auto évaluation

1. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Développer les expressions suivantes :

$$(\vec{u} + \vec{v})^2, (\vec{u} - \vec{v})^2 \text{ et } (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$$

2. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs vérifiant $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\frac{2}{3}$.

1) Calculer $(\vec{u} + \vec{v})^2$, $(\vec{u} - \vec{v})^2$ et $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$

2) Calculer $(2\vec{u} + \vec{v}) \cdot (-2\vec{v})$, $(-\vec{u} + 4\vec{v}) \cdot (3\vec{u} + 2\vec{v})$ et $(\vec{u} + \sqrt{2}\vec{v}) \cdot (\vec{u} - \sqrt{3}\vec{v})$

3. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

Montrer que $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$.

4. Soient, $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs donnés.

Une seule réponse est correcte, trouver cette réponse.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ signifie que

a. $\vec{v} = \vec{w}$ ou $\vec{u} = \vec{0}$

b. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux et $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux.

c. $\vec{u}$ et $\vec{v} - \vec{w}$ sont orthogonaux.

5. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs donnés et x un réel. On pose $P(x) = (x\vec{u} + \vec{v})^2$.

Calculer le discriminant du trinôme $P(x)$ et retrouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

6. Soit ABC un triangle quelconque.

1) Montrer que pour tout point M du plan, $\vec{MA} \cdot \vec{BC} + \vec{MB} \cdot \vec{CA} + \vec{MC} \cdot \vec{AB} = 0$

2) En déduire que les hauteurs de tout triangle sont concourantes.

III. Produit scalaire en géométrie analytique

Dans tout ce paragraphe, le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(C'est-à-dire : $\|\vec{i}\| = 1$, $\|\vec{j}\| = 1$ et $\vec{i} \perp \vec{j}$ ou encore $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$).

La base $(\vec{i}, \vec{j})$ est alors orthonormée.

Activités de découverte

1. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs définis par $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$

1) Ecrire chacun des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

2) Calculer en fonction des réels x, y, x' et y' le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

3) Retrouver l'expression de $\|\vec{u}\|$ en fonction de x et y .

2. Soit D une droite du plan définie par son équation cartésienne $ax+by+c=0$ où a, b et c sont des réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$.

a. Donner un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite D .

b. Soit $\vec{n}$ le vecteur défini par $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Vérifier que $\vec{n} \neq \vec{0}$ et que $\vec{n} \perp \vec{u}$

► $\vec{n}$ est dit vecteur normal à la droite D

2) On donne un point $A(\alpha, \beta)$ et un vecteur non nul $\vec{N} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

a. Donner une équation cartésienne de l'ensemble E des points $M(x, y)$ tels que $\vec{AM} \perp \vec{N}$.

b. Vérifier que E est une droite et que $\vec{N}$ est un vecteur normal à cette droite.

3. Soit D une droite du plan définie par son équation cartésienne $ax+by+c=0$ où a, b et c sont des réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$ et $A(x_0, y_0)$ un point du plan.

On se propose de déterminer la distance du point A à la droite D .

1) Soit H le projeté orthogonal de A sur D et $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur normal à D .

a. Faites une figure.

b. Prouver que $|\vec{AH} \cdot \vec{n}| = AH \sqrt{a^2 + b^2}$.

2) On pose $H(x_H, y_H)$.

En remarquant que $H \in D$, montrer que $|\vec{AH} \cdot \vec{n}| = |ax_0 + by_0 + c|$

3) En déduire l'expression de la distance de A à D .

4. Soient A et B deux points distincts du plan et $(\mathcal{C})$ le cercle de diamètre $[AB]$.

1) a. Faites une figure.

b. Quelle condition nécessaire et suffisante doit vérifier un point M du plan pour qu'il soit sur $(\mathcal{C})$?

2) On pose $A(a, b)$ et $B(a', b')$.

Ecrire une équation cartésienne du cercle $(\mathcal{C})$.

Application : Donner une équation cartésienne du cercle $(\mathcal{C})$ pour $A(-1, 2)$ et $B(0, -3)$.

L'essentiel du cours

Expression analytique du produit scalaire dans une base orthonormée

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs définis par $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$
on a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Equation cartésienne d'une droite définie par un point et un vecteur normal:

1) Si D est une droite du plan définie par son équation cartésienne $ax+by+c=0$

où a, b et c sont des réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$, on a :

- Le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D.
- Tout vecteur non nul et orthogonal à $\vec{u}$ est dit **vecteur normal** à D.
- Le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la droite D.

2) Si A est un point du plan et $\vec{N}$ est un vecteur non nul alors l'ensemble E des points M du plan vérifiant $\vec{AM} \cdot \vec{N} = 0$ est une droite dont $\vec{N}$ est un vecteur normal.

Théorème

- * Deux droites du plan sont parallèles si et seulement si un vecteur normal de l'une est colinéaire à un vecteur normal de l'autre.
- * Deux droites du plan sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur normal de l'une est orthogonal à un vecteur normal de l'autre.

Distance d'un point à une droite:

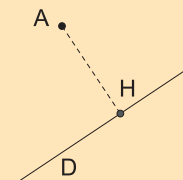
Soit D une droite du plan définie par son

équation cartésienne $ax+by+c=0$

où a, b et c sont des réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$

et A (x_0, y_0) un point du plan.

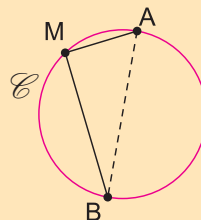
La distance du point A à la droite D est $d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$



Cercle défini par deux points diamétralement opposés:

Soient A et B deux points distincts du plan.

Le cercle de diamètre [AB] est égal à l'ensemble
des points M du plan tels que : $\vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0$.



Auto évaluation

1. Soient les points A(2,1), B(1,0) et C(1,2). Donner, en degrés, une valeur approchée à 10^{-2} près de chacune des mesures $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$.
2. On donne le point A(1,-1) et $\vec{N} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
 - 1) Donner une équation cartésienne de la droite D passant par A et de vecteur normal $\vec{N}$.
 - 2) Donner une équation cartésienne de la droite D' perpendiculaire à D en A.
3. Déterminer, dans chacun des cas suivants, les réels a tels que les droites D et D' sont perpendiculaires.
 - 1) D: $ax + 2y - 5 = 0$ et D': $x - 2ay + a = 0$
 - 2) D: $\sqrt{2}x + ay + 3 = 0$ et D': $y = a$
 - 3) D: $y = ax + 1$ et D': $y = 2x - 3$
4. Cocher la réponse correcte (une seule réponse est valable):
La droite D: $y = -2x + 3$ a pour vecteur normal.
 - a. $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
 - b. $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
 - c. $\vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.
5. On considère la droite D : $3x - 4y + 2 = 0$.
 - 1) Donner une équation cartésienne de la droite parallèle à D et passant par O.
 - 2) Donner une équation cartésienne de la droite perpendiculaire à D et passant par O.
6. Calculer, dans chacun des cas suivants la distance du point A à la droite D.
 - a. A(1,1) et D: $\sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 1 = 0$.
 - b. A(2,-2) et D: $2x - y + 1 = 0$.
 - c. A(1, $\sqrt{2}$) et D: $x - \sqrt{2}y + 1 = 0$.

7. 1) On donne les droites $D: -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{2} = 0$ et $D': \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

Répondre par vrai ou faux :

- a. $D // D'$ b. $D \perp D'$ c. D et D' ne sont ni parallèles ni perpendiculaires.

2) On donne les droites $D: x + y - 3 = 0$ et $A(-1, 2)$

Répondre par vrai ou faux :

- a. La distance de A à D est égale à $\sqrt{2}$.
 b. Le projeté orthogonal de A sur D est le point $I(1, 2)$.
 c. Le projeté orthogonal de A sur D est le point $I'(0, 3)$.
 d. $AI = \sqrt{2}$.
 e. $AI' = \sqrt{2}$.

8. 1) On donne $A(-1, 3)$ et $B(3, -1)$. Donner une équation cartésienne du cercle de diamètre $[AB]$.

2) Soit $(\mathcal{C})$ le cercle d'équation $(x+2)^2 + (y-3)^2 - 4 = 0$. Déterminer un diamètre $[AB]$ de ce cercle.

9. On donne la droite $D: \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - 4 = 0$ et le cercle $(\mathcal{C})$ de centre $A(1, \sqrt{3})$ et de rayon 2.

Répondre par vrai ou faux:

- a. $(\mathcal{C})$ coupe D . b. $(\mathcal{C})$ et D sont disjoints c. D est tangente à $(\mathcal{C})$.

10. Soient A et B deux points distincts du plan et $(\mathcal{C})$ le cercle de diamètre $[AB]$.

On note I le centre du cercle $(\mathcal{C})$. et on considère un point C extérieur à ce cercle.

- 1) Montrer que le cercle de diamètre $[IC]$ rencontre $(\mathcal{C})$ en deux points E et F .
- 2) Montrer les droites (CE) et (CF) sont tangentes à $(\mathcal{C})$.
- 3) On prend $AB = 2$ et $IC = 3$. Calculer $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{CI}$.
- 4) Soit H le projeté orthogonal de E sur (IC) . Calculer IH .

IV. Application du produit scalaire dans le triangle.

Activités de découverte

1. Soit ABC un triangle quelconque.

- 1) Vérifier que $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.
- 2) Retrouver les formules d'Alkashi dans le triangle ABC .

2. Soit ABC un triangle quelconque, H et K les projetés orthogonaux respectifs de A et C sur la droite (BC) et sur la droite (AB) .

1) Vérifier que $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = \vec{BH} \cdot \vec{BC} = \vec{BA} \cdot \vec{BK}$.

2) a. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $A = K$.

b. En déduire que ABC est rectangle en A si et seulement si $\vec{BA}^2 = \vec{BH} \cdot \vec{BC}$.

3) Montrer que ABC est rectangle en A si et seulement si $\vec{HA}^2 = -\vec{HB} \cdot \vec{HC}$

3. 1) Soit ABC un triangle rectangle en A et H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC).

Montrer, en calculant de deux façons l'aire du triangle ABC, que l'on a :

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}.$$

2) ABC désigne un triangle rectangle en A et non isocèle et H est le projeté orthogonal de A sur la droite (BC). Soit C' le symétrique de C par rapport à H.

a. Vérifier que ABC' n'est pas rectangle en A et que $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC'^2}$.

b. Conclure.

4. Soit ABC un triangle quelconque, I le milieu du segment [AB] et H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

1) Montrer que $\vec{CA} \cdot \vec{CB} = CI^2 - \frac{1}{4} AB^2$.

2) a. Montrer que $CA^2 = IA^2 + IC^2 - 2 \vec{IA} \cdot \vec{IC}$ et $CB^2 = IB^2 + IC^2 - 2 \vec{IB} \cdot \vec{IC}$.

b. En déduire que $AC^2 - BC^2 = 2 \vec{AB} \cdot \vec{IH}$ et $CA^2 + CB^2 = 2 CI^2 + \frac{1}{2} AB^2$

L'essentiel du cours

Soit ABC un triangle quelconque, on a :

- Les formules d'Alkashi :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 AB AC \cos(\widehat{BAC})$$

$$AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2 BA BC \cos(\widehat{ABC})$$

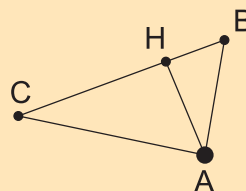
$$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2 CA CB \cos(\widehat{ACB})$$

Si H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC), on a :

- (Le triangle ABC est rectangle en A)

$$\Leftrightarrow (\vec{BH} \cdot \vec{BC} = \vec{BA}^2)$$

$$\Leftrightarrow (-\vec{HB} \cdot \vec{HC} = \vec{HA}^2)$$

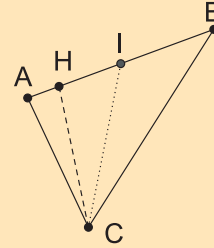


- (Le triangle ABC est rectangle en A) $\Rightarrow (\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2})$

(La réciproque est fausse)

Soit ABC un triangle quelconque, I le milieu du segment [AB] et H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB), on a :

- $\vec{CA} \cdot \vec{CB} = CI^2 - \frac{1}{4} AB^2$
- $CA^2 + CB^2 = 2CI^2 + \frac{1}{2} AB^2$. (Théorème de la médiane)
- $AC^2 - BC^2 = 2 \vec{AB} \cdot \vec{IH}$



Auto évaluation

1. Soit ABC un triangle.

On donne $AB = 3\text{cm}$, $BC = 4\text{ cm}$ et $\hat{ABC} = 60^\circ$.

Calculer, en cm^2 et à 10^{-2} près, l'aire du triangle ABC.

(On utilisera une calculatrice pour faire les calculs)

2. Soient deux forces constantes d'intensités respectives 2N et 3N. Les deux forces sont appliquées à un même point et faisant entre elles un angle dont une mesure est 30° .

Calculer l'intensité de leur résultante.

3. 1) Soit ABC un triangle rectangle et H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC).

Répondre par vrai ou faux :

a. $BH \times BC = BA^2$

b. $BH \times CH = AH^2$

c. $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$

- 2) Soit ABC un triangle quelconque et H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC).

Répondre par vrai ou faux :

a. $(\overline{BH} \times \overline{BC} = BA^2) \Rightarrow ABC$ est rectangle.

b. $(\overline{BH} \times \overline{HC} = AH^2) \Rightarrow ABC$ est rectangle.

c. $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow ABC$ est rectangle.

4. On donne un cercle $(\mathcal{C})$ et une droite (AB) disjointe avec $(\mathcal{C})$.

1) Construire un point M de $(\mathcal{C})$ qui rend $MA^2 + MB^2$ minimale.

2) Construire un point N de $(\mathcal{C})$ qui rend $|NA^2 - NB^2|$ maximale.

5. Soit ABC un triangle quelconque, B' et C' les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[AB]$.

Soit G le point d'intersection des droites (BB') et (CC') .

1) On suppose que $\vec{BB'} \cdot \vec{CC'} = 0$.

a. Calculer AB^2 en fonction de GC' et GB .

b. Calculer AC^2 en fonction de GB' et GC .

c. En déduire que $AB^2 + AC^2 = 5 BC^2$

2) On suppose que $AB^2 + AC^2 = 5 BC^2$.

a. Montrer que $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 2 BC^2$.

b. En déduire que $\vec{BB'} \cdot \vec{CC'} = 0$.

3) Conclure.

TP1 ABCD un carré de côté a , I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AD]$, K le milieu de $[AI]$ et H le projeté orthogonal de A sur la droite (ID).
Il s'agit de montrer que les droites (HJ) et (HK) sont perpendiculaires.

Stratégies de résolution

1) Par la méthode classique :

- Exprimer HK, HJ et KJ en fonction de a .
- Conclure.

2) Par la méthode analytique :

- Choisir un repère orthonormé convenable.
- Donner les coordonnées des points J, H et K dans ce repère.
- Calculer $\vec{HK} \cdot \vec{HJ}$ et conclure.

3) Par la méthode du produit scalaire :

- En utilisant une propriété métrique du triangle rectangle, montrer que

$$(\vec{HA} + \vec{HD}) \cdot (\vec{HA} + \vec{HI}) = 0$$
- Conclure.

TP2 Un puit de pétrole est foré dans un champ rectangulaire à 630 m d'un coin, à 560 m d'un autre et à 160 m d'un troisième. A quelle distance du quatrième coin se trouve-t-il ?

Stratégie de résolution

- Modéliser la situation à l'aide d'un rectangle ABCD et noter P le lieu du puit et O le centre du rectangle. (Faites une figure approximative).
- Montrer que $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$ (On remarquera que $AC = BD$).
- En déduire la solution du problème.

TP3 Soient A et B deux points tels que $AB = 3$. On désigne par I le milieu du segment $[AB]$ et on se propose de déterminer l'ensemble E des point M du plan tels que $\vec{AM} \cdot \vec{BM} = 4$.

- Choisir un repère orthonormé convenable et écrire une équation cartésienne de E dans ce repère.
 - Quelle est la nature de E ? Construire cet ensemble.
- Vérifier que pour tout point M, $M \in E \Leftrightarrow MI^2 - \frac{1}{4} AB^2 = 4$.
 - Retrouver la nature de E.

TP4 Soient A et B deux points tels que $AB = 3$. On se propose de déterminer l'ensemble F des point M du plan tels que $\frac{AM}{BM} = 2$.

1) a. Choisir un repère orthonormé convenable et écrire une équation cartésienne de F dans ce repère.

b. Quelle est la nature de F ? Construire cet ensemble.

2) a. Vérifier que pour tout point M, $M \in F \Leftrightarrow (\vec{AM} + 2\vec{BM}) \cdot (\vec{AM} - 2\vec{BM}) = 0$.

b. Retrouver la nature de F.

1 Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

La feuille de calcul, sur le tableur Excel, suivante permet de calculer des grandeurs dans le triangle connaissant les coordonnées de ses sommets.

- 1) a. Reproduire cette feuille (**Tableau 1**) sur votre PC.
b. Faire varier les coordonnées des points A, B et C (lignes blanches).
- 2) Observer et commenter les résultats fournis (**Tableau 2**).
- 3) Concevoir, à l'aide du même tableur ou à l'aide d'un autre logiciel, une feuille de calcul ou un programme permettant de calculer les mesures des angles et l'aire d'un quadrilatère convexe à partir de la donnée des coordonnées de ses sommets.

Tableau 1

	A	B	C
1	XA	XB	XC
2	0	0	0
3	YA	YB	YC
4	0	0	0
5	XB-XA	XC-XA	XC-XB
6	=B2-A2	=C2-A2	=C2-B2
7	YB-YA	YC-YA	YC-YB
8	=B4-A4	=C4-A4	=C4-B4
9	AB ²	AC ²	BC ²
10	=A6*A6+A8*A8	=B6*B6+B8*B8	=C6*C6+C8*C8
11	AB	AC	BC
12	=Racine(A10)	=Racine(B10)	=Racine(C10)
13	$\vec{AB} \cdot \vec{AC}$	$\vec{BA} \cdot \vec{BC}$	$\vec{CA} \cdot \vec{CB}$
14	=A6*B6+A8*B8	=-A6*C6-A8*C8	=B6*C6+B8*C8
15	$\cos \hat{A}$	$\cos \hat{B}$	$\cos \hat{C}$
16	=A14/(A12*B12)	=B14/(A12*C12)	=C14/(B12*C12)
17	$\hat{A}$	$\hat{B}$	$\hat{C}$
18	Acos(A16)*180/π	Acos(B16)*180/π	Acos(C16)*180/π

Tableau 2

	A	B	C
1	XA	XB	XC
2	-2	1	2
3	YA	YB	YC
4	2	3	1
5	XB-XA	XC-XA	XC-XB
6	3	4	1
7	YB-YA	YC-YA	YC-YB
8	3	4	1
9	AB ²	AC ²	BC ²
10	10	17	5
11	AB	AC	BC
12	3.16	4.12	2.24
13	$\vec{AB} \cdot \vec{AC}$	$\vec{BA} \cdot \vec{BC}$	$\vec{CA} \cdot \vec{CB}$
14	11	-1	6
15	cos	Cos	cos
16	0.84	-0.14	0.65
17	$\hat{A}$	$\hat{B}$	$\hat{C}$
18	32.47	98.13	49.40

2 Elaborer un programme de détermination des angles d'un triangle.

On développera un algorithme permettant :

- la saisie des côtés,
- le calcul des cosinus respectifs des angles du triangle (on utilisera les formules : $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \cdot AC \cos(\hat{BAC})$; $\vec{CA} \cdot \vec{CB} = CA \cdot CB \cos(\hat{ACB})$ et $CA^2 + CB^2 - 2 CA \cdot CB \cos(\hat{ACB}) = AB^2$ et $CA^2 + CB^2 = 2 CA^2 + \frac{1}{2} AB^2$)
- la détermination des angles en degrés,
- l'affichage des solutions éventuelles.

Exercices et problèmes

1 Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère les points $A(2, -2)$; $B(3, 1)$ et $C(-2, 1)$. Soient les vecteurs $\vec{u} = \frac{1}{2} \vec{AC}$ et $\vec{v} = \vec{AC} - 2\vec{AB}$.

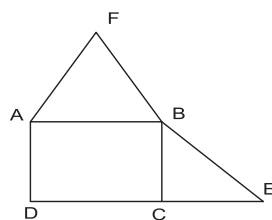
1) Déterminer $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.

2) Existe-il un point D tel que CADB est un losange ?

2 La figure ci-dessous représente un rectangle ABCD tel que : $AB = 5$ et $BC = 3$; un triangle ABF équilatéral et un triangle BCE rectangle et isocèle en C. Le point H est le milieu du segment [AB].

Calculer les produits scalaires suivants :

$\vec{AH} \cdot \vec{AB}$; $\vec{BC} \cdot \vec{BE}$; $\vec{AB} \cdot \vec{AF}$; $\vec{BD} \cdot \vec{CE}$; $\vec{BE} \cdot \vec{BA}$ et $\vec{AD} \cdot \vec{CE}$



3 Soient A, B, H et I quatre points vérifiant :

$AB = 9$, $\vec{AH} = \frac{1}{3} \vec{AB}$ et I le milieu de [AB].

Soit Δ la droite passant par H et perpendiculaire à (AB) et E un point de Δ .

1) Calculer $\vec{AH} \cdot \vec{AE}$; $\vec{BA} \cdot \vec{BE}$; $\vec{AI} \cdot \vec{HE}$ et $\vec{HA} \cdot \vec{HB}$.

2) Déterminer les points N de Δ tels que : $\vec{NA} \cdot \vec{NB} = 0$.

4 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que : $\|\vec{u}\| = 2$ et $\|\vec{v}\| = 5$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -12$.

Calculer les produits scalaires suivants :

a. $\vec{u} \cdot (-2\vec{u} + 3\vec{v})$

b. $(\vec{u} - 2\vec{v})^2$

c. $(3\vec{u} + \vec{v}) \cdot (-\vec{v} - 3\vec{u})$

5 Soient A et B deux points du plan tels que : $AB = 5$.

1) Construire un point C tel que $\vec{AC} \cdot \vec{AB} = 10$ et $AC = 4$.

2) Marquer les points D et E tels que : $\vec{AD} = -\frac{7}{5} \vec{AB}$ et $\vec{AE} = \frac{3}{2} \vec{AC}$.

3) a. Calculer les produits scalaires $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$, $\vec{AC} \cdot \vec{AE}$, $\vec{AD} \cdot \vec{AE}$.

b. En déduire le produit scalaire $\vec{CD} \cdot \vec{BE}$.

c. Que représente la droite (DC) pour le triangle BED ?

6 Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls du plan.

1) a. Montrer que si $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ alors $\vec{u} \cdot \vec{w} \neq 0$.

b. Peut-on trouver trois vecteurs non nuls et orthogonaux deux à deux dans le plan ?

2) Soient x , y et z trois réels tels que:

$x\vec{u} + \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{w}$

$y\vec{v} + \vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u}$

$z\vec{w} + \vec{u}$ est orthogonal à $\vec{v}$

Calculer le produit xyz .

7 On considère un triangle ABC sur lequel on construit les carrés $ABDE$ et $ACFG$.

On note $\hat{A}$ l'angle $\widehat{BAC}$; $b = AC$ et $c = AB$.

1) Calculer les produits scalaires $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ et $\vec{AE} \cdot \vec{AG}$ en fonction de b , c et $\hat{A}$.

2) a. En utilisant la relation de Chasles, calculer $\vec{BG} \cdot \vec{CE}$.

b. En déduire que les deux droites (BG) et (CE) sont perpendiculaires.

8 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

1) a. Montrer que $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|$ si et seulement si $\vec{u} \perp \vec{v}$.

b. En déduire que les diagonales d'un parallélogramme $ABCD$ ont la même longueur si et seulement si ce parallélogramme a un angle droit.

2) a. Montrer que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ si et seulement si $(\vec{u} + \vec{v}) \perp (\vec{u} - \vec{v})$.

b. En déduire qu'un parallélogramme $ABCD$ a deux côtés consécutifs de même longueur si et seulement si ses diagonales sont perpendiculaires.

9 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points

$A(2,0)$ et $B(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

1) Montrer que le triangle OAB est isocèle de sommet principal O.

2) a. Calculer $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$.

b. En déduire $\hat{AOB}$.

3) Soit I le milieu du segment [AB]. Déterminer les mesures des angles du triangle OAI.

10 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on donne les points A(1,2) et B(3,-1).

1) a. Montrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est orthogonal à AB.

b. En déduire que $3x + 2y - 7 = 0$ est une équation cartésienne de la droite (AB).

2) Vérifier que le point C(-1, 2) n'appartient pas à la droite (AB).

3) On désigne par H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

a. Montrer que $\vec{CH} \cdot \vec{n} = 6$.

b. En utilisant le fait que $\vec{CH}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, montrer que $|\vec{CH} \cdot \vec{n}| = CH\sqrt{13}$.

c. En déduire la distance d du point C à la droite (AB).

11 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on donne les points

A(1,1), B(0,2) et C(1, $4-\sqrt{3}$).

1) a. Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

b. En déduire $\hat{BAC}$.

2) Déterminer $\hat{ABC}$ puis $\hat{BCA}$.

12 On considère dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la parabole (P) d'équation $y = -2x^2 + 1$ et la droite Δ_a d'équation $y = ax$ où a est un réel.

1) Montrer que la droite Δ_a coupe la parabole (P) en deux points M_1 et M_2 dont-on déterminera les coordonnées en fonction de a.

2) a. Soit A(1,-1). Montrer que $\vec{AM_1} \cdot \vec{AM_2} = \frac{1}{2}(-2a^2 + a + 3)$.

b. Déterminer le réel a pour que A $M_1 M_2$ soit un triangle rectangle en A.

3) Soit H $(0, \frac{7}{8})$ et la droite D d'équation $y = \frac{9}{8}$.

Montrer que pour tout point M de (P), on a : $MH = d(M,D)$

13 Soient A, B et C trois points du plan vérifiant : $AB = 4$, $AC = 3$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$.

1) Calculer $\vec{AC} \cdot \vec{AB}$ et BC .

2) Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB). Calculer AH.

3) Soit I le milieu de [AB]. Calculer CI.

14 Soit ABC un triangle tel que $AB = \sqrt{2}$, $AC = 3 - \sqrt{3}$ et $BC = \sqrt{6} - \sqrt{2}$

1) a. Calculer $\cos \widehat{BAC}$.

b. En déduire $\widehat{BAC}$.

2) Calculer $\widehat{ABC}$ et en déduire $\widehat{ACB}$.

15 Soit un triangle ABC tel que $AB = 2$, $BC = 2\sqrt{5}$ et $AC = 4\sqrt{2}$.

1) Calculer $\cos \widehat{BAC}$.

2) Soit I le milieu de [BC]. Calculer AI.

3) a. Montrer qu'il existe un point unique G tel que $2\vec{GA} - 3\vec{GB} = \vec{0}$.

b. Calculer GA et GB.

4) Soit f l'application du plan dans lui-même définie par :

$$f(M) = 2MA^2 - 3MB^2$$

a. Calculer f(G).

b. Exprimer f(M) en fonction de f(G).

c. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

$$f(M) = k \text{ où } k \in \mathbb{R} \text{ (discuter selon les valeurs de } k)$$

16 Soit ABC un triangle rectangle en A. On désigne par a', b' et c' les longueurs des médianes issues respectivement de A, B et C.

Montrer que les réels a', b' et c' vérifient la relation:

$$b'^2 + c'^2 = 5a'^2$$

17 On donne un trapèze ABCD rectangle en A et B. On pose $AB = 2a$, $AD = b$, $BC = c$ où a, b, et c sont trois réels et on note O le milieu du segment [AB].

1) Montrer que $\vec{OD} + \vec{OC} = \vec{AD} + \vec{BC}$.

2) a. Calculer $\vec{OD} \cdot \vec{OC}$.

b. Quelles sont les relations qui doivent lier a, b et c pour que l'angle $\widehat{COD}$ soit aigu ?
droit ? obtus ?

18 On considère dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les points $A(3, -5)$ et $B(1, 4)$.

1) Déterminer $\widehat{AOB}$

2) a. Déterminer la distance du point A à la droite Δ dont une équation est $4x + 3y - 2 = 0$.

b. Ecrire une équation du cercle de centre A et tangent à la droite Δ .

19 Soit EFGH un parallélogramme tel que $EF = 2EH$. Soit I le milieu de [EF].

1) Montrer que le triangle IGH est un triangle rectangle en I.

2) On note a la longueur EH.

a. Calculer IH^2 et IG^2 en fonction de a et de $\cos(\widehat{FEH})$

b. Retrouver le résultat de la première question.

20 Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O et de rayon r et M un point du plan $M \notin (\mathcal{C})$. Deux droites quelconques issues de M coupent $(\mathcal{C})$ respectivement en A et B et en C et D.

1) Soit E le point diamétralement opposé à A sur $(\mathcal{C})$.

a. Montrer que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = \vec{MA} \cdot \vec{ME}$.

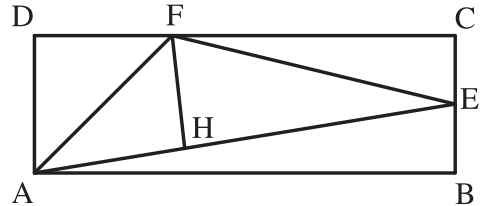
b. En déduire que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = OM^2 - r^2$.

2) Montrer que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = \vec{MC} \cdot \vec{MD}$.

21 Soit ABCD un rectangle tel que $AB = 6$ cm et $AD = 2$ cm ; E est le milieu de [BC] et F est défini par $\vec{DF} = \frac{1}{3} \vec{DC}$; H est le projeté orthogonal de F sur (AE).

1) En utilisant les égalités $\vec{AF} = \vec{AD} + \vec{DF}$ et $\vec{AE} = \vec{AB} + \vec{BE}$, calculer $\vec{AF} \cdot \vec{AE}$.

- 2) a. En calculant d'une autre manière le produit scalaire $\vec{AF} \cdot \vec{AE}$, déterminer la longueur AH.
 b. En calculant d'une troisième manière le produit scalaire $\vec{AF} \cdot \vec{AE}$, déterminer $\cos(\widehat{EAF})$.
- 3) Soit I le milieu de [FE] et G le centre de gravité du triangle AEF.
- a. Montrer que $\vec{AG} = \frac{1}{3}(\vec{AE} + \vec{AF})$.
 b. En déduire la longueur AG.



22 Soit un triangle ABC ($\widehat{BAC} < 90^\circ$) et O le milieu de [BC]. On construit extérieurement au triangle ABC, les triangles BAM et CAN isocèles et rectangles en A.

- 1) Montrer que $\vec{AB} \cdot \vec{AN} = \vec{AC} \cdot \vec{AM}$.
- 2) a. Vérifier que $\vec{AO} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$ et que $\vec{MN} = \vec{AN} - \vec{AM}$.
 b. En déduire que $\vec{AO} \cdot \vec{MN} = 0$.
 c. Que représente (AO) pour le triangle AMN ?
- 3) a. Montrer que $\vec{AM} \cdot \vec{AN} = -\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.
 b. Montrer que $\vec{CM} \cdot \vec{BN} = 0$. En déduire que les droites (BN) et (CM) sont perpendiculaires.
- 4) Montrer que $BN = CM$.

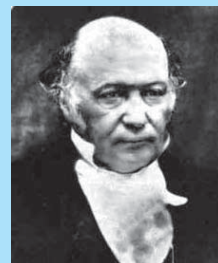
23 1) Montrer, en utilisant le théorème de la médiane, que pour tout parallélogramme ABCD on a : $AB^2 + AD^2 = \frac{1}{2}(AC^2 + BD^2)$

- 2) On considère un parallélogramme ABCD tel que : $BD = \sqrt{13}$; $AC = \sqrt{37}$ et $\widehat{BAD} = \frac{\pi}{3}$.
- a. Montrer que $AB^2 + AD^2 = 25$.
 b. Montrer que $AB^2 + AD^2 - AB \times AD = 13$.
 c. En déduire que $\begin{cases} AB + AD = 7 \\ AB \times AD = 12 \end{cases}$
 d. Déterminer alors les dimensions du parallélogramme.

Le concept de produit linéaire de deux vecteurs est né de la physique avec **Grassmann** (1809-1877) et **Gibbs** (1839-1903) et fut nommé produit scalaire (scalar product) par **Hamilton** (1805-1865). Le terme scalaire du latin (scalaris = escalier, échelle) est utilisé au sens de numérique : dans un contexte vectoriel, il s'agit de distinguer les objets vecteurs et les objets nombres qui opèrent sur les vecteurs. L'exemple fondamental du concept apparaît en dynamique avec le travail d'une force : si une force f déplace un corps selon un chemin rectiligne d , alors le travail fourni est donné par la formule : $W = |f| \times |d| \times \cos(\hat{X})$, $|f|$ désignant l'intensité de la force, $|d|$ la longueur du déplacement et $\hat{X}$ l'angle entre les directions de la force et du déplacement. Aujourd'hui, le produit scalaire se rencontre dans tous les domaines de la physique : Energie et moment cinétique d'un solide; Hydrodynamique ; Circulation et flux d'un champ électrostatique; Electromagnétisme, équation de Maxwell, force de Lorentz (physicien hollandais, 1853-1928).

HAMILTON William Rowan, irlandais, 1805-1865

Hamilton n'a que 17 ans lorsqu'il soumet à l'Académie royale de Dublin un correctif à la Mécanique céleste de Laplace... Astronome titulaire, à 22 ans, de la chaire d'astronomie à la dite Académie, il publia des travaux en optique géométrique et rénova la mécanique analytique (mécanique hamiltonienne, fondement de la mécanique quantique). Il se consacra finalement aux mathématiques et tout particulièrement aux structures algébriques (groupe de transformations, espace vectoriel, algèbre, corps). Par son essai *Elementary Essay on Algebra as the Science of Pure Time* (1837), il est aussi à l'origine de la partition des rationnels qui amena Dedekind à la construction des nombres réels par les "coupures".



GIBBS Josiah Willard, américain, 1839-1903

Ingénieur et physicien. Travaux en chimie, thermodynamique et mécanique statistique. Il enseigna la physique mathématique à l'université de Yale (USA) dès 1871. On lui doit la loi des phases régissant le nombre d'équilibres de la matière sous ses divers états possibles (l'eau par exemple possède trois états : liquide, solide et vapeur).

Suite aux travaux de Grassmann et Hamilton dont les notations de ce dernier lui apparaissaient malaisées, voire alambiquées..., et afin de développer une théorie électromagnétique de la lumière, on lui doit, avec Heaviside, les notations modernes de l'algèbre et de l'analyse vectorielle (*Elements of vector analysis*, Yale University - 1881) appliquées à l'espace usuel euclidien de dimension 3. Ainsi est né le produit vectoriel de deux vecteurs de l'espace.



GRASSMANN Hermann Günther, allemand, 1809-1877

Professeur de mathématiques à Stettin (ville prussienne, en Poméranie, sur l'estuaire aujourd'hui polonaise : Szczecin), physicien et linguiste (il étudia le sanskrit) étudiant le phénomène des marées, il est amené à développer le calcul vectoriel. Ses travaux portent essentiellement sur le concept nouveau d'espaces vectoriels abstraits de dimension supérieure à 3. Grassmann publia ses résultats en 1844 dans un traité intitulé *La science des grandeurs extensives ou la théorie de l'espace* (complété en 1863).

A la même époque l'irlandais Hamilton introduisait le concept moderne de vecteur.



Systèmes D'équations Linéaires

10

PLAN DU CHAPITRE

- I. Systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues.
- II. Systèmes de trois équations linéaires à trois inconnues.

Travaux pratiques

Avec l'outil informatique.

Exercices et problèmes.

Mathématiques et culture

I. Systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues

1) Résolution par la méthode de substitution

Activités préliminaires

1. On donne l'équation du premier degré à deux inconnues (E) : $2x - 7y = 4$.

- Exprimer x en fonction de y puis y en fonction de x .
- Trouver trois couples solutions de l'équation (E).
- Est-ce que les couples suivants sont solution de (E)?
 $(1, 0)$; $(2, -1)$; $(5, -2)$; $(0, 5)$.

2. Déterminer mentalement la solution de chacun des systèmes suivants :

$$(S_1): \begin{cases} x - y = 5 \\ x + y = 25 \end{cases} \quad (S_2): \begin{cases} 4u + 3v = 20 \\ 3u - 4v = 15 \end{cases}$$

$$(S_3): \begin{cases} a - 2b = 2 \\ b = 1 \end{cases} \quad (S_4): \begin{cases} \alpha = 2 \\ 2\alpha + \beta = 5 \end{cases}$$

3. Dans le plan muni d'un repère on considère les droites D et Δ d'équations respectives $2x - 8y + 8 = 0$ et $3x - y - 10 = 0$.

1) Déterminer la position relative de D et Δ .

2) Le système suivant (S): $\begin{cases} 2x - 8y = -8 \\ 3x - y = 10 \end{cases}$ admet-il des solutions ?

3) Résoudre le système et en déduire les coordonnées du point d'intersection éventuel de D et Δ .

4. Soit le système suivant (S) : $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - 3y = -4 \end{cases}$

Trouver un couple de nombres qui vérifie la première équation mais pas la deuxième.
 Donner un couple de nombres qui vérifie la deuxième équation mais pas la première.
 Déterminer le couple de nombres qui vérifie le système.

5. Soit le système de deux équations suivant : (S): $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 5x + 3y = 4 \end{cases}$

Résoudre le système (S) par la méthode de substitution.

6. Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, par la méthode de substitution, les systèmes suivants :

$$(S_1): \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + 3y = 2 \end{cases} \quad (S_2): \begin{cases} u + 2v = 3 \\ -2u - 4v = 7 \end{cases}$$

$$(S_3): \begin{cases} 2a + 5b = 1 \\ 3a + 3b = 3 \end{cases} \quad (S_4): \begin{cases} \sqrt{2}\alpha + 2\beta = 2 \\ \alpha + \sqrt{2}\beta = \sqrt{2} \end{cases}$$

L'essentiel du cours

- On rappelle qu'un système de deux équations linéaires à deux inconnues réelles est

$$\text{tout système de la forme } (S): \begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases}$$

où a, b, c, d, α et β sont des réels donnés tels que $(a,b) \neq (0,0)$ et $(c,d) \neq (0,0)$ et x et y sont les inconnues. a, b, c et d sont appelés coefficients des inconnues et α et β sont appelés coefficients du second membre.

- Un couple de réels (x_0, y_0) est une solution du système (S) si $a x_0 + b y_0 = \alpha$ et $c x_0 + d y_0 = \beta$.
- Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système (S) , c'est trouver tous les couples de réels (x, y) solutions de (S) .

Auto évaluation

1. Dans une écurie, il y a des hommes et des chevaux. On y dénombre au total 22 têtes et 72 pieds. Combien y a-t-il d'hommes ? Combien y a-t-il de chevaux ?

2. Un élève demande à son professeur de mathématiques son âge. Connaissant la date de naissance de cet élève, le professeur répond : " J'ai deux fois l'âge que tu avais quand j'avais ton âge et quand tu auras mon âge nous aurons, si nous sommes encore de ce monde, soixante-trois ans à nous deux".

Quels sont les âges de l'élève et de son professeur ?

3. Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, suivant les valeurs du réel m , les systèmes suivants :

$$(S_1): \begin{cases} 2mx - y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases} \quad (S_2): \begin{cases} x + 2y = 3 \\ -2x + (m-1)y = -6 \end{cases}$$

2) Résolution par la méthode du pivot de Gauss

Activités de découverte

1. Une société industrielle dispose de deux types de véhicules pour transporter la matière première de la mine à l'usine, un type V_1 capable de transporter 3 tonnes et consommant 7 litres de gasoil par voyage et un type V_2 capable de transporter 10 tonnes et consommant 20 litres de gasoil par voyage.

1) On représente les données de la situation dans le tableau suivant : $\begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 7 & 20 \end{pmatrix}$

- La première ligne L_1 : $(3 \ 10)$ représente la capacité de transport par type de véhicules
- La deuxième ligne L_2 : $(7 \ 20)$ représente la consommation en gasoil par type de véhicules.
- La première colonne C_1 : $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ caractérise le 1^{er} type de véhicules.
- La deuxième colonne (C_2): $\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$ caractérise le 2^{ème} type de véhicules.

► Le tableau $\begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 7 & 20 \end{pmatrix}$ est appelé **matrice**.

- a. Quelle est, en tonnes, la capacité de transport de 6 véhicules V_1 et 5 véhicules V_2 ?
- b. Quelle est, en litres de gasoil, la consommation par voyage de 6 véhicules V_1 et 5 véhicules V_2 ?

On représente ces résultats dans disposition suivante :

$$\begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 7 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 6 + 10 \times 5 \\ 7 \times 6 + 20 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 68 \\ 142 \end{pmatrix}.$$

2) Trouver à l'aide de cette disposition la capacité de transport et la consommation par voyage de p véhicules V_1 et q véhicules V_2 .

3) On se propose de déterminer le nombre x de véhicules V_1 et le nombre y de véhicules V_2 qui transportent 82 tonnes et qui consomment 168 litres de gasoil par voyage :

- a. Représenter ces résultats dans la disposition précédente.
- b. Etablir le système modélisant la situation.
- c. Résoudre, dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, le système obtenu et donner la solution du problème.

2. Soit dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système (S): $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$

1) a. Résoudre (S).

b. Vérifier qu'on peut représenter le système (S) par $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

► La matrice $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est dite matrice de (S) et $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{array} \right)$ est sa matrice complète.

2) On multiplie la deuxième ligne de la matrice complète de (S) par -2

- a. Résoudre, dans $\mathbb{R}^2$, le système (S_1) correspondant.
- b. Vérifier que (S) et (S_1) sont équivalents.

3) On remplace la deuxième ligne de la matrice complète de (S_1) par la somme des deux lignes.

- Résoudre, dans $\mathbb{R}^2$, le système (S_2) correspondant.
- Vérifier que (S) et (S_2) sont équivalents.

3. Résoudre chacun des systèmes suivants et vérifier qu'ils sont équivalents.

$$(S_1): \begin{cases} x-3y = 1 \\ 2x+3y = -1 \end{cases} \quad (S_2): \begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ x - 3y = 1 \end{cases} \quad (S_3): \begin{cases} x-3y = 1 \\ 3x = 0 \end{cases}$$

4. 1) Soit dans $\mathbb{R}^2$ le système : $(S_1): \begin{cases} 3x + y = 3 \\ 2y = 3 \end{cases}$

a. Vérifier que la matrice de (S_1) est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$

► On dit que cette matrice est **triangulaire**

b. Donner mentalement la solution de (S_1) .

2) Soit dans $\mathbb{R}^2$ le système : $(S): \begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$

On se propose de déterminer un système équivalent et dont la matrice est triangulaire.

a. Vérifier que $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 8 \\ 2 & -3 & 1 \end{array} \right)$ est la matrice complète de (S) .

b. Vérifier que $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 8 \\ 0 & -\frac{13}{3} & -\frac{13}{3} \end{array} \right)$ est la matrice complète d'un système équivalent à (S) .

c. Résoudre alors le système (S) .

► On dit qu'on a résolu le système (S) par la méthode du **pivot de Gauss**.

5. Soit dans $\mathbb{R}^2$ le système : $(S): \begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 6x + 10y = 20 \end{cases}$

a. Vérifier que les systèmes (S) , $(S_1): \begin{cases} 6x + 9y = 24 \\ 6x + 10y = 20 \end{cases}$ et $(S_2): \begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ y = -4 \end{cases}$

sont équivalents.

b. Résoudre (S) .

Matrice d'un système de deux équations à deux inconnues

Soit dans $\mathbb{R}^2$, le système (S):
$$\begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases}$$

où a, b, c, d, α et β sont des réels donnés tels que $(a,b) \neq (0,0)$ et $(c,d) \neq (0,0)$ et x et y sont les inconnues.

La matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est appelée matrice du système (S)

(c'est une matrice carrée d'ordre deux).

La matrice $\left(\begin{array}{cc|c} a & b & \alpha \\ c & d & \beta \end{array} \right)$ est appelée matrice complète du système (S).

Systèmes équivalents

Deux systèmes sont équivalents si et seulement si ils ont le même ensemble de solutions.

Opérations élémentaires

On admet qu'on obtient un système équivalent lorsque:

- on échange l'ordre des deux équations ($L \leftrightarrow L'$) ;
- on multiplie les deux membres d'une équation L par un réel non nul λ ($L \leftarrow \lambda L$);
- on remplace une équation L par une équation obtenue en additionnant membre à membre l'équation L et l'autre multipliée par un réel non nul λ ($L \leftarrow L + \lambda L'$);
- on supprime une équation lorsqu'elle est le produit de l'autre par un réel non nul.

Matrice triangulaire

On appelle matrice triangulaire toute matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$

Méthode du pivot de Gauss

Résoudre un système par la méthode du pivot de Gauss, consiste à déterminer un système qui lui est équivalent et dont la matrice est triangulaire.

Auto évaluation

1. Déterminer pour chacun des systèmes suivants la matrice et la matrice complète:

$$(S_1) \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 5x + 6y = 7 \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} x - y = 2 \\ y + x = 1 \end{cases} \quad (S_3) \begin{cases} -3y = 3 \\ 2x - 5y = 0 \end{cases} \quad (S_4) \begin{cases} x + y = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

2. Reprendre les systèmes ci-dessus et résoudre chacun d'eux dans $\mathbb{R}^2$ par la méthode du pivot de Gauss.

3. Résoudre, dans $\mathbb{R}^2$, chacun des systèmes suivants par la méthode du pivot de Gauss

$$(S_1) \begin{cases} 2x + 4y = 4 \\ x + 2y = 2 \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} x - y = 2 \\ y - x = 1 \end{cases} \quad (S_3) \begin{cases} 3x - 9y = 3 \\ -2x + 6y = 0 \end{cases}$$

4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par $f(x) = \frac{2x - 3}{x - 2}$

Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R} - \{2\}$ par $f(x) = a + \frac{b}{x - 2}$

3) Résolution par la méthode des déterminants

Activités de découverte

1. Soit dans $\mathbb{R}^2$ le système :

$$(S): \begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases}$$

où x et y sont les inconnues.

► Le réel $ad - bc$ s'appelle le déterminant du système (S). On le note $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$
a. Résoudre les systèmes suivants et calculer leurs déterminants.

$$(S_1) \begin{cases} x + y = 3 \\ x + 3y = 1 \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ -y + x = 1 \end{cases} \quad (S_3) \begin{cases} x - 3y = 3 \\ 2x - 6y = 0 \end{cases} \quad (S_4) \begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

b. Que remarque-t-on ?

2. Soit, dans $\mathbb{R}^2$, le système

$$(S): \begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases} \quad \text{où } (a,b) \neq (0,0) \text{ et } (c,d) \neq (0,0)$$

On suppose que $a \neq 0$

a. Montrer que le système $(S') : \begin{cases} ax + by = \alpha \\ (ad-bc)y = a\beta - c\alpha \end{cases}$ est équivalent à (S) .

b. Montrer que si $ad-bc \neq 0$, l'unique solution de (S) est le couple (x_0, y_0) tel que

$$x_0 = \frac{\alpha d - \beta c}{ad - bc} \quad \text{et} \quad y_0 = \frac{a\beta - c\alpha}{ad - bc}$$

c. Montrer que si $(ad-bc = 0)$ alors on a :

- si $(a\beta - c\alpha = 0)$ alors (S) a une infinité de solutions.
- et si $(a\beta - c\alpha \neq 0)$ alors (S) n'a pas de solution.

3. Pour tout système $(S) : \begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases}$, on pose $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, $\Delta_x = \begin{vmatrix} \alpha & b \\ \beta & d \end{vmatrix}$ et $\Delta_y = \begin{vmatrix} a & \alpha \\ c & \beta \end{vmatrix}$

1) Résoudre les systèmes suivants et calculer, pour chacun, les réels Δ , Δ_x et Δ_y

$$\begin{array}{llll} (S_1) \begin{cases} 2x + 5y = 3 \\ x + 3y = 1 \end{cases} & (S_2) \begin{cases} x - 2y = 2 \\ y = 1 \end{cases} & (S_3) \begin{cases} -3y = 3 \\ 2x - y = 0 \end{cases} & (S_4) \begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 3 \end{cases} \\ (S_5) \begin{cases} 2x + 6y = 2 \\ x + 3y = 1 \end{cases} & (S_6) \begin{cases} 0x + 3y = 3 \\ 0x + y = 1 \end{cases} & (S_7) \begin{cases} x - 3y = 3 \\ 2x - 6y = 5 \end{cases} & (S_8) \begin{cases} -x + 0y = 2 \\ 5x + 0y = 3 \end{cases} \end{array}$$

2) Vérifier que, dans tous ces cas, on a :

- si $\Delta \neq 0$, le système admet une seule solution,
- si $\Delta = 0$ et $(\Delta_x = \Delta_y = 0)$, le système admet une infinité de solutions,
- et si $\Delta = 0$ et $(\Delta_x \neq 0 \text{ ou } \Delta_y \neq 0)$, le système n'admet pas de solution.

L'essentiel du cours

Déterminant d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues

Soit dans $\mathbb{R}^2$ le système $(S) : \begin{cases} a x + b y = \alpha \\ c x + d y = \beta \end{cases}$

où a, b, c, d, α et β sont des réels donnés tels que $(a,b) \neq (0,0)$ et $(c,d) \neq (0,0)$ et x et y sont les inconnues.

Le réel **ad-bc** s'appelle le déterminant du système et on le note $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

Méthode de résolution par les déterminants

On pose $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, $\Delta_x = \begin{vmatrix} \alpha & b \\ \beta & d \end{vmatrix}$ et $\Delta_y = \begin{vmatrix} a & \alpha \\ c & \beta \end{vmatrix}$

Si $\Delta \neq 0$ alors (S) admet une solution unique le couple (x_0, y_0) tel que

$$x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta} \quad \text{et} \quad y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

Si $\Delta = 0$, on a :

- Si $(\Delta_x = \Delta_y = 0)$ alors (S) a une infinité de solutions.
- et si $(\Delta_x \neq 0 \text{ ou } \Delta_y \neq 0)$ alors (S) n'a pas de solution.

Auto évaluation

1. 1) Déterminer le déterminant de chacun des systèmes suivants :

$$(S_1) \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 5x + 6y = 7 \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} x - y = 2 \\ y + x = 1 \end{cases} \quad (S_3) \begin{cases} -3y = 3 \\ 2x - 5y = 0 \end{cases} \quad (S_4) \begin{cases} x + y = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

2) Résoudre chacun d'eux dans $\mathbb{R}^2$ par la méthode des déterminants.

2. Résoudre, dans $\mathbb{R}^2$, chacun des systèmes suivants par la méthode des déterminants.

$$(S_1) \begin{cases} 2x + 4y = 4 \\ x + 2y = 2 \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} x - y = 2 \\ y - x = 1 \end{cases} \quad (S_3) \begin{cases} 3x - 9y = 3 \\ -2x + 6y = 0 \end{cases}$$

3. Chacun des systèmes suivants comportent trois équations. Pour chacun d'eux :

- choisir deux équations;
- résoudre, dans $\mathbb{R}^2$, le système obtenu ;
- vérifier les solutions éventuelles dans la troisième équation
- et en déduire les solutions du système.

$$(S_1) \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 3y = 0 \\ x + 2y = -1 \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 0 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \quad (S_3) \begin{cases} x - 2y = 1 \\ -2x + 4y = -2 \\ 3x - 6y = 3 \end{cases}$$

4. Le plan est rapporté à un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Soient D une droite d'équation $y = ax + b$ où a et b sont deux réels et les points A(1,-1) , B(3,3) et C (2,1).

- 1) Ecrire les conditions sur a et b pour que D passe par les points A, B et C.
- 2) Existe-t-il une droite passant par les trois points A, B et C ? Si oui déterminer son équation.

II. Systèmes linéaires de trois équations à trois inconnues.

1) Résolution par la méthode de substitution

Activités de découverte

1. Deux fontaines ont des débits respectifs de 3 et 4 litres à la seconde. Pour remplir un bac, on fait d'abord couler la première fontaine jusqu'au moment où le bac est à moitié plein; ensuite on fait couler les deux à la fois. Dans ces conditions, il faut 8 min 20 s pour remplir le bac. On se propose de trouver la contenance de ce bac.

1) Poser x la contenance du bac, t_1 le temps mis par la première fontaine et t_2 le temps mis par la seconde fontaine et établir le système modélisant la situation.

2) Déterminer x .

2. Soit dans $\mathbb{R}^3$ le système de trois équations (S):
à trois inconnues ci-contre:

$$\begin{cases} 3x+y+2z=2 & (1) \\ 2x-y-z=2 & (2) \\ x+y+z=1 & (3) \end{cases}$$

On se propose de résoudre (S) par la méthode de substitution.

1) Ecrire, à partir de l'équation (3), z en fonction de y et x .

2) Remplacer z , par son expression, dans les équations (1) et (2).

3) Résoudre, dans $\mathbb{R}^2$, le système de deux équations à deux inconnues x et y obtenu.

4) Déterminer z .

5) En déduire la solution du système (S).

3. Trois garçons désirent connaître leurs poids à l'aide d'une vieille bascule dont l'aiguille ne descend plus au dessous de 50 kg ; ils montent deux à deux et notent :

- Mohamed et Ali : 75 kg
- Ali et Ahmed : 85 kg
- Ahmed et Mohamed : 80 kg.

On note x , y et z les poids, en kg, respectifs de Mohamed, Ali et Ahmed.

a. Ecrire le système vérifié par x , y et z .

b. Exprimer x en fonction de y .

c. Remplacer l'expression de x ainsi obtenue dans les deux autres équations.

d. Résoudre le système de deux équations d'inconnues y et z .

e. Déduire alors la valeur de x .

L'essentiel du cours

Définitions

- On appelle système de trois équations à trois inconnues réelles x , y et z , tout

système de la forme : (S)
$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

où pour tout $i \in \{1,2,3\}$ et tout $j \in \{1,2,3\}$, a_{ij} et b_i sont des réels donnés tels que $(a_{11}, a_{12}, a_{13}) \neq (0, 0, 0)$; $(a_{21}, a_{22}, a_{23}) \neq (0, 0, 0)$ et $(a_{31}, a_{32}, a_{33}) \neq (0, 0, 0)$.

Les réels a_{ij} sont appelés coefficients des inconnues et les réels b_i sont appelés coefficients du second membre.

- Un triplet de réels (x_0, y_0, z_0) est une solution du système (S) s'il vérifie, à la fois, les trois équations du système (S).

- Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système (S), c'est trouver tous les triplets de réels (x, y, z) solutions de (S).

Méthode de résolution par substitution

La substitution consiste à :

- choisir une équation et exprimer une des trois inconnues en fonction des deux autres,
- remplacer cette inconnue par son expression ainsi obtenue dans les deux autres équations qui formeront un système de deux équations à deux inconnues,
- résoudre le système de deux équations à deux inconnues obtenu,
- retrouver éventuellement la troisième inconnue.

Auto évaluation

Résoudre, dans $\mathbb{R}^3$ et par la méthode de substitution, chacun des systèmes suivants :

$$(S_1) \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y - z = 1 \\ x - 2y + 2z = 1 \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + 2y - 2z = 4 \\ x + y + z = 4 \end{cases} \quad (S_3) \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 2x + y + z = 1 \\ 2x + y - 3z = 2 \end{cases}$$

2) Résolution par la méthode du pivot de Gauss

Activités de découverte

1. Soit dans $\mathbb{R}^3$ le système de trois équations à trois inconnues suivant :

$$(S): \begin{cases} 3x + y + 2z = 0 \\ 2y - z = -3 \\ 2z = 2 \end{cases}$$

le tableau $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est appelé matrice du système (S).

► On dit que cette matrice est triangulaire.

Résoudre mentalement le système (S).

2. 1) Résoudre, dans $\mathbb{R}^3$ par la méthode de substitution, chacun des systèmes suivants :

$$(S_1) \begin{cases} 3x + y + z = 3 \\ x + 2y + 2z = 1 \\ x + 2y - z = 1 \end{cases}$$

$$(S_2) \begin{cases} 3x + y + z = 3 \\ 2x + 4y + 4z = 2 \\ x + 2y - z = 1 \end{cases}$$

$$(S_3) \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x + 2y + 2z = 1 \\ 3x + y + z = 3 \end{cases}$$

$$(S_4) \begin{cases} 3x + y + z = 3 \\ x + 2y + 2z = 1 \\ 4x + 3y = 4 \end{cases}$$

Vérifier qu'ils sont équivalents.

2) Indiquer les opérations effectuées pour passer de (S_1) à (S_2) , de (S_1) à (S_3) et de (S_1) à (S_4)

3. Soit dans $\mathbb{R}^3$ le système de trois équations à trois inconnues suivant :

$$(S): \begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 3x + 2y - z = 4 \\ x - 3y + 2z = 1 \end{cases}$$

On se propose de déterminer un système équivalent à (S) et dont la matrice est triangulaire

a. Montrer que les matrices $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \end{array} \right)$, $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & -1 & -7 & -23 \\ 0 & -4 & 0 & -8 \end{array} \right)$ et $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & -1 & -7 & -23 \\ 0 & 0 & 28 & 84 \end{array} \right)$

sont les matrices complètes respectives de trois systèmes équivalents à (S) .

b. Résoudre (S) .

► On dit qu'on a résolu le système (S) par la méthode du pivot de Gauss.

4. Reprendre le système (S) de l'activité précédente.

1) Vérifier que les systèmes suivants sont tous équivalents à (S)

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 4 \\ x + y + 2z = 9 \\ x - 3y + 2z = 1 \end{cases} ; \begin{cases} 3x + 2y - z = 4 \\ x + y + 2z = 9 \\ 4y = 8 \end{cases} ; \begin{cases} 3x + 2y - z = 4 \\ 3x + 3y + 6z = 27 \\ y = 2 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} 3x + 2y - z = 4 \\ y + 7z = 23 \\ y = 2 \end{cases}$$

2) Retrouver la solution de (S) .

Matrice d'un système de trois équations à trois inconnues

Soit dans $\mathbb{R}^3$ le système de trois équations à trois inconnues réelles x , y et z suivant

$$(S) \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

La matrice $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ est appelée matrice du système (S).

C'est une matrice carrée d'ordre trois.

La matrice $\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right)$ est appelée matrice complète du système (S).

Opérations élémentaires

Comme pour les systèmes de deux équations à deux inconnues, on admet qu'on obtient un système équivalent lorsque :

- on échange l'ordre de deux équations ($L \leftrightarrow L'$) ;
- on échange l'ordre des inconnues en conservant leurs coefficients respectifs ;
- on multiplie les deux membres d'une équation L par un réel non nul λ ($L \leftarrow \lambda L$) ;
- on remplace une équation L par une équation obtenue en additionnant membre à membre l'équation L et une autre multipliée par un réel non nul λ ($L \leftarrow L + \lambda L'$) ;
- on supprime une équation lorsqu'elle est le produit d'une autre par un réel non nul.

Matrice triangulaire

On appelle matrice triangulaire toute matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & d & 0 \\ c & e & f \end{pmatrix}$

Méthode du pivot de Gauss

Résoudre un système par la méthode du pivot de Gauss consiste à déterminer un système qui lui est équivalent et dont la matrice est triangulaire en procédant comme suit :

- On dispose le système de façon que le premier coefficient de la première ligne de sa matrice complète soit non nul,
- On effectue, éventuellement les opérations ($L \leftrightarrow L'$) et ($L \leftarrow L + \lambda L'$) jusqu'à ce que la matrice complète soit triangulaire.

Remarque

La méthode du pivot de Gauss peut s'appliquer à tout système de n équations linéaires du premier degré à m inconnues ($n \geq 2$, $m \geq 2$).

Exercice résolu 1

Résoudre, dans $\mathbb{R}^3$, le système de trois équations à trois inconnues suivant par la méthode du pivot de Gauss :

$$(S): \begin{cases} 2x - y + 3z = 6 \\ -3x + 2y + z = 8 \\ 2x + 3y - z = -2 \end{cases}$$

Solution

On se propose de résoudre le système (S) par la méthode du pivot de Gauss :

- $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 6 \\ -3 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \end{array} \right)$ sa matrice complète.

La ligne L_1 est $(2 \ -1 \ 3 \ 6)$, la ligne L_2 est $(-3 \ 2 \ 1 \ 8)$

et la ligne L_3 est $(2 \ 3 \ -1 \ -2)$

- On remplace L_2 par $L'_2 = L_2 + \frac{3}{2} L_1$ et on remplace L_3 par $L'_3 = L_3 - L_1$

L'_2 est $(0 \ \frac{1}{2} \ \frac{11}{2} \ 17)$ et L'_3 est $(0 \ 4 \ -4 \ -8)$

La nouvelle matrice complète est $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{11}{2} & 17 \\ 0 & 4 & -4 & -8 \end{array} \right)$

- On remplace L'_3 par $L''_3 = L'_3 - 8 L'_2$

L''_3 est $(0 \ 0 \ -48 \ -144)$

La nouvelle matrice complète est $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{11}{2} & 17 \\ 0 & 0 & -48 & -144 \end{array} \right)$

- On peut simplifier davantage en multipliant la deuxième ligne par 2 et la troisième ligne par $-\frac{1}{48}$ on aura un système équivalent à (S) et de matrice complète.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 11 & 34 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

$$\text{D'où } (S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 3z = 6 \\ y + 11z = 34 \\ z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

Par suite $S_{\mathbb{R}^3} = \{(-1, 1, 3)\}$

Exercice résolu 2

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système de trois équations à trois inconnues suivant :

$$(S): \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 3x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

Solution

On se propose de résoudre le système (S) par la méthode du pivot de Gauss :

- $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right)$ sa matrice complète.

La ligne L_1 est $(1 \ -1 \ 2 \ 1)$, la ligne L_2 est $(3 \ 2 \ 3 \ 1)$ et la ligne L_3 est $(2 \ 3 \ 1 \ 0)$

- On remplace L_2 par $L'_2 = L_2 - 3L_1$ et on remplace L_3 par $L'_3 = L_3 - 2L_1$
 L'_2 est $(0 \ 5 \ -3 \ -2)$ et L'_3 est $(0 \ 5 \ -3 \ -2)$

La nouvelle matrice complète est $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & -3 & -2 \end{array} \right)$

- On remplace L'_3 par $L''_3 = L'_3 - L'_2$
 L''_3 est $(0 \ 0 \ 0 \ 0)$

La nouvelle matrice complète est $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$

$$\text{D'où } (S) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 5y - 3z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-7z+3}{5} \\ y = \frac{3z-2}{5} \end{cases}$$

$$\text{Par suite } S_{\mathbb{R}}^3 = \left\{ \left(\frac{-7z+3}{5}, \frac{3z-2}{5}, z \right), z \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice résolu 3

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système de trois équations à trois inconnues suivant :

$$(S): \begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + z = 2 \\ -x - y - 2z = -4 \end{cases}$$

Solution

En multipliant la ligne L_2 par 2 et la ligne L_3 par -1 , on obtient un système (S') équivalent à (S)

$$(S') : \begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ x + y + 2z = 4 \\ x + y + 2z = 4 \end{cases}$$

Par suite $S_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \left(x, y, 2 - \frac{x+y}{2} \right), (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

Auto évaluation

1. Résoudre, dans $\mathbb{R}^3$ par la méthode de substitution, chacun des systèmes suivants.

$$(S_1) \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y - z = 1 \\ x - 2y + 2z = 1 \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + 2y - 2z = 4 \\ x + y + z = 4 \end{cases} \quad (S_3) \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 2x + y + z = 1 \\ 2x + y - 3z = 2 \end{cases}$$

2. Déterminer pour chacun des systèmes suivants la matrice et la matrice complète :

$$(S_1) \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + y - z = 1 \\ 3x - 2y - 2z = -7 \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} x + y - z = -1 \\ x + y + 2z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \quad (S_3) \begin{cases} -x - y + z = -2 \\ z = x + y + 2 \\ 2x + 2y - 2z = 4 \end{cases}$$

3. Reprendre les systèmes ci-dessus et résoudre chacun d'eux dans $\mathbb{R}^3$ par la méthode du pivot de Gauss.

4. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 1$.

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

Déterminer les réels a , b et c sachant que $I(-1, 4)$ est un point d'inflexion de (C) et la tangente à (C) en ce point est parallèle à la droite $D: y = -4x$.

5. Chacun des systèmes suivants comportent deux équations.

$$(S_1) \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y - 2z = 4 \end{cases} \quad (S_3) \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + 2y - 2z = 2 \end{cases}$$

Pour chacun d'eux :

- exprimer, dans les deux équations, une inconnue en fonction des deux autres;
- résoudre, dans $\mathbb{R}^2$, le système de deux équations dont les inconnues sont ces deux dernières ;
- et en déduire les solutions du système.

6. 1) Donner une équation du second degré dans $\mathbb{R}$ ayant pour solutions les réels -1 et 2 .

2) En déduire les solutions dans $\mathbb{R}^3$, du système : (S) $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 4x + 2y + z = 0 \end{cases}$

TP1 Le lapin et le kangourou :

Le lapin avait fait 77 sauts quand le kangourou partit à sa poursuite.

Sachant que pendant que le lapin fait 13 sauts, le kangourou en fait neuf et que 3 sauts de kangourou font autant que 8 sauts de lapin, combien de fois le kangourou devra-t-il sauter pour rattraper le lapin ?

Stratégie de résolution

- 1) Poser x le nombre de sauts que doit faire le kangourou pour rattraper le lapin et y le nombre de sauts faits par le lapin lorsqu'il est rattrapé.

Montrer que x et y vérifient le système :

$$\begin{cases} \frac{y}{8} = \frac{x}{3} \\ \frac{y-77}{13} = \frac{x}{9} \end{cases}$$

- 2) Résoudre le problème.

TP2 Pour remplir un bassin d'irrigation, on dispose de trois robinets A, B et C.

Avec les robinets A et B, le bassin se remplit en 10 minutes.

Avec les robinets B et C, le bassin se remplit en 20 minutes.

Avec les robinets C et A, le bassin se remplit en 12 minutes.

- 1) Combien faut-il de temps pour remplir le bassin avec chacun des robinets fonctionnant tout seul ?
2) Combien faut-il de temps pour remplir le bassin avec les trois robinets ouverts ensemble?

Stratégie de résolution

- 1) Poser a , b et c les débits respectifs (en litres/min) des robinets A, B et C et X la contenance du bassin (en litres).

a. Montrer que $10a+10b = 20b+20c = 12a+12c = X$

b. Poser $x = \frac{a}{X}$, $y = \frac{b}{X}$ et $z = \frac{c}{X}$ et résoudre le système :

$$\begin{cases} 10x + 10y = 1 \\ 20y + 20z = 1 \\ 12x + 12z = 1 \end{cases}$$

c. Vérifier que $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ et $\frac{1}{z}$ sont les temps respectifs nécessaires pour remplir le bassin avec les robinets A, B et C chacun fonctionnant tout seul.

- 2) Poser t le temps nécessaire pour remplir le bassin avec les trois robinets ouverts ensemble.

a. Montrer que $t(a+b+c) = X$.

b. En déduire que $t(x+y+z) = 1$ et que $t = \frac{1}{x+y+z}$

1 Elaborer un programme de résolution des systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues.

On développera un algorithme permettant :

- la saisie des coefficients,
- le calcul du déterminant,
- la décision de l'existence des solutions,
- l'affichage des solutions éventuelles.

2 1) Faire les exercices 15 et 16 de la rubrique "exercices et problèmes".
 2) Utiliser le logiciel "Menumath" pour vérifier les résultats obtenus précédemment.
 3) Utiliser le même logiciel pour résoudre des exemples de systèmes de p équations linéaires à q inconnues (où $p \geq 2$ et $q \geq 2$)

Exercices et problèmes

1 Résoudre par la méthode de substitution les systèmes suivants :

$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 3x - y = 9 \\ 2x - 3y = 11 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$$

Cocher la réponse correcte.

1) Le système $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ x + 5y = 1 \end{cases}$

- a. n'a pas de solution ;
- b. a un seul couple solution ;
- c. a une infinité de couples solutions.

2. Le système $\begin{cases} x - \frac{2}{3}y = 1 \\ 3x - 2y = 3 \end{cases}$

- a. n'a pas de solution ;
- b. a un seul couple solution ;
- c. a une infinité de couples solutions.

Pour les exercices 2 à 7, résoudre les systèmes proposés.

2

$$\begin{cases} 5x - 4y = 45 \\ x + y = 18 \end{cases} ; \begin{cases} 5x - 4y = 45 \\ x + y = -18 \end{cases} ; \begin{cases} 5x - 4y = 45 \\ (x + y)^2 = 324 \end{cases}$$

3

$$\begin{cases} x + y = 35 \\ 3x - 4y = 112 \end{cases} ; \begin{cases} x^2 + y^2 = 35 \\ 3x^2 - 4y^2 = 112 \end{cases}$$

4

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x - y = -4 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} y = x + 2 \\ y = -\frac{1}{3}x - 2 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ x - \frac{2}{3}y = 5 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x + y = 1 \\ 2(x - y) - y = 2(x + y) - 5y \end{cases} \quad \text{e) } (x + y)^2 + (2x - y - 3)^2 = 0$$

$$\text{f) } \begin{cases} \frac{x}{y-1} = 1 \\ 3x - 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

5

$$\begin{cases} 2x + y = 14 \\ 3x + 2y = 19 \end{cases} ; \begin{cases} 2x^2 + y^2 = 14 \\ 3x^2 + 2y^2 = 19 \end{cases}$$

6

$$\begin{cases} x - 2y = -2 \\ 3x + 7y = 33 \end{cases} ; \begin{cases} \sqrt{x} - 2\sqrt{y} = -2 \\ 3\sqrt{x} + 7\sqrt{y} = 33 \end{cases}$$

7

$$\begin{cases} x - y = \frac{1}{4} \\ 2x + 3y = \frac{1}{2} \end{cases} ; \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

8

$$\text{Soit } f : x \mapsto \frac{4x - 5}{x^2 - 1}$$

Déterminer les réels a et b tels que: pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$f(x) = \frac{a}{x + 1} + \frac{b}{x - 1}$$

9

Une somme de 2100M est composée de pièces de 100M et de pièces de 20M. Sachant que le nombre total de pièces est 45, quel est le nombre de pièces de chaque sorte?

10 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

a.
$$\begin{cases} x - y = 5 \\ 2x + y = 1 \\ x + 3y = -7 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - 3y = -4 \\ -3x + 8y = 2 \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ x + \frac{1+3y}{2} = 0 \\ \frac{2x+1}{3} + y = 0 \end{cases}$$

d.
$$\begin{cases} 4x + 5y = -5 \\ x + y = -2 \\ 3x + 4y = -3 \end{cases}$$

11 1. Résoudre le système
$$\begin{cases} x - 5y = -3,8 \\ 3x + 2y = 12,4 \end{cases}$$

2. Déduire l'ensemble des solutions de chacun des systèmes suivants :

$$(S) \begin{cases} x - 5y = -3,8 \\ 3x + 2y = 12,4 \\ 5x + y = 17,4 \end{cases} \quad (T) \begin{cases} x - 5y = -3,8 \\ 3x + 2y = 12,4 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$$

12 a et b sont deux entiers pris parmi 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.

On considère le système (S)
$$\begin{cases} ax + 5y = 2 \\ 2x + by = 3 \end{cases}$$

- 1) a. Calculer le déterminant de ce système.
- b. Pour quels couples (a, b) ce déterminant est nul ?
- c. Pour chacun de ces couples, résolvez (S).

2) On jette simultanément deux dés, un dé rouge et un dé noir, dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

On note a le numéro porté par la face supérieure du dé rouge et b le numéro porté par la face supérieure du dé noir.

Quelle est la probabilité que le système (S) correspondant au lancer des deux dés ait une solution unique ?

13 On considère le système suivant :

$$(S) \begin{cases} \alpha x + 2y = 3 \\ 3x + y = 9 \end{cases}, \alpha \text{ est un paramètre réel.}$$

- a. On suppose que $\alpha = 7$. Combien le système a-t-il de solutions ?
- b. On suppose que $\alpha = 6$, le système a-t-il des solutions ?

c. Déterminer α pour que le système admette une solution unique.

14 En combinant la première ligne de ce système avec chacune des lignes suivantes, vérifier que l'on obtient deux équations équivalentes :

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x + 3y - 2z = 5 \\ 3x + 8y - 5z = 11 \end{cases}$$

Exprimer alors y en fonction de z , puis x en fonction de z .

En déduire que le système admet une infinité de triplets solutions dépendants du réel z .

15 En utilisant la méthode du pivot de Gauss, résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes suivants :

a.
$$\begin{cases} 2x - y + 2z = -3 \\ 2x + 2y - 3z = 9 \\ 4x + 4y - z = 3 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ -x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ x - y - z = 2 \\ x + y - 2z = 5 \end{cases}$$

d.
$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 8 \\ x + 4y + 5z = 2 \\ x + y - 10z = 2 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} 5x - 4y + z = 1 \\ 2x + 3y + z = 5 \\ x + 2y - z = 3 \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} 6x - y - z = 6 \\ x + 6y + 3z = 4 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$$

16 Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes suivants :

a.
$$\begin{cases} 2x - y + 2z = -3 \\ 2x + 2y - 3z = 9 \\ 4x + 4y - z = 3 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ -x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ x - y - z = 2 \\ x + y - 2z = 5 \end{cases}$$

d.
$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 8 \\ x + 4y + 5z = 2 \\ x + y - 10z = 2 \end{cases}$$

17 Soit la fonction $f : x \mapsto ax + b + \frac{c}{x-1}$

1) Déterminer les trois réels a , b et c tels que l'on ait $f(-1) = -3$, $f(2) = 3$ et $f(3) = 3$.

2) Dresser le tableau de variation de la fonction obtenue.

18 1) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système : (S):
$$\begin{cases} x - y + z = 17 \\ 9x + 3y + z = -43 \\ 6x + y = -27 \end{cases}$$

2) Soit la fonction $f : x \mapsto x^3 + ax^2 + bx + c$ où a , b et c sont trois réels.

On suppose que la courbe (C) de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ passe par les points $A(-1, 16)$ et $B(3, -16)$ et qu'elle admet au point B une tangente de vecteur directeur $\vec{i}$.

a. Montrer que le triplet (a, b, c) est solution du système (S).

b. Déterminer alors la fonction f et dresser son tableau de variation.

19 Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes suivants :

a.
$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + 2y + 3 = 3y - z + 4 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} 3x + 2y - z = -2 \\ x + 2y + 3z = 4 \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x - y + 5t = 9 \end{cases}$$

d.
$$\begin{cases} x + y - 2z = -5 \\ x + y + 3z = 0 \end{cases}$$

20 Dans le même magasin, trois amis achètent les mêmes types d'articles :

- Mohamed : 1 feutre, 1 stylo à bille et 1 marqueur pour 1,550 dinar
- Ali : 5 feutres, 4 stylos à bille et 2 marqueurs pour 5,400 dinars.
- Ahmed : 3 feutres, 4 stylos à bille et 1 marqueur pour 3,500 dinars. Déterminer le prix de chaque article.

21 Dans un champ de forme triangulaire, trois chèvres sont attachées, par une corde, à chaque sommet du triangle.

Calculer les longueurs de chaque corde pour que les trois secteurs de champ à brouter soient tangents deux à deux.

(On donne $AB = 65$ m, $AC = 68$ m et $BC = 51$ m)

22 Dans une classe, la moyenne des notes dans un devoir n'est pas satisfaisante.

Le professeur souhaite relever cette moyenne en prenant en compte le travail sérieux fourni par 10 élèves.

S'il augmente de 1 point la note de chacun de ces dix élèves, la moyenne de la classe est égale à 9,5.

S'il augmente de 2 points la note de chacun de ces dix élèves, la moyenne de la classe est égale à 10.

Trouver le nombre des élèves de la classe et la moyenne initiale.

23 Deux villes A et B sont distantes de 46km; le trajet AB comporte du terrain plat, une montée et une descente. Un cycliste va de A en B en 2h30mn, et revient de B en A en 2h24mn. On suppose que les vitesses moyennes du cycliste sur les trois portions sont respectivement 20km/h, 12km/h et 30km/h.

On désigne par x la longueur de la portion plat, y celle de la montée et z celle de la descente.

1) Montrer que les réels x, y et z sont solutions dans $\mathbb{R}^3$ du système :

$$\begin{cases} x + y + z = 46 \\ 3x + 5y + 2z = 150 \\ 3x + 2y + 5z = 144 \end{cases}$$

2) a. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système (S).

b. En déduire la longueur de chacune des portions du trajet AB.

24 Dans un désert, il y a des serpents, des souris et des scorpions.

Chaque matin, chaque serpent mange une souris.

Chaque midi, chaque scorpion pique un serpent (et ça ne pardonne pas)

Chaque soir, chaque souris mange un scorpion.

Au bout d'une semaine, il ne reste plus qu'un animal : une souris.

Quel était au départ le nombre de serpents, de souris, de scorpions ?

Résolution des systèmes d'équations linéaires par les mathématiciens chinois

A l'antiquité les mathématiciens chinois utilisent les baguettes pour écrire et pour résoudre les systèmes d'équations linéaires.

Les baguettes à calculer, que l'on dispose sur une planche de bois quadrillée (une sorte d'échiquier) apparaissent vers le II^e siècle avant JC et sont d'un usage courant jusqu'au XIII^e siècle après JC. Ce support, à deux dimensions, permet le développement de calculs complexes: Ainsi, on trouve la méthode du pivot de Gauss pour la résolution des systèmes d'équations linéaires 3x3 dès le I^{er} siècle avant JC!

“方程” (线性方程组)

I	II	III
II	III	II
III	I	I
=T	=III	=II

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$$

“方程术” 例 $\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$ ①
②
③

I	II	III
II	III	II
III	I	I
=T	=III	=II

③ ② ①

I	T	II
II	III	II
III	I	I
=T	=III	=II

③ × 3

I	0	II
II	III	II
III	I	I
=T	=III	=II

③ - ① - ②

III	0	II
T	III	II
III	I	I
=T	=III	=II

③ × 3

0	0	II
III	III	II
III	I	I
=T	=III	=II

③ - ①

0	0	II
=0	III	II
III	I	I
=T	=III	=II

③ × 5

0	0	II
0	III	II
=T	I	I
=T	=III	=II

③ - ③ - ③ - ③ - ③

36x = 99

Principe de la résolution par les baguettes

Cette disposition permet bien sûr l'écriture d'un système d'équations linéaires, mais aussi sa résolution comme le montre la figure ci-contre. En multipliant et soustrayant les colonnes, on obtient de proche en proche un système triangulaire qu'on sait résoudre facilement.

A la suite de contacts avec les arabes, la technique du calcul indien avec les chiffres arabes les mathématiciens chinois adoptent avec enthousiasme le nouveau calcul pour rendre plus simple la résolution des systèmes d'équations linéaires.

PLAN DU CHAPITRE

- I. Notion de proposition, table de vérité
- II. Négation d'une proposition
- III. Les connecteurs logiques

Travaux pratiques

Avec l'outil informatique

Exercices et problèmes

Mathématiques et culture

I. Notion de proposition , table de vérité

Activités préliminaires

1. Soient les énoncés suivants :

E_1 : il fait froid.

E_2 : $2x + 3$ a un signe constant lorsque x varie dans $\mathbb{R}$.

E_3 : une imprimante est un périphérique de sortie.

E_4 : si x est un multiple de 4 alors x est pair

E_5 : le ballon est sphérique.

E_6 : L'équation $5x + 7 = 0$ a une solution

E_7 : La représentation de la fonction : $x \mapsto x^2 - 2|x|$ est une parabole.

Recopier le tableau ci-dessous et inscrire chacun des codes : E_1 , E_2 , E_3 , E_4 , E_5 et E_6 des énoncés ci - dessus dans la colonne convenable :

Proposition vraie	Proposition fausse	n'est pas une proposition

Solution

- L'énoncé E_1 est vrai pour certains et faux pour d'autres (c'est relatif). E_1 n'est pas une proposition.
- E_2 et E_7 sont deux propositions fausses.
- E_3 et E_4 sont deux propositions vraies.
- L'énoncé E_5 n'est pas une proposition car un ballon de football est sphérique et un ballon de rugby ne l'est pas.
- L'énoncé E_6 n'est pas une proposition car il est vrai dans $\mathbb{R}$ et faux dans $\mathbb{N}$.

L'essentiel du cours

Définition 1

On appelle proposition tout énoncé pouvant être exclusivement vrai ou faux.

Une proposition est aussi appelée assertion et elle est généralement désignée par une lettre minuscule: p, q, r ou $s \dots$

Définition 2

Une proposition qui contient une variable est appelée une **fonction propositionnelle**

- Certaines fonctions propositionnelles sont vraies quelque soit la variable.

Exemple : si x est un irrationnel alors $2x$ est irrationnel. Cette fonction est appelée une **tautologie**.

- D'autres sont fausses quelque soit la variable.

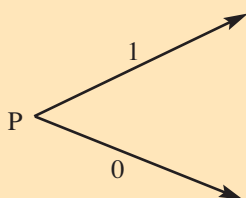
Exemple : si x est un réel alors $x^2 + 1 < 0$. Cette fonction est appelée une **antilogie**.

Table de vérité

Soit p une proposition. On affecte à p le nombre 1 si elle est vraie et 0 si elle est fausse.

On schématise ce fait par :

un arbre de choix



ou un tableau appelé table de vérité de p

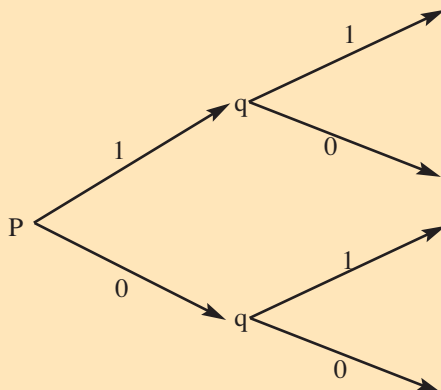
p
1
0

Si on considère deux propositions p et q il y aura quatre issues possibles qu'on schématise par :

un arbre de choix

ou

une table de vérité



p	q
1	1
1	0
0	1
0	0

Auto évaluation

1. Pour chacun des énoncés suivants, indiquer la valeur de vérité 1 (s'il est vrai) ou bien 0 (s'il est faux) et faire la discussion lorsque le cas s'impose :

E_1 : le milieu de $[AB]$ est aligné avec A et B.

E_2 : deux droites non parallèles sont sécantes.

E_3 : $(a + b)$ et $(a - b)$ sont pairs lorsque a et b sont deux entiers de même parité

E_4 : $U_n = U_p \cdot q^{n-p+1}$ (où U est une suite géométrique de raison q)

E_5 : la courbe d'une fonction affine est la tangente à elle - même en l'un quelconque de ses points.

E_6 : $a + b \geq a - b$

(Justifier en particulier le fait que E_2 et E_6 ne sont pas des propositions)

2. 1) Combien y aura-t-il d'issues possibles si on considère trois propositions p, q et r simultanément ?
2) Dresser la table de vérité qui schématise cette situation.

II. Négation d'une proposition

Activités de découverte

1. Soit E l'ensemble des multiples de 3 inférieurs à 20 et soit la fonction propositionnelle :
 $p(n)$: " n est multiple de 6 "
- 1) Définir l'ensemble E en extension (Donner la liste des éléments de E)
 - 2) Déterminer l'ensemble A des éléments de E pour lesquels $p(n)$ est vraie.
 - 3) Déterminer l'ensemble B des éléments de E pour lesquels $p(n)$ est fausse.
2. Nier chacune des propositions suivantes et donner la valeur de vérité de la proposition et de sa négation :
- p : Excel est un tableur.
 q : $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{R}$
 r : Cette séance est une séance d'informatique.
 s : Le turbo pascal est un langage compilé
 t : Une suite arithmétique non nulle dont la raison est comprise entre -1 et 1 a pour limite 0.
3. 1) Soit p une proposition, dresser la table de vérité de la proposition non (non p).
Conclure.
2) En déduire le complémentaire du complémentaire d'une partie A d'un ensemble E.

L'essentiel du cours

Négation d'une proposition

La négation d'une proposition p est une nouvelle proposition notée $\text{non } p$ et définie par la table de vérité ci-contre.

p	$\text{non } p$
1	0
0	1

Remarque : $\text{non}(\text{non } p)$ et p ont la même valeur de vérité

Définition d'une partie en compréhension

Une partie A d'un ensemble E dont les éléments vérifient une fonction propositionnelle $p(x)$ sera définie par :

$A = \{x \in E ; p(x) \text{ est vraie}\}$ ou plus simplement : $A = \{x \in E ; p(x)\}$
c'est une définition de A en compréhension.

Complémentaire d'un ensemble

Une partie B d'un ensemble E dont aucun de ses éléments ne vérifie une fonction propositionnelle $p(x)$ sera définie par :

$B = \{x \in E ; p(x) \text{ est fausse}\}$ ou plus simplement : $B = \{x \in E ; \text{non}(p(x))\}$
c'est une définition de B en compréhension.

La partie B ainsi obtenue est appelée le complémentaire de A par rapport à E .

On note : $B = C_E^A$ ou $B = \bar{A}$

Auto évaluation

Définir en compréhension le complémentaire de chacun des ensembles suivants :

$A = \{x \in \mathbb{N}; x < 4\}$ (dans $\mathbb{N}$)

$B = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 4\}$ (dans $\mathbb{R}$)

$C =$ l'ensemble des élèves présents le jour du devoir (dans la classe)

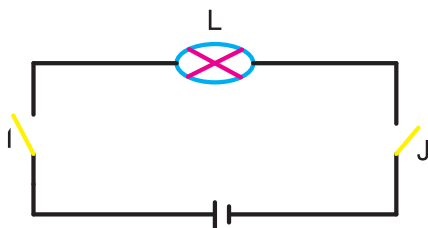
$D =$ l'ensemble des multiples de 2 (dans $\mathbb{N}$).

III. Les connecteurs logiques

1) Conjonction et disjonction

Activités de découverte

1. On considère le montage électrique suivant :



Soit p la proposition qui indique l'état de l'interrupteur I

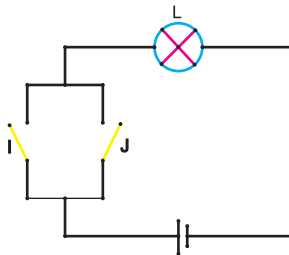
(p aura pour valeur 1 si I est fermé et 0 si I est ouvert)

On considèrera de même les propositions q et r qui indiquent respectivement l'état de l'interrupteur J et de la lampe L .

Résumer toutes les situations possibles pour p, q et r dans une même table de vérité.

- La valeur de vérité de la proposition r dépend de celles de p et q , ainsi, aux deux propositions p et q , on vient d'associer une troisième proposition notée (p et q) ou encore $(p \wedge q)$ et appelée **conjonction** de p et q .

2. On considère le montage électrique suivant :



Soit p la proposition qui indique l'état de l'interrupteur I

(p aura pour valeur 1 si I est fermé et 0 si I est ouvert)

On considèrera de même les propositions q et r qui indiquent respectivement l'état de l'interrupteur J et de la lampe L .

Résumer toutes les situations possibles pour p, q et r dans une même table de vérité.

- La valeur de vérité de la proposition r dépend de celles de p et q , ainsi, aux deux propositions p et q , on vient d'associer une troisième proposition notée (p ou q) ou encore $(p \vee q)$ et appelée **disjonction** de p et q .

3. Soit E un ensemble et A et B deux parties non vides de E définies par :

$A = \{ x \in E ; p(x) \}$ et $B = \{ x \in E ; q(x) \}$ où $p(x)$ et $q(x)$ sont deux fonctions propositionnelles.

Définir, en compréhension, les ensembles $A \cap B$ et $A \cup B$.

4. Soient p, q et r trois propositions.

1) Vérifier, à l'aide d'une table de vérité, que les propositions $p \wedge q$ et $q \wedge p$ ont la même valeur de vérité.

2) Vérifier, à l'aide d'une table de vérité, que les propositions $(p \wedge q) \wedge r$ et $p \wedge (q \wedge r)$ ont la même valeur de vérité.

5. Soient p, q et r trois propositions.

1) Vérifier, à l'aide d'une table de vérité, que les propositions $p \vee q$ et $q \vee p$ ont la même valeur de vérité.

2) Vérifier, à l'aide d'une table de vérité, que les propositions $(p \vee q) \vee r$ et $p \vee (q \vee r)$ ont la même valeur de vérité.

6. Soient p et q deux propositions.

1) Vérifier, à l'aide d'une table de vérité, que les propositions $\neg(p \wedge q)$ et

$[(\neg p) \vee \neg q]$ ont la même valeur de vérité.

2) En déduire que les propositions $\neg(p \vee q)$ et $[(\neg p) \wedge (\neg q)]$ ont la même valeur de vérité.

7. A et B sont deux parties d'un ensemble E définies en compréhension par :

$A = \{x \in E ; p(x)\}$ et $B = \{x \in E ; q(x)\}$ (où p et q sont deux propositions)

1) Rappeler la définition en compréhension de :

a. $\overline{A}$ et $\overline{B}$

b. $\overline{A \cup B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$

c. $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A} \cup \overline{B}$

2) Utiliser les résultats de l'activité 6 pour montrer que :

a. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

b. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

8. Soient p , q et r trois propositions.

1) Vérifier, à l'aide d'une table de vérité, que les propositions $p \vee (q \wedge r)$

et $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ ont la même valeur de vérité.

2) En déduire que les propositions $p \wedge (q \vee r)$ et $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ ont la même valeur de vérité.

3) Déduire que si A , B et C sont trois ensembles alors :

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ et $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

L'essentiel du cours

Connecteur logique

Un connecteur logique est une opération qui à deux propositions associe une troisième.

Conjonction

Définition

La conjonction est un connecteur logique qui à deux propositions p et q associe la proposition $(p \wedge q)$ qu'on appelle la conjonction de p et q et qu'on lit p et q définie par la table de vérité ci-contre :

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Théorème

Si deux parties A et B d'un ensemble E sont définies respectivement par les propositions p et q alors l'ensemble $A \cap B$ est définie par la conjonction $(p \wedge q)$.

Propriétés

- Les propositions $(p \wedge q)$ et $(q \wedge p)$ ont la même valeur de vérité : on dit que la conjonction des propositions est commutative.
- Les propositions $[(p \wedge q) \wedge r]$ et $[p \wedge (q \wedge r)]$ ont la même valeur de vérité : on dit que la conjonction des propositions est associative.

Disjonction

Définition

La disjonction est un connecteur logique qui à deux propositions p et q associe la proposition $(p \vee q)$ qu'on appelle la disjonction de p et q et qu'on lit p ou q définie par la table de vérité ci-contre:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Théorème

Si deux parties A et B d'un ensemble E sont définies respectivement par les propositions p et q alors l'ensemble $A \cup B$ est défini par la disjonction $(p \vee q)$.

Propriétés

- Les propositions $(p \vee q)$ et $(q \vee p)$ ont la même valeur de vérité.
On dit que la disjonction des propositions est commutative.
 - Les propositions $[(p \vee q) \vee r]$ et $[p \vee (q \vee r)]$ ont la même valeur de vérité. On dit que la disjonction des propositions est associative.
 - La négation de la disjonction $(p \vee q)$ est la conjonction $[(\text{non}(p) \wedge \text{non}(q))]$
 - La négation de la conjonction $(p \wedge q)$ est la disjonction $[(\text{non}(p) \vee \text{non}(q))]$
 - Les propositions $p \vee (q \wedge r)$ et $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ ont la même valeur de vérité.
 - Les propositions $p \wedge (q \vee r)$ et $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ ont la même valeur de vérité.
- On dit que la conjonction et la disjonction sont distributives l'une par rapport à l'autre.

Théorème (Lois de MORGAN).

Si A et B sont deux parties d'un ensemble non vide E alors on a :

$$a. \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$b. \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Auto évaluation

- 1) Proposer deux conjonctions qui sont vraies et deux autres qui sont fausses.
2) Proposer deux disjonctions qui sont vraies et deux autres qui sont fausses.
2. Donner la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :
 p : $(3 < 5 \text{ et } 4 \neq 1 + 3)$
 q : $(5 = 3 + 2 \text{ et tout carré est un rectangle})$.
 r : $(\text{le 1}^{\text{er}} \text{ mai on n'a pas classe et le 1}^{\text{er}} \text{ janvier on a cours})$.
 s : $(\text{Alger est la capitale du Maroc et Tripoli est la capitale du Liban})$.
 t : $(\text{En pascal chaque instruction doit se terminer par un point-virgule et en basic chaque ligne doit être numérotée})$

3. Donner la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :

p : ($3 < 5$ ou $3 = 5$)

q : (tout rectangle est un carré ou tout carré est un rectangle).

r : (le 1^{er} mai on n'a pas classe ou le 1^{er} janvier on a cours).

s : (Alger est la capitale du Maroc ou Tripoli est la capitale du Liban).

t : (En pascal chaque instruction doit se terminer par un point-virgule ou en basic chaque ligne doit être numérotée).

4. Donner la négation de chacune des propositions ci-dessous :

p : " la voiture de ton père est rouge ou bleue "

q : " je n'ai qu'un seul ami ou deux "

r : " les voitures dont la puissance est quatre ou cinq chevaux payent la même taxe "

5. Compléter :

1) $x \notin (A \cup B)$ signifie $x \notin A \dots x \notin B$

2) $x \notin (A \cap B)$ signifie ...

2) Implication et équivalence

Activités de découverte

1. p et q étant deux propositions données, dresser la table de vérité de la disjonction $[\text{non}(p) \vee q]$.

► La proposition $[\text{non}(p) \vee q]$ est appelée implication de p et q.
on la note : $p \Rightarrow q$ et on lit : p implique q.

2. D'après la table de vérité de l'implication établie dans l'activité précédente, la proposition " $p \Rightarrow q$ " n'est fausse que dans le seul cas où p est vraie et q est fausse.

Donc pour montrer que " $p \Rightarrow q$ " est vraie il suffit de montrer qu'on n'est pas dans ce cas.

Déterminer la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :

p: " 20 est un multiple 5 implique $13 < 15$ "

q: " 20 est un multiple 5 implique $13 > 15$ "

r: " Aujourd'hui c'est dimanche implique on a cours "

s: " Aujourd'hui c'est dimanche implique on n'a pas cours "

3. 1) Montrer à l'aide d'une table de vérité que l'implication n'est pas commutative.

► L'implication " $q \Rightarrow p$ " est appelée **la réciproque** de " $p \Rightarrow q$ "

2) a. Proposer deux exemples d'implication vraie dont les réciproques sont vraies.

b. Proposer deux exemples d'implication vraie dont les réciproques sont fausses.

4. p et q étant deux propositions données, montrer que les implications " $p \Rightarrow q$ " et " $\neg(q) \Rightarrow \neg(p)$ " ont la même valeur de vérité.

► L'implication " $\neg(q) \Rightarrow \neg(p)$ " est appelée **la contraposée** de " $p \Rightarrow q$ "

5. Soient deux fonctions propositionnelles p et q et deux parties A et B d'un ensemble E telles que $A = \{ x \in E ; p(x) \}$, $B = \{ x \in E ; q(x) \}$.

Montrer que les deux propositions " $A \subset B$ " et " $p \Rightarrow q$ " ont la même valeur de vérité.

6. Donner la table de vérité de la conjonction $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$

► La proposition $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$ est appelée équivalence de p et q , on la note : $p \Leftrightarrow q$ et on lit : p équivalente à q .

7. Soit p et q deux fonctions propositionnelles et A et B deux parties d'un ensemble E telles que $A = \{ x \in E ; p(x) \}$, $B = \{ x \in E ; q(x) \}$.

Montrer que les deux propositions " $A = B$ " et " $p \Leftrightarrow q$ " ont la même valeur de vérité.

L'essentiel du cours

Implication

Définitions

- L'implication est un connecteur logique qui à deux propositions p et q associe la proposition notée $(p \Rightarrow q)$ et dont la

valeur de vérité est celle de la proposition $[\neg(p) \vee q]$

on lit : p implique q

ou si p alors q

$(p \Rightarrow q)$ est alors définie par la table de vérité ci-contre.

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

- L'implication " $q \Rightarrow p$ " est appelée la réciproque de l'implication " $p \Rightarrow q$ "

Une implication et sa réciproque peuvent ne pas avoir la même valeur de vérité

par suite l'implication n'est pas commutative.

- La contraposée d'une implication $(p \Rightarrow q)$ est l'implication $[\neg(q) \Rightarrow \neg(p)]$

Une implication et sa contraposée ont la même valeur de vérité.

Théorème

Si A et B sont deux parties d'un ensemble E définies respectivement par :

$A = \{ x \in E ; p(x) \}$ et $B = \{ x \in E ; q(x) \}$ (où p et q sont deux propositions)

alors l'inclusion $(A \subset B)$ a la même valeur de vérité que l'implication $(p \Rightarrow q)$.

Equivalence

Définition

L'équivalence logique est un connecteur logique qui à deux propositions p et q associe la proposition notée $(p \Leftrightarrow q)$ et dont la valeur de vérité est celle de la proposition

$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$

on lit : p équivalent à q

ou p si et seulement si q

$(p \Leftrightarrow q)$ est alors définie par la table de vérité ci-contre.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Théorème

Si A et B sont deux parties d'un ensemble E définies respectivement par :

$A = \{ x \in E ; p(x) \}$ et $B = \{ x \in E ; q(x) \}$ (où p et q sont deux propositions)

L'égalité $(A = B)$ a la même valeur de vérité que l'équivalence $(p \Leftrightarrow q)$.

Auto évaluation

1. On considère les propositions suivantes :

p : je suis en 3^{ème} Sciences informatiques

q : (U_n) est une suite arithmétique ((U_n) est la suite de terme général $U_n = 2n - 3$)

r : l'année dernière j'étais en 1^{ère} année secondaire.

Donner la valeur de vérité de chacune des implications suivantes:

a. $p \Rightarrow q$

b. $q \Rightarrow p$

c. $r \Rightarrow p$

d. $r \Rightarrow q$

e. $q \Rightarrow r$

2. On considère les trois énoncés suivants :

p : tout réel admet une racine carrée

q : le carré d'un entier impair est un entier pair

r : une équation du second degré peut admettre trois solutions.

L'implication $[(p \wedge q) \Rightarrow r]$ est - elle vraie ou fausse ?

3. Pour chacune des propositions ci-dessous, donner :

1) La valeur de vérité

2) La réciproque et sa valeur de vérité

$$p : (0 \times 2 \neq 0) \Rightarrow (2 \neq 0)$$

$$q : (12 \text{ est pair}) \Rightarrow (11 \text{ est premier})$$

$$r : (\text{Un carré a quatre côtés isométriques}) \Rightarrow (\text{Un losange a quatre angles isométriques})$$

$$s : (\text{Tout triangle isocèle est équilatéral}) \Rightarrow (\text{Tout triangle isocèle est rectangle})$$

4. Donner la valeur de vérité de chacune des propositions ci-dessous, :

$$p : (0 \times 2 \neq 0) \Leftrightarrow (2 \neq 0)$$

$$q : (12 \text{ est pair}) \Leftrightarrow (11 \text{ est premier})$$

$$r : (\text{Un carré a quatre côtés isométriques}) \Leftrightarrow (\text{Un losange a quatre angles isométriques})$$

$$s : (\text{Tout triangle isocèle est équilatéral}) \Leftrightarrow (\text{Tout triangle isocèle est rectangle})$$

5. Dans chacun des cas suivants dire si les deux ensembles A et B sont égaux (P est l'ensemble des points du plan)

$$1) A = \{ M(x,y) \in P ; x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \text{ où } a, b \text{ et } c \text{ sont des réels} \}$$

$$B \text{ est le cercle de centre } I \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2} \right) \text{ et de rayon } r = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}}$$

$$2) A = \{ M \in P, \vec{ME} \cdot \vec{MF} = 0 ; E \text{ et } F \text{ sont deux points distincts donnés} \}$$

$$B \text{ est le cercle de diamètre } [EF].$$

Fonction caractéristique d'un ensemble

Soit E un ensemble, pour toute partie A de E la fonction caractéristique de l'ensemble A est la fonction notée 1_A et définie de la manière suivante :

$$1_A : E \mapsto \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

On a alors $A = \{x \in E, 1_A(x) = 1\}$ et $\bar{A} = \{x \in E, 1_A(x) = 0\}$

Dans toute la suite on désigne par A, B et C trois parties de E .

- 1 a. Déterminer les fonctions caractéristiques respectives de E et de $\emptyset$
b. Montrer que $1_{\bar{A}} = 1 - 1_A$

(c'est-à-dire pour tout x élément de E on a $1_{\bar{A}}(x) = 1 - 1_A(x)$)

- 2 Montrer que :
a. $A \subset B \Leftrightarrow 1_A \leq 1_B$
b. $A = B \Leftrightarrow 1_A = 1_B$

- 3 Montrer que :
a. $1_{A \cap B} = 1_A \cdot 1_B$
b. $1_{A \cup B} = 1_A + 1_B - 1_A \cdot 1_B$

- 4 Retrouver alors les lois de MORGAN :
$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

- 5 Application : montrer que
si $(A \cap B = A \cap C)$ et $(A \cup B = A \cup C)$ alors $B = C$

Soit le programme " logique "ci-dessous :

```
Program Logique;
uses wincrt;
var vp,vq:integer;
Begin
Write('Entrer la valeur de vérité de p, vp = ');
Readln(vp);
Write('Entrer la valeur de vérité de q, vq = ');
Readln(vq);
if (vp=1) and (vq=1) then
begin
Write ('la valeur de vérité de la conjonction (p et q) est 1 ');
End
Else
Writeln('la valeur de vérité de la conjonction (p et q) est 0 ');
End.
```

- 1) Déterminer la tâche de ce programme ?
- 2) Compléter le pour qu'il affiche - en plus -la valeur de vérité de la disjonction ($p \vee q$)

1

Nier les propositions suivantes :

- 1) Cette robe est bleue ou rouge.
- 2) Tous les tableaux sont noirs
- 3) Notre hôte n'a bu ni du thé ni du café.
- 4) Il n'a raté qu'une seule question

2

Donner la négation de chacune des propositions suivantes :

P : la classe 3^{ème}SI₁ contient au plus 30 élèves.

q : la classe 3^{ème} SI₂ contient au moins 30 élèves.

r : Toutes les classes 3^{ème} SI contiennent au plus 30 élèves.

s : Aucune des classes 3^{ème} SI ne contient 30 élèves.

3

1) Résoudre le système :
$$\begin{cases} (x - 1)(y - 2) = 0 & (x \text{ et } y \text{ sont des réels}) \\ (x - 2)(y - 3) = 0 \end{cases}$$

2) Dédurre l'ensemble des couples de réels (x, y) vérifiant :

$$(x - 1)(y - 2) \neq 0 \text{ ou } (x - 2)(y - 3) \neq 0$$

4

Soit E l'ensemble des entiers naturels n tels que $1 \leq n \leq 50$.

On pose : $F = \{ n \in E, n \text{ est premier} \}$, $G = \{ n \in E, n \leq 25 \}$, $p(n)$: n est premier et $q(n)$: $n \leq 25$.

1) On considère les ensembles $A = \{ n \in E, p(n) \text{ et } q(n) \}$ et $B = \{ n \in E, p(n) \text{ ou } q(n) \}$

Définir chacun des ensembles A , B et C en extension.

2) Exprimer chacun des ensembles A , B et C à l'aide de F , G

5

1) p , q et r sont trois propositions. Utiliser une table de vérité pour montrer que la proposition : $([(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r))$ est une tautologie.

Remarque : pour exprimer ce résultat on dit que l'implication est transitive.

2) Utiliser le résultat précédent pour déterminer la valeur de vérité de l'implication :

$$\text{Si} \left(\begin{array}{l} 2 < 3 \Rightarrow \text{tout rectangle est un parallélogramme} \\ \text{et tout rectangle est un parallélogramme} \Rightarrow 2517 \text{ est divisible par } 3 \end{array} \right)$$

$$\text{alors } (2 < 3 \Rightarrow 2517 \text{ est divisible par } 3)$$

6

1) Que peut-on dire de trois ensembles A , B et C tels que : $A \subset B$, $B \subset C$ et $C \subset A$?

2) Justifier votre réponse en utilisant les définitions et les propriétés de connecteurs logiques adéquats.

7 Former les négations des propositions :

- a. $(p \vee q) \wedge r$ b. $(p \wedge q) \vee r$ c. $(p \Rightarrow q)$ d. $(p \Leftrightarrow q)$
e. $(p \Rightarrow q) \wedge r$ f. $(\text{non } p \Rightarrow q) \vee \text{non } r$

8 Formuler la contraposée de :

- 1) $|x| \neq |y| \Rightarrow x \neq y$
- 2) $(x - 4 = 0) \Rightarrow x^2 = 16$
- 3) $a \neq 0 \Rightarrow a^0 = 1$
- 4) $-1 < a < 1 \Rightarrow a > a^2$

9 1) Rappeler la négation de chacune des propositions : $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow p$ et $p \Leftrightarrow q$
(Résultats de l'exercice 7).

2) Formuler la négation de chacune des propositions ci-dessous :

- a. $a \leq b \Rightarrow ac \leq bc$.
- b. $a \leq b \Leftrightarrow ac = bc$.

Trouver dans chaque cas des réels a , b et c tels que les négations soient vraies :

10 Soient A et B deux parties non vides d'un ensemble E , démontrer les équivalences logiques suivantes :

- 1) $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$
- 2) $A = B \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$

11 Soit p et q deux fonctions propositionnelles et A et B deux parties d'un ensemble E telles que $A = \{x \in E ; p(x)\}$, $B = \{x \in E ; q(x)\}$.

Définir en compréhension les ensembles suivants à l'aide de p et q :

- 1) $\overline{A} \cap B$ 2) $A \cup \overline{B}$
- 3) $(A \cup B) \cap \overline{B}$ 4) $\overline{A \cap B}$

12 Formuler à l'aide des connecteurs " $\wedge$ " et " $\vee$ " les négations des propositions suivantes :

- 1) $(p \Rightarrow q) \wedge r$.
- 2) $(p \vee q) \Rightarrow r$.
- 3) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$.

13 Démontrer les équivalences logiques suivantes :

1) $[\text{non} (p \Rightarrow q)] \Leftrightarrow [p \wedge \text{non} q]$

2) $[\text{non} (\text{non} p \vee q)] \Leftrightarrow [p \wedge \text{non} q]$

3) $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [p \Rightarrow (\text{non} q \vee r)]$

14 Pour choisir un ministre parmi trois candidats A,B et C, un roi les a soumis à une épreuve : sur la tête de chacun d'eux, on place une boule qu'il ne voit pas, mais il voit celles qui sont sur les têtes de ses concurrents. Les candidats savent que les boules sont choisies parmi cinq parmi les quelles trois sont noires et deux sont blanches. Le premier qui arrive à déterminer la couleur de sa boule sera ministre mais s'il se trompe, sa tête sera tranchée.

Le candidat A qui voit une boule noire sur la tête de chacun de deux autres et remarquant qu'aucun d'eux n'a rien dit, affirme avec sûreté : " j'ai une boule noire ". Expliquer son raisonnement. (Conte oriental)

15 Les cannibales d'une tribu se préparent à manger un missionnaire, lui proposant de décider de lui-même de son sort, en faisant une courte déclaration. Si celle-ci est vraie, il sera rôti; si elle est fausse, il sera bouilli. Par quelle déclaration le missionnaire peut-il leur imposer une troisième solution ? (D'après Cervantès*)

* *Miguel de Cervantès : écrivain espagnol 1547-1616.*

- La logique mathématique est née à la fin du XIX^e siècle de la logique au sens philosophique du terme. Ses débuts furent marqués par la rencontre entre deux idées nouvelles :
- la nécessité dûe à la complexification des mathématiques et à l'apparition de paradoxes de donner une fondation aux mathématiques ;
- la découverte par George Boole (1815 – 1864) de l'existence de structures algébriques permettant de définir un « calcul de vérité ».

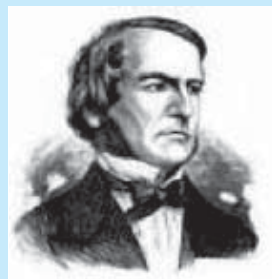
La logique mathématique a donc repris l'objectif de la logique, étudier le raisonnement, mais en se restreignant au langage des mathématiques qui présente l'avantage d'être extrêmement normalisé. C'est ce qui a rendu possible la définition de divers systèmes logiques formalisant le raisonnement en mathématique et le développement très rapide de la logique mathématique au cours du XX^e siècle. Avant de trouver son nom actuel, attribué à Giuseppe **Peano**, la logique mathématique s'est appelée **logique symbolique** (en opposition à la **logique philosophique**) et **métamathématique** (terminologie de Hilbert).

Aujourd'hui la logique mathématique s'est ramifiée en de nombreux sous domaines, dont la plupart n'ont que très peu à voir avec les objectifs initiaux des mathématiciens du XIX^e siècle, mais sont des disciplines mathématiques à part entière. On compte notamment :

- la théorie des ensembles ;
- la théorie de la démonstration ;
- la théorie des modèles ;
- la théorie de la calculabilité ...

George BOOLE : 1815 – 1864

Mathématicien britannique, créateur de la logique mathématique moderne, Boole applique à la logique les méthodes de l'algèbre binaire, qui n'admet que les deux valeurs 1 et 0 (vrai et faux).. Au-delà de sa valeur théorique, l'algèbre booléenne, qui unifie la logique et les mathématiques, jette les bases de l'électronique numérique et de l'informatique.



Askar Lotfi ZADEH :

Professeur à l'université de Berkeley en Californie, d'origine iranienne, il a formulé en 1965 « la logique floue » en introduisant la théorie des "sous-ensemble flous". La logique floue sert à pouvoir programmer un ordinateur pour qu'il contrôle une machine un peu comme le ferait un être humain. Les principaux domaines de recherche et d'application de la logique floue sont :

- Automatisation : production de fer et de l'acier, purification de l'eau...
- Instrumentation : capteurs, reconnaissance de voix...
- Ordinateurs : opérateurs, unités arithmétiques, ...
- Traitement d'information: base de données, recherche d'information, ...



PLAN DU CHAPITRE

- I. Raisonnement par récurrence
- II. Divisibilité
- III. Plus grand commun diviseur
- IV. Nombres premiers entre eux
- V. Plus petit commun multiple
- VI. Nombres premiers

Travaux pratiques

Avec l'outil informatique

Exercices et problèmes

Mathématiques et culture

I. Raisonnement par récurrence

Activités préliminaires

1. 1) Calculer :

$$1^3, 1^3 + 2^3, 1^3 + 2^3 + 3^3, 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3, 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$$

2) Que peut-on conjecturer sur la somme $S = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3$ où n est un entier naturel non nul ?

2. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{n^3 - n}{3}$

1) Vérifier que u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5 sont des entiers naturels

2) Peut-on affirmer que pour tout entier n , u_n est un entier ?

Activités de découverte

3. Soit A un ensemble d'entiers naturels vérifiant les deux conditions :

1- $1 \in A$

2- Si $n \in A$, alors $n + 2 \in A$

1) Expliquer le fait que $7 \in A$.

2) Citer d'autres éléments de l'ensemble A .

4. Soit E un ensemble d'entiers naturels vérifiant les deux conditions :

1- $0 \in E$

2- Si $n \in E$, alors $n + 1 \in E$

On se propose de montrer que $E = \mathbb{N}$.

On a évidemment $E \subset \mathbb{N}$, il suffit alors de montrer que $\mathbb{N} \subset E$, on fait alors un raisonnement par l'absurde : supposons que $\mathbb{N}$ contient au moins un élément qui n'appartient pas à E , soit alors p le plus petit entier qui n'appartient pas à E .

1) Vérifier que $p > 0$ et que $(p - 1) \in E$.

2) Trouver alors la contradiction et conclure.

5. On reprend la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{n^3 - n}{3}$ (activité n°2)

Soit E l'ensemble des entiers n tels que u_n est un entier.

1) Vérifier que $0 \in E$.

2) Soit $n \in E$. Montrer que $u_{n+1} = u_n + n^2 + n$ et déduire que $n + 1 \in E$. Conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a u_n entier (utiliser la règle obtenue dans l'activité n°4)

- $E = \mathbb{N}$ veut dire que la propriété " u_n est un entier" est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$
- Le raisonnement effectué dans l'activité n°5 s'appelle **raisonnement par récurrence**.

L'essentiel du cours

Raisonnement par récurrence :

Théorème (admis)

Soit P_n une propriété qui dépend de l'entier naturel n . Si on a :

- 1) la propriété P_k est vraie ($k \in \mathbb{N}$),
 - 2) pour tout entier naturel n tel que $n \geq k$, (P_n est vraie $\Rightarrow P_{n+1}$ est vraie)
- Alors pour tout entier naturel n tel que $n \geq k$, P_n est vraie.

Auto évaluation

- 1) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geq 1 + n$
 2) Montrer plus généralement que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1 + a)^n \geq 1 + na$ où a est un réel strictement positif.
2. On pose pour n entier naturel non nul : $S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$
 - 1) Calculer S_1 , S_2 , S_3 et S_4
 - 2) Que peut-on conjecturer sur l'expression de S_n ?
 - 3) Faire une démonstration par récurrence du résultat conjecturé.
3. 1) Soit l'entier $a_n = 10^n + 1$. On **suppose** que a_n est multiple de 9.
 - a. Vérifier que $a_{n+1} = 9.10^n + a_n$
 - b. Dédire que a_{n+1} est multiple de 9
 2) Peut-on dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n est multiple de 9 ?
4. 1) Vérifier que $\frac{2^1 - 2}{1}$, $\frac{2^3 - 2}{3}$, $\frac{2^5 - 2}{5}$ et $\frac{2^7 - 2}{7}$ sont des entiers naturels.
 2) A-t-on pour tout entier n impair, $\frac{2^n - 2}{n}$ est un entier naturel ?
 (traiter le cas où $n = 9$)

II. Divisibilité

Activités préliminaires

1. Soit $n = 571a$ où a désigne le chiffre des unités dans l'écriture décimale de n .
 - 1) Pour quelles valeurs de a l'entier n est-il divisible par 2 ?
 - 2) Pour quelles valeurs de a l'entier n est-il divisible par 4 ?
 - 3) Pour quelles valeurs de a l'entier n est-il divisible par 3 ?
2. Soit $n = 10a8b$ où a et b désignent respectivement le chiffre des centaines et le chiffre des unités dans l'écriture décimale de n .
 - 1) Déterminer les couples (a, b) tels que $a + b$ soit divisible par 3.
 - 2) Pour quelles valeurs de a et b l'entier n est-il divisible par 2, par 3 et par 5 ?
 - 3) Pour quelles valeurs de a et b l'entier n est-il divisible par 5 et par 9 ?
3. Effectuer la division euclidienne de a par b dans chacun des cas suivants :
 - 1) $a = 238$ $b = 4$
 - 2) $a = 238$ $b = 8$
 - 3) $a = 2007$ $b = 10$
 - 4) $a = 2007$ $b = 9$

Activités de découverte

4. Soit a un entier naturel non nul.
 - 1) Vérifier que 1 divise a et que a divise a .
 - 2) Soient m et n deux entiers naturels non nuls tels que $m < n$.
Prouver que a^m divise a^n
5. Soit a, b deux entiers naturels non nuls.
 - 1) Montrer que si a divise b et b divise a , alors $a = b$.
 - 2) Soit c un entier naturel. Montrer que si a divise b et b divise c , alors a divise c .
6. Soit a, b et d trois entiers naturels, tels que d soit non nul.
 - 1) Montrer que si d divise a alors d divise ab
 - 2) On suppose que d divise a et d divise b . Montrer que :
 - a. d divise $a + b$
 - b. Lorsque $a \geq b$, d divise $a - b$.

L'essentiel du cours

Divisibilité

Définition

Soit a et d deux entiers naturels, tels que d soit non nul.

On dit que a est divisible par d , s'il existe un entier naturel k tel que $a = dk$.

Vocabulaire

Si un entier a est divisible par un entier non nul d , alors on dit que d est un diviseur de a et que a est un multiple de d .

L'essentiel du cours

Propriétés

- Pour tous entiers naturels a , b et c tels que a et b soient non nuls on a :
 - 1 divise a et a divise a .
 - Si a divise b et b divise a , alors $a = b$.
 - Si a divise b et b divise c alors a divise c .
- Soient a , b et d trois entiers naturels, tels que d soit non nul.
 - Si d divise a alors d divise ab .
 - Si d divise a et d divise b alors d divise $a + b$.
 - Si d divise a et d divise b et $a \geq b$ alors d divise $a - b$.

Conséquence

Si d divise a et d ne divise pas b alors d ne divise pas $a + b$

Division euclidienne :

Soient a et b deux entiers tels que $b \neq 0$. Effectuer la division euclidienne de a par b c'est trouver l'unique couple d'entiers (q, r) tel que :

$$a = bq + r \text{ avec } 0 \leq r < b.$$

Vocabulaire

a est le dividende, b est le diviseur, q est le quotient et r est le reste.

Auto évaluation

1. Répondre par vrai ou faux, sans faire de calcul.
 - 245024 + 9172 est divisible par 4.
 - 99993393 + 203 est divisible par 3.
 - 32568115 - 30290 est divisible par 5.
2.
 - 1) Montrer que si un entier naturel n est pair alors n^2 est pair.
 - 2) Montrer que si un entier naturel n est impair alors n^2 est impair.
 - 3) Montrer que pour tout entier naturel n , l'entier $n(n^2 + 3)$ est pair
3.
 - 1) Montrer que pour tout entier n , $n(n + 1)$ est pair.
 - 2) En utilisant le raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel $n \geq 0$, 6 divise $5n^3 + n$.
4.
 - 1) Déterminer l'ensemble des entiers naturels n , tels que n divise $n + 8$.
 - 2) Déterminer l'ensemble des entiers naturels n , tels que n divise $12 - 3n$

5. On considère les divisions euclidiennes respectives de a et a' par b :

$$a = bq + r \text{ avec } 0 \leq r < b \text{ et } a' = bq' + r' \text{ avec } 0 \leq r' < b$$

1) Montrer que le reste de la division euclidienne de $a + a'$ par b est égal au reste de la division euclidienne de $r + r'$ par b .

2) Montrer que le reste de la division euclidienne de a^2 par b est égal au reste de la division euclidienne de r^2 par b .

3) Dédire les restes possibles de la division euclidienne de n^2 par 5, où n est un entier naturel.

III. Plus grand commun diviseur

Activités préliminaires

1. 1) Déterminer les diviseurs de 135.

2) Trouver les diviseurs communs à 135 et 3465 (on ne demande pas de trouver les diviseurs de 3465)

3) Dédire PGCD (135, 3465) (plus grand commun diviseur à 135 et 3465).

4) Vérifier que l'ensemble des diviseurs communs à 135 et 3465 est égal à l'ensemble des diviseurs de leur PGCD.

► PGCD (a, b) est aussi noté $a \wedge b$.

2. 1) Soit a et b deux entiers naturels non nuls. Justifier les résultats :

a. $a \wedge a = a, \quad a \wedge 1 = 1$

b. $a \wedge b = b \wedge a$

c. Si a divise b alors $a \wedge b = a$.

2) Application :

trouver : $218 \wedge 218, 2105 \wedge 1, 48 \wedge 12; 2007 \wedge 6021; 10^5 \wedge 100^2$

Activités de découverte

3. Soient a et b deux entiers naturels non nuls tels que $a = bq + r, 0 \leq r < q$.

1) Quel est le plus grand commun diviseur de a et b lorsque r est nul ?

2) Dans cette question, on suppose que r est non nul. Soit d un entier.

Montrer que d est un diviseur commun à a et b si et seulement si d est un diviseur commun à b et r . En déduire que $a \wedge b = b \wedge r$.

4. Le but l'activité est de trouver $1128 \wedge 508$.

• Etape 1: Faire la division euclidienne de 1128 par 508 et déterminer le reste r_1 .

Dédire de l'activité précédente que $1128 \wedge 508 = 508 \wedge r_1$.

• Etape 2: Faire la division euclidienne de 508 par r_1 et déterminer le reste r_2 .

Justifier que $r_2 < r_1$ et que $508 \wedge r_1 = r_1 \wedge r_2$.

• Continuer le procédé jusqu'à obtenir un reste nul en complétant le tableau ci-contre :

Vérifier alors que $1128 \wedge 508 = 4$.

1128	508	$r_1 = 112$
508	112	$r_2 = 60$
112	60	$r_3 =$
60		$r_4 =$
		$r_5 =$
		$r_6 = 0$

► Le procédé utilisé dans l'activité précédente s'appelle **algorithme d'Euclide**.

Il peut être décrit de la manière suivante :

Soit $a = bq_1 + r_1$ la division euclidienne de a par b

puis $b = r_1q_2 + r_2$ la division euclidienne de b par r_1

puis $r_1 = r_2q_3 + r_3$ la division euclidienne de r_1 par r_2 ...

On a : $b > r_1 > r_2 > r_3 > \dots \geq 0$, on admet alors qu'il existe un entier n tel que r_n soit égal à 0.

D'où : $a \wedge b = b \wedge r_1 = r_1 \wedge r_2 = r_2 \wedge r_3 = \dots = r_{n-2} \wedge r_{n-1} = r_{n-1}$

Si b ne divise pas a , le plus grand commun diviseur de a et b est le dernier reste non nul r_{n-1}

5. 1) En utilisant l'algorithme d'Euclide, calculer $d = 252 \wedge 180$

2) Vérifier que $2520 \wedge 1800 = 10 \times (252 \wedge 180)$

3) Soit k un entier non nul : utiliser le tableau de 1) pour montrer que :

$$252.k \wedge 180.k = k.(252 \wedge 180)$$

L'essentiel du cours

Plus grand commun diviseur

Définition

Soient a et b deux entiers naturels non nuls. Le plus grand commun diviseur de a et b est l'entier d , noté $a \wedge b$, tel que :

- d divise a et b ,
- tout diviseur de a et b est inférieur ou égal à d .

Calcul de $a \wedge b$

Le plus grand commun diviseur de deux entiers naturels est le dernier reste non nul de la suite des divisions euclidiennes dans **l'algorithme d'Euclide**

Propriétés

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

- Si a divise b alors $a \wedge b = a$.
- Un entier naturel d est un diviseur commun de a et b équivaut à d divise $a \wedge b$.
- Pour tout entier naturel k , $ka \wedge kb = k(a \wedge b)$

Auto évaluation

1. Calculer $a \wedge b$ dans chacun des cas suivants.

- 1) $a = 150$; $b = 25$.
- 2) $a = 2007$; $b = 8028$
- 3) $a = 144$; $b = 12$
- 4) $a = 50273$; $b = 3$
- 5) $a = 11$; $b = 111$

2. Calculer sans utiliser l'algorithme d'Euclide.

- 1) $48000 \wedge 7200$.
- 2) $666 \wedge 999$
- 3) $(8n) \wedge (12n)$, où n est un entier naturel non nul.

3. 1) Déterminer l'ensemble des diviseurs communs des entiers 145 et 70.
2) Déterminer l'ensemble des diviseurs communs des entiers 8316 et 630.

IV. Entiers premiers entre eux, lemme de GAUSS

Activités de découverte

1. Déterminer $a \wedge b$ dans chacun des cas ci-dessous

- 1) $a = 170$ et $b = 33$;
2) $a = 1100$ et $b = 147$.

► Si $a \wedge b = 1$, alors on dit que a et b sont **premiers entre eux**.

- 2.1) Compléter le tableau ci-contre par $n \wedge m$.

2) En déduire tous les couples d'entiers non nuls et inférieurs à 10, premiers entre eux.

n \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1							
2	1	2	1						
3									
4						2			
5									
6									3
7									
8									
9				1					

3. Soient a et b deux entiers naturels.

Montrer que si d est le plus grand commun diviseur de a et b , alors il existe un couple d'entiers naturels (a', b') tel que $a = da'$ et $b = db'$ et $a' \wedge b' = 1$.

4. Mettre les fractions suivantes sous forme irréductible :

a. $\frac{25600}{880}$

b. $\frac{11011}{999999}$

5. On se propose de résoudre le système $S: \begin{cases} a + b = 120 \\ a \wedge b = 15 \end{cases}$ où a et b sont deux entiers naturels.

- 1) En posant $a = da'$ et $b = db'$ où $d = a \wedge b$, montrer que les solutions du système S se déduisent à partir de celles du système $S': \begin{cases} a' + b' = 8 \\ a' \wedge b' = 1 \end{cases}$

- 2) Déterminer l'ensemble de tous les couples (a', b') d'entiers naturels, solutions du système S' .

- 3) En déduire l'ensemble de tous les couples (a, b) d'entiers naturels, solutions système S .

6. Soient a et b deux entiers naturels, premiers entre eux et c un entier non nul.

- 1) Justifier que c est le plus grand commun diviseur de ac et bc .
- 2) Montrer que si a divise bc alors a divise c .

L'essentiel du cours

Entiers premiers entre eux

Définition

Deux entiers naturels non nuls a et b sont dits premiers entre eux, si leur plus grand commun diviseur est égal à 1.

Théorème

Soient a et b deux entiers naturels et $d = a \wedge b$ leur plus grand commun diviseur. Alors les entiers a' et b' tels que $a = da'$ et $b = db'$, sont premiers entre eux.

Lemme de Gauss

Soient a , b et c trois entiers naturels non nuls.

Si (a est premier avec b et a divise bc) alors (a divise c).

Auto évaluation

1. 1) Montrer que 144 et 385 sont premiers entre eux.
- 2) Déterminer $144000 \wedge 385000$.

2. 1) Soient a et b deux entiers naturels tels que $a = b+1$. Montrer que $a \wedge b = 1$.
- 2) Déterminer $2n^2 \wedge n(2n+1)$ où n est un entier naturel non nul.

3. Déterminer l'ensemble de tous les couples (a, b) d'entiers naturels solutions du système

$$S: \begin{cases} a + b = 208 \\ a \wedge b = 13 \end{cases}$$

4. Soient a et b deux entiers naturels.

- 1) Montrer que si 5 divise $3a$ alors 5 divise a .
- 2) Montrer que si 4 divise ab et si a est impair alors 4 divise b .

5. 1) Déterminer tous les entiers a et b tels que $4a = 3b$
- 2) Dédire les entiers a et b tels que $4a = 3b$ et $a \wedge b = 18$

6. 1) Montrer qu'un entier est divisible par 6 si et seulement si il est divisible par 2 et par 3.
- 2) Enoncer la règle de divisibilité par 15.

V. Plus petit commun multiple

Activités préliminaires

- 1) Citer dans un ordre croissant les quatre premiers multiples de chacun des entiers 24 et 32 et déduire PPCM(24, 32) (plus petit commun multiple de 24 et 32)
2) Calculer PPCM(15, 8)

► PPCM(a, b) est aussi noté $a \vee b$

2. 1) Soient a et b deux entiers naturels non nuls. Justifier les résultats :

a. $a \vee a = a, a \vee 1 = a$

b. $a \vee b = b \vee a$

c. Si a divise b alors $a \vee b = b$.

2) Application :

trouver : $223 \vee 223, 1 \vee 101, 582 \vee 5820; 5^6 \vee 25^2$

3. 1) Calculer $m = 12 \vee 8$

2) Vérifier, en citant quelques éléments que l'ensemble des multiples communs de 12 et 8 est égal à l'ensemble des multiples de m.

3) Vérifier que $(5 \times 12) \vee (5 \times 8) = 5 \times (12 \vee 8)$

Activités de découverte

- 4.1) Soient a et b deux entiers naturels non nuls. On pose $d = a \wedge b$.

Soient a' et b' tels que $a = da'$ et $b = db'$.

a. Montrer que $(a \wedge b) \times (a \vee b) = d^2 a' b'$.

b. Déduire que $(a \wedge b) \times (a \vee b) = ab$.

2) En déduire que si a et b sont premiers entre eux alors $a \vee b = ab$.

3) Déterminer $138 \wedge 230$ et en déduire $138 \vee 230$.

5. 1) Soient a, b et k trois entiers non nuls. Utiliser le résultat $(a \wedge b) \times (a \vee b) = ab$ et $(ka) \wedge (kb) = k(a \wedge b)$ pour montrer que $(ka) \vee (kb) = k(a \vee b)$

2) Calculer $5000 \vee 7000$

6. Résoudre le système suivant, sachant que a et b sont des entiers naturels.

$$S: \begin{cases} a \vee b = 42 \\ a b = 294 \end{cases}$$

L'essentiel du cours

Plus petit commun multiple

Définition

Soient a et b deux entiers naturels non nuls. Le plus petit commun multiple de a et b est l'entier m noté $a \vee b$ tel que

- m est un multiple commun de a et b ,
- tout multiple de a et b est supérieur ou égal à m .

Propriétés

Soient a et b deux entiers naturels.

- Si a divise b alors $a \vee b = b$
- Un entier naturel k est un multiple commun de a et b si et seulement si k est un multiple de $a \vee b$.
- Pour tout entier naturel k , $(ka) \vee (kb) = k(a \vee b)$

Calcul de $a \vee b$

Pour déterminer $a \vee b$ on calcule $a \wedge b$ et on utilise l'égalité :

$$(a \wedge b) \times (a \vee b) = ab$$

Auto évaluation

1. Calculer $a \vee b$ dans chacun des cas suivants :

- 1) $a = 16$; $b = 84$.
- 2) $a = 111$; $b = 33300$
- 3) $a = 50724$; $b = 36$
- 4) $a = 2n^2 + 4n$; $b = n + 2$ ($n \in \mathbb{N}$).

2. Calculer $a \vee b$ dans chacun des cas suivants :

- 1) $a = 2008$; $b = 3012$.
- 2) $a = 666$; $b = 999$
- 3) $a = 18n - 18$; $b = 12n - 12$ (n est un entier naturel non nul)

3. Déterminer le plus petit entier naturel non nul n tel que :

- le reste de la division euclidienne de n par 42 vaut 18, et
- le reste de la division euclidienne de n par 105 vaut 18.

4. Un phare émet deux feux différents entre minuit et six heures du matin : un feu rouge toutes les 25 secondes et un feu jaune toutes les 2 minutes. Ces deux feux sont émis simultanément à minuit.

A quelles heures y aura-t-il simultanément un feu rouge et un feu jaune de minuit à 1 heure ?

5. Résoudre le système suivant, sachant que a et b sont des entiers naturels :

$$S: \begin{cases} a \vee b = 36 \\ a + b = 21 \\ a \leq b \end{cases}$$

VI. Nombres premiers

Activités préliminaires

1. 1) Déterminer les nombres premiers parmi les entiers naturels suivants :

23 ; 9 ; 32 ; 97 ; 111 ; 5871 ; 1 ; 2007

2) Donner la liste des nombres premiers inférieurs à 50.

► Un entier naturel, strictement supérieur à 1, non premier est appelé entier composé.

2. Chacune des propositions suivantes est incorrecte, donner une justification à l'aide d'un contre exemple :

1) Tout nombre impair est premier.

2) Tout nombre premier est impair.

3) Si n est premier alors n + 1 est premier.

4) La somme de deux nombres premiers est un nombre premier.

5) La somme de deux nombres premiers est un nombre composé.

3. 1) Soit n un entier naturel. Factoriser $n^2 + 2n$ et déterminer n pour que $n^2 + 2n$ soit premier.

2) Montrer que pour tout entier naturel n, $n^2 + 2n + 1$ n'est pas premier.

Activités de découverte

4. (Reconnaître si un entier donné est un nombre premier)

Soit n un entier naturel composé ($n > 1$). On désigne par p le plus petit diviseur de n, distinct de 1.

1) On pose $n = k.p$ avec $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $p \leq k$

2) Dédurre que $p^2 \leq n$.

3) Montrer par l'absurde que p est premier.

► Pour examiner si un nombre est premier, il suffit de vérifier qu'il n'est divisible par aucun entier premier inférieur à sa racine carrée.

Exemple 1 : Cherchons si l'entier 247 est premier :

r est le reste de la division euclidienne de 247 par p

On a $r = 0$ pour $p = 13$.

247 est un nombre composé

p	2	3	5	7	11	13
r	1	1	2	2	5	0

Exemple 2 : Cherchons si l'entier 151 est premier ?

r est le reste de la division euclidienne de 151 par p

• $r \neq 0$ pour $p = 2, 3, 5, 7, 11$

• le nombre premier qui suit 11 est 13 et on a $13 > \sqrt{151}$ ($\approx 12,2 \dots$)

151 est alors un nombre premier.

p	2	3	5	7	11
r	1	1	1	4	8

5. (Trouver tous les nombres premiers inférieurs à un entier donné)

La méthode utilisée est appelé méthode du

crible d'Eratosthène :

On se propose par exemple de trouver les nombres premiers inférieurs à 55.

On présente dans un tableau la liste des entiers supérieurs ou égaux à 2 et inférieurs à 55.

2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35	36	37
38	39	40	41	42	43	44	45	46
47	48	49	50	51	52	53	54	55

- 1) a. Encercler 2, puis barrer tous les multiples de 2 distincts de 2.
b. Quel est le plus entier naturel strictement supérieur à 2, non barré. Pourquoi est-il premier ?
c. Encercler cet entier et barrer tous ses multiples.
- 2) Expliquer pourquoi il suffit de barrer les multiples de 2, 3, 5 et 7. Donner la liste des nombres premiers inférieurs à 55.

6. (L'ensemble des nombres premiers est infini)

Le but de l'activité est de montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Supposons que la liste des nombres premiers est finie, c'est à dire qu'il existe seulement $p_1, p_2, \dots, p_k$ nombres premiers avec $p_1 < p_2 < \dots < p_k$.

Soit $n = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_k + 1$.

- 1) Montrer par l'absurde que n n'est divisible par aucun des nombres premiers, $p_1, p_2, \dots, p_k$. Dédurre que n est premier (utiliser le résultat de l'activité 4)
- 2) Conclure

7. 1) Décomposer chacun des entiers 2625 et 4950 en produit de facteurs premiers
2) Utiliser la décomposition précédente pour déterminer $2625 \wedge 4950$ et $2625 \vee 4950$.
8. 1) Soient a et b deux entiers naturels et p un nombre premier qui divise le produit ab .
Montrer que si p ne divise pas a alors p divise b .
2) Déterminer tous les entiers naturels a et b tels que $3a = 128b$

L'essentiel du cours

Nombres premiers

Définition

- Un entier naturel p supérieur ou égal à 2 est dit premier, si ses seuls diviseurs sont 1 et lui-même.
- L'entier 1 n'est pas premier.
- Un entier naturel n strictement supérieur à 1 et non premier est dit composé.

Théorème 1

Tout entier naturel composé n admet un diviseur premier p tel que $p^2 \leq n$.

Conséquence

Un entier naturel $n > 1$ est composé si, et seulement si, il admet un diviseur premier inférieur ou égal à sa racine carrée.

Théorème 2 (Théorème d'Euclide)

L'ensemble des nombres premiers est infini.

Théorème 3 (admis)

Tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, se décompose en un produit fini de nombres premiers. Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

Théorème 4

Soient a et b deux entiers naturels. Si un nombre premier p divise le produit ab , alors p divise a ou p divise b .

Auto évaluation

1. QCM

Cocher la réponse exacte.

1) Un seul parmi ces nombres est un nombre premier, lequel ?

- ☐ 1700 ☐ 1091 ☐ 1953

2) La décomposition en facteurs premiers du nombre $24 \times 36 \times 42$ est :

- ☐ $2 \times 3 \times 7$ ☐ $2^6 \times 3^4 \times 7 \times 11$ ☐ $2^6 \times 3^4 \times 7$

3) Un seul parmi ces nombres est divisible par 60, lequel ?

- ☐ $2 \times 3^2 \times 5 \times 11$ ☐ $2 \times 3^4 \times 13$ ☐ $2^5 \times 3^2 \times 5^4$

2. Montrer que 1907 est un nombre premier.

3. Déterminer tous les entiers naturels a et b tels que $31a - 31 = 13b - 13$

TP1

- 1) Soient a et b deux entiers naturels. Montrer que si un entier d divise a et divise b alors pour tous entiers naturels α et β , d divise $\alpha a + \beta b$ et divise $\alpha a - \beta b$ (pour $\alpha a \geq \beta b$)
- 2) Soit n un entier naturel. On pose $a = 5n + 7$ et $b = 3n + 4$.
Calculer $3a - 5b$ et en déduire que les entiers a et b sont premiers entre eux.
- 3) Montrer que pour tout entier naturel n , les entiers $9n + 5$ et $7n + 4$ sont premiers entre eux.
- 4) Montrer que pour tout entier naturel n , les entiers $9n + 5$ et $3n + 2$ sont premiers entre eux.

TP2

Nombres de Fermat

Les nombres de Fermat sont définis par $F_n = 2^{(2^n)} + 1$, $n \in \mathbb{N}$

- 1) a. Compléter tableau ci-dessous.

n	0	1	2	3	4
F_n	3				

- b. Prouver que pour tout entier naturel n , F_n est impair.
 - c. Vérifier que pour $n \leq 3$, F_n est un nombre premier
 - 2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+1} = F_n^2 - 2F_n + 2$
 - 3) En déduire, en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F_{n+1} = F_0 F_1 \dots F_n + 2$$
 - 4) En déduire que si n et m sont distincts alors F_n et F_m sont premiers entre eux.
- • On prouve aussi que F_4 est premier
- Fermat pensait que tous les F_n étaient premiers, mais Euler a trouvé la décomposition de F_5 :
- $$F_5 = 4\,294\,967\,297 = 641 \times 6\,700\,417.$$

TP3

Cryptage

Soient a et b deux entiers naturels donnés. Le cryptage affine consiste à chiffrer chaque lettre de l'alphabet par un nombre x (de 0 jusqu'à 25), puis à associer au rang x le reste y de la division euclidienne de $ax+b$ par 26.

Ainsi crypter un mot revient à remplacer chaque lettre de rang x , par la lettre de rang y associé à x et décrypter un mot revient à remplacer chaque lettre de rang y , par la lettre de rang x tel que x est associé à y .

1) On choisit $a = 3$ et $b = 5$.

a. Compléter le tableau suivant :

En clair	A	B	C	...	Z
Rang x	0	1	2		25
Rang y	5	8	11		2
En crypté	F	I	L		C

b. Crypter les mots VIE, MATHEMATIQUES.

c. Décrypter les mots PRE, KNSDHDR.

d. Montrer que si deux entiers x et x' vérifient les conditions suivantes

- $0 \leq x \leq 25$ et $0 \leq x' \leq 25$,
- les entiers $3x + 5$ et $3x' + 5$ ont le même reste dans la division euclidienne par 26, alors $x = x'$.

e. En déduire que deux lettres distinctes sont cryptées par deux lettres distinctes.

3) On choisit $a = 2$ et $b = 5$.

Donner un exemple de lettres distinctes qui ont le même cryptage.

4) On se propose de montrer que deux lettres distinctes sont cryptées par deux lettres distinctes si et seulement si a et 26 sont premiers entres eux.

a. On suppose que a et 26 sont premiers entres eux.

Montrer que si deux entiers x et x' vérifient les conditions suivantes

- $0 < x < 25$ et $0 < x' < 25$,
- les entiers $ax + b$ et $ax' + b$ ont le même reste dans la division euclidienne par 26, alors $x = x'$.

b. On suppose que a et 26 ne sont pas premiers entres eux et on note $d = a \wedge 26$ et k l'entier tel que $26 = dk$.

Montrer que les entiers b et $ak + b$ ont le même reste dans la division euclidienne par 26.

En déduire que si φ désigne la lettre de l'alphabet de rang k alors A et φ sont cryptées par la même lettre.

c. Conclure.

1

Programme en Turbo Pascal permettant le calcul du PGCD de deux entiers :

```

Program PGCD;
uses wincrt;
var a,b,r:integer;
begin
repeat
writeln('Entrez a, a = ');
readln(a);
writeln('Entrez b, b = ');
readln(b);
until (a>b) and (b>0);
r:= a MOD b;
Repeat;
if r<>0 then
begin
a:=b;
b:=r;
r:= a mod b;
end;
until r= 0;
Writeln ('PGCD(a,b)= ',b);
end

```

- 1) Sur quel résultat mathématique ce programme est-il basé ?
- 2) Tester ce programme sur des exemples.
- 3) Compléter ce programme pour qu'il calcule et affiche aussi PPCM(a , b)

2

Autre méthode de calcul du PGCD :

En utilisant le résultat : pour a et b entiers naturels tels que $a > b$:

$a \wedge b = b \wedge (a - b)$, (voir exercice n° 14) élaborer un programme permettant le calcul du PGCD de deux naturels non nuls a et b.

3

Polynôme d'Euler :

On pose $P_n = n^2 + n + 41$ où $n \in \mathbb{N}$.

- 1) Utiliser le tableur EXCEL pour calculer les valeurs de P_n pour $n \leq 42$
- 2) Vérifier en utilisant un programme (ou un logiciel) approprié que P_n est un nombre premier pour tout entier n tel que $n < 40$, et pour $n = 42$ mais que P_{40} et P_{41} sont des nombres composés. (Vérifier d'ailleurs que $P_{40} = 41^2$)

1

Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$, la somme $S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$ (somme des n premiers entiers impairs) . Montrer par récurrence que $S_n = n^2$.

2

Soit $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ ($n \in \mathbb{N}^*$) .
Démontrer par récurrence que $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3

Soient $S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$ et $T_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

1) On sait que $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$, montrer cette formule à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

2) Vérifier que $T_1 = S_1^2$, $T_2 = S_2^2$, $T_3 = S_3^2$

3) Trouver alors en faisant un raisonnement par récurrence une expression simple de T_n .

4) Calculer n tel que $T_n = 3025$

4

Soit la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_0 = 7$ et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{3}{2} (u_n - 2)$$

1) Calculer u_1 , u_2 et u_3 .

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 6$

5

Soit la suite (x_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $x_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , $x_{n+1} = 2x_n - 3$

1) Calculer x_1 , x_2 et x_3 .

2) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = 3 - 2^n$.

6

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $4^n + 2$ est divisible par 3 (Remarquer que $4^{n+1} + 2 = 4(4^n + 2) - 6$).

7

Dans la division de 82368941 par 253687, la calculatrice donne 324.687276...

1) Quel est le quotient entier de la division de 82368941 par 253687 ?

2) Trouver, alors , à l'aide d'une calculatrice le reste de la division euclidienne de 82368941 par 253687.

3) Ecrire la division euclidienne de 9783421 par 17365.

8

1) Soit n un entier naturel.

Montrer par récurrence sur n , que le reste de la division euclidienne de 10^n par 9 est égal à 1.

2) En déduire le reste de la division euclidienne de 10^n par 3.

9

- 1) Déterminer à l'aide d'un arbre de choix, l'ensemble des diviseurs de 36.
- 2) En déduire tous les couples (m, n) d'entiers naturels tels que $mn = 36$.
- 3) Déterminer tous les couples (a, b) d'entiers naturels tels que $(a-3)(b+5) = 36$.
- 4) Déterminer tous les couples (m, n) d'entiers naturels tels que $mn = 180$.

10

- 1) Déterminer l'ensemble des entiers naturels n , tels que n divise $2n^2 + 55$.
- 2) Déterminer l'ensemble des entiers naturels n , tels que $2n$ divise $2n^2 + 16$.
- 3) En remarquant que $n + 17 = (n - 1) + 18$, déterminer les entiers naturels n tels que $n - 1$ divise $n + 17$.

11

- 1) Vérifier que pour tout entier naturel $n > 6$, $\frac{n+7}{n-6} = 1 + \frac{13}{n-6}$.
- 2) En déduire l'ensemble des entiers naturels $n > 6$, tels que $\frac{n+7}{n-6}$ est un entier naturel.

12

- 1) a. Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide $11088 \wedge 3780$
 b. Déduire l'écriture de la fraction $\frac{11088}{3780}$ sous forme irréductible.
- 2) Mettre la fraction $\frac{24255}{101871}$ sous forme irréductible.

13

Quel âge as-tu ? Demande Mortadha à Mokhtar

Mokhtar répond :

" L'an prochain mon âge sera divisible par 2.

Dans deux ans mon âge sera divisible par 3.

Dans trois ans mon âge sera divisible par 4.

Dans quatre ans mon âge sera divisible par 5. "

- 1) Montrer que l'âge de Mokhtar l'année dernière était un multiple de 60.
- 2) Déterminer alors l'âge de Mokhtar sachant qu'il est né au 20^{ème} siècle.

- 14** 1) Soit a et b deux entiers naturels tels que $a > b$.
 a. Montrer que si d est un entier naturel, alors, d est un diviseur commun à a et b si et seulement si d est un diviseur commun à b et $a - b$.
 b. Dédurre que $a \wedge b = b \wedge (a - b)$.
 2) Utiliser le résultat précédent pour calculer (rapidement) :
 $36 \wedge 20$; $78 \wedge 42$; $315 \wedge 270$; $2205 \wedge 1260$
 (se rappeler que si x et y sont deux entiers vérifiant y divise x , alors $x \wedge y = y$)

- 15** En appliquant l'algorithme d'Euclide à un couple d'entiers (a, b) , on a obtenu la suite des quotients successifs suivants : 14, 7 et 121.
 Déterminer a et b sachant que leur PGCD est 123.
("Introduction à l'arithmétique" – Mahdi ABDELJAOUAD)

- 16** 1) Déterminer tous les entiers naturels a et b tels que $3(a - 2) = 2(b - 3)$.
 2) Déterminer tous les entiers naturels a et b tels que $5a = 3(b + 10)$.
 3) Déterminer tous les entiers naturels a et b tels que $22(a - 1) = 26(b - 3)$.

- 17** 1) Montrer que $a(a + 1)(a + 2)$ est divisible par 6.
 2) Montrer que $a(7a + 1)(2a + 1)$ est divisible par 6.

- 18** Résoudre chacun des systèmes suivants, sachant que a et b sont des entiers naturels :

$$S: \begin{cases} a \wedge b = 14 \\ a.b = 13720 \end{cases} ; \quad S': \begin{cases} a \wedge b = 63 \\ a \vee b = 2646 \end{cases} ; \quad S'': \begin{cases} a \vee b = 60 \\ a + b = 27 \\ a \geq b \end{cases}$$

- 19** 1) Expliquer pourquoi tout entier peut s'écrire sous la forme $6k$, $6k + 1$, $6k + 2$, $6k + 3$, $6k + 4$, $6k + 5$ avec $k \in \mathbb{N}$.
 2) Montrer que tous les nombres premiers sauf 2 et 3, sont de la forme $6k + 1$ ou de la forme $6k + 5$, avec $k \in \mathbb{N}$.
 3) Donner des exemples de nombres premiers de la forme $6k + 1$ ou de la forme $6k + 5$ avec $k \in \mathbb{N}$.
 4) Donner des exemples de nombres composés de la forme $6k + 1$ ou de la forme $6k + 5$ avec $k \in \mathbb{N}$.

- 20** 1) Utiliser le crible d’Eratosthène pour déterminer les nombres premiers inférieurs à 100.
2) Deux nombres premiers a et b sont dits jumeaux si $b = a + 2$. Déduire de 1) les nombres premiers jumeaux inférieurs à 100.
3) Calculer les valeurs de $6k + 1$ et $6k + 5$ pour $k \in \{16, 17, 18, \dots, 33\}$ (voir exercice n° 19) et en déduire qu’il existe deux couples de nombres premiers jumeaux compris entre 100 et 200. (pour les calculs on pourra utiliser une calculatrice ou le tableur Excel)
(Les mathématiciens s'interrogent aujourd'hui sur la quantité de ces couples. En existe-t-il une infinité ?)

- 21** 1) Soit n un entier naturel et $p = n^2 - 4n$ ($n \geq 4$). Calculer n pour que p soit un nombre premier.
2) Montrer que pour tout entier naturel n , $p + 4$ n'est pas premier.

- 22** Soit $a = 1848$, $b = 6300$
1) Décomposer a puis b en produits de facteurs premiers.
2) Déduire $a \wedge b$ et $a \vee b$
3) Vérifier le résultat $(a \wedge b) \times (a \vee b) = ab$

- 23** 1) a. Donner la décomposition en facteurs premiers de chacun des nombres suivants
9801 ; 57600 ; 105625.
b. En déduire que chacun de ces nombres est un carré parfait (c'est-à-dire sa racine carrée est un entier)
2) a. Justifier que le nombre 151875 n’est pas un carré parfait.
b. Quel est le plus petit entier naturel par lequel il faut multiplier 151875 pour obtenir un carré parfait ?

- 24** Soit un nombre premier p et deux entiers naturels a et b .
1) Montrer que si p divise b^2 alors p divise b .
2) Montrer que si p est un diviseur commun de a et de b^2 alors p divise $a \wedge b$.
3) En déduire que si a et b sont premiers entre eux alors a et b^2 sont premiers entre eux

- 25** Soient a et b deux entiers naturels.
1) Montrer que si a et b sont premiers entre eux alors il en est de même pour (ab) et $(a + b)$.
2) Montrer que: $\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(a + b, \text{PPCM}(a, b))$.
3) Trouver deux entiers naturels dont la somme est 168 et le PPCM est 640.

■ Cryptographie à clé publique :

Dans les dernières années, la cryptographie a connu une véritable révolution, en particulier avec le système **R.S.A.** (initiales de ses trois inventeurs : RIVEST, SHAMIR, ADLEMAN)



Le principe du système RSA, souvent utilisé pour sécuriser les échanges de données consiste à choisir deux nombres premiers distincts p et q , et considérer l'entier $n = pq$, on peut vérifier que si p et q sont très grands il est difficile de les retrouver à partir de n (dans la réalité n comprend plus de 200 chiffres).

On construit alors deux entiers e et d tels que les produits ed et $(p-1)(q-1)$ soient premiers entre eux.

Le couple (n, e) est appelé la clé publique du codage car elle est connue de tous et répertoriée dans des annuaires ce qui n'est pas le cas de d, p et q .

L'entier d est appelé la clé privée du codage car elle n'est connue que de la personne qui reçoit le message codé.

Si P est un entier strictement inférieur à n , alors

- le codage de P consiste à déterminer le reste C de la division euclidienne de P^e par n ,
- le décodage de C consiste à déterminer le reste de la division euclidienne de C^d par n qui est égal à P .

- ### ■ Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) Mathématicien, astronome et physicien allemand,
- GAUSS est considéré comme un des plus grands mathématiciens de tous les temps il a apporté, en effet de très importantes contributions : Théorie des nombres, géométrie non euclidienne hyperbolique, mécanique céleste, géodésie, magnétisme, électromagnétisme, optique...
- Gauss fut un enfant prodige, il apprit seul à lire et à compter à l'âge de trois ans et à l'école, il impressionna très tôt ses professeurs, et il y a d'ailleurs une célèbre anecdote ; un professeur essayait d'occuper ses élèves en leur faisant faire des additions, il leur proposa de calculer la somme de tous les nombres de 1 à 100. Peu de temps après, le jeune Gauss fournit la réponse correcte, ayant astucieusement additionné les nombres extrêmes par paires, remarquant que les sommes intermédiaires donnaient toujours le même résultat :



$1 + 100 = 101$, $2 + 99 = 101$, $3 + 98 = 101$, ... $50 + 51 = 101$ (50 égalités) La somme demandée est alors $50 \times 101 = 5050$

PLAN DU CHAPITRE

- I. Système de numération de base a
 - II. Conversion d'une base à une autre
 - III. Addition et multiplication d'entiers écrits dans le même système de numération
- Travaux pratiques
- Avec l'outil informatique
- Exercices et problèmes
- Mathématiques et culture

I. Système de numération

Activités de découverte

1. Développement d'un entier naturel suivant les puissances d'un entier a :

1) Soit l'entier $x = 1439$, vérifier que $x = 1 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 3 \times 10 + 9$

2) De façon analogue, on se propose d'écrire x sous la forme $x = a_3 8^3 + a_2 8^2 + a_1 8 + a_0$ avec a_0, a_1, a_2 , et a_3 sont des entiers compris entre 0 et 7 pour cela :

effectuer les divisions euclidiennes successives :

$$x = 8 q_0 + r_0 \text{ avec } 0 \leq r_0 < 8$$

$$q_0 = 8 q_1 + r_1 \text{ avec } 0 \leq r_1 < 8$$

$$q_1 = 8 q_2 + r_2 \text{ avec } 0 \leq r_2 < 8$$

3) Remarquer que $q_2 < 8$ et vérifier alors l'écriture de x sous la forme

$$x = 2 \times 8^3 + 6 \times 8^2 + 3 \times 8 + 7$$

► • L'expression $x = 2 \times 8^3 + 6 \times 8^2 + 3 \times 8 + 7$ s'appelle développement de l'entier x suivant les puissances de 8.

• De façon analogue à l'écriture décimale de $x = 1439$ on peut représenter x sous la forme

$$x = \overline{2637}^{\text{huit}} \text{ et on l'appelle écriture de l'entier } x \text{ en base huit.}$$

2. Ecrire dans chaque cas le développement de l'entier x suivant les puissances de 10 :

1) $x = 91580$

2) $x = 60000$

3) $x = 2007$

4) $x = 2007^2$

3. Soit l'entier $x = 231$

1) Trouver les entiers a, b et c strictement inférieurs à 8 tels que $x = a \times 8^2 + b \times 8 + c$.

2) Ecrire les développements respectifs de $8, 8^2, a, b$ et c suivant les puissances de 2.

3) Dédire le développement de x suivant les puissances de 2.

4) Représenter l'entier x en base huit puis en base deux.

4. 1) Effectuer la division euclidienne de 35 par 16.

2) Dédire le développement de 35^2 suivant les puissances de 16.

L'essentiel du cours

Développement d'un entier suivant les puissances d'un entier a :

Soit a un entier naturel supérieur ou égal à 2, on admet que pour tout entier naturel non nul x , il existe un unique entier naturel n et des uniques entiers naturels $x_0, x_1, \dots, x_n$ tels que l'on ait :

$$x = x_n a^n + x_{n-1} a^{n-1} + \dots + x_1 a + x_0$$

avec $0 \leq x_i < a$ pour tout $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ et $x_n \neq 0$

L'expression $x_n a^n + x_{n-1} a^{n-1} + \dots + x_1 a + x_0$ s'appelle développement de l'entier x suivant les puissances de a .

Système de numération :

Soit $x = x_n a^n + x_{n-1} a^{n-1} + \dots + x_1 a + x_0$ le développement de l'entier x suivant les puissances de a . Si l'on prend comme chiffres les a entiers naturels $0, 1, \dots, a-1$, alors on convient de représenter x par l'écriture $\overline{x_n x_{n-1} \dots x_1 x_0}_a$. Cette expression s'appelle écriture de x dans le système de numération de base a . (on peut noter x par $\overline{x_n x_{n-1} \dots x_1 x_0}$ ou tout simplement $x_n x_{n-1} \dots x_1 x_0$ si aucune confusion n'est à craindre)

- Pour **$a = \text{dix}$** on obtient le système utilisé couramment qu'on appelle système décimal, les chiffres utilisés sont : **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9**
- Pour **$a = \text{deux}$** on obtient le système de base deux, appelé système binaire. Les chiffres utilisés sont : **0 et 1**
- Pour **$a = \text{huit}$** on obtient le système de base huit appelé aussi système octal. les chiffres utilisés sont : **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7**
- Si la base a est supérieure à dix, il faut introduire d'autres symboles. Par exemple pour **$a = \text{seize}$** , on obtient le système appelé hexadécimal, les chiffres utilisés sont : **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F**

Chiffres (Système hexadécimal)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
Écriture décimale	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Auto évaluation

1. Soit a un entier naturel supérieur ou égal à 2.
 - 1) a. Vérifier que : $a = \overline{10}^a$; $a^2 = \overline{100}^a$; $a^3 = \overline{1000}^a$
b. Soit n un entier naturel non nul. Ecrire a^n dans le système de base a .
 - 2) On suppose que $a > 2$. Ecrire en base a chacun des entiers suivants :
 $2a$; $2(a+1)$; $a^3 + a$; $(a^2 + 1)(a^3 + a)$
2. 1) En effectuant des divisions euclidiennes successives trouver le développement de 1000 suivant :
 - a. les puissances de 8
 - b. les puissances de 16.
- 2) Déduire les écritures respectives de 1000 en base huit et en base seize.

II. Conversion d'une base à une autre

Activités de découverte

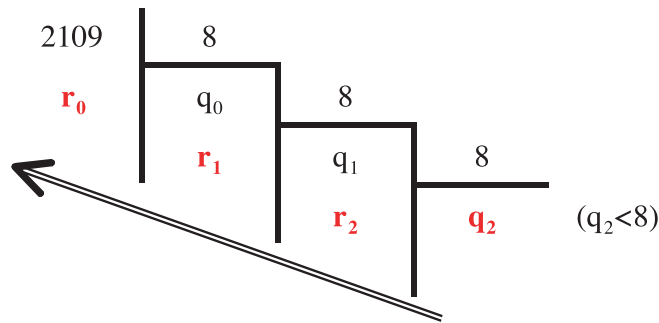
1) D'une base quelconque à la base décimale

1. Soit l'entier $x = \overline{1076}^{\text{huit}}$
 - 1) Ecrire le développement de x suivant les puissances de 8
 - 2) Déduire l'écriture décimale de x .
2. Ecrire en base décimale chacun des entiers suivants :
 - a. $x = \overline{101101}^{\text{deux}}$
 - b. $y = \overline{2A7E}^{\text{seize}}$

2) De la base décimale à une base quelconque

3. Soit l'entier $x = 2109$ (écriture décimale)
 - 1) Effectuer les divisions euclidiennes successives :
$$x = 8 q_0 + r_0$$
$$q_0 = 8 q_1 + r_1$$
$$q_1 = 8 q_2 + r_2 \text{ avec } q_2 < 8$$
 - 2) Trouver le développement de x suivant les puissances de 8 et déduire que $x = \overline{q_2 r_2 r_1 r_0}^{\text{huit}}$

► Disposition pratique :



On part ensuite du sens inverse $x = \overline{q_2 r_2 r_1 r_0}^{\text{huit}}$

4. Les nombres 93 et 6780 sont écrits en base décimale.

- 1) Ecrire le nombre 93 en base huit.
- 2) Ecrire le nombre 93 en base deux.
- 3) Ecrire le nombre 6780 en base seize.

3) De la base binaire à la base octale

5. Soit l'entier $x = \overline{10011101}^{\text{deux}}$

- 1) Ecrire x en base décimale.
- 2) Déduire l'écriture de x en base huit.

► Pour passer de la base binaire à la base huit, on peut procéder directement de la manière suivante :

- On découpe les chiffres de x en bloc de trois chiffres à partir de la droite (le dernier bloc à gauche contient 1, 2 ou 3 chiffres)

- On convertit en base décimale les nombres formés par ces

blocs écrits en base deux, on obtient alors des chiffres entre 0 (bloc 000) et 7 (bloc 111), qui correspondent aux chiffres utilisés en base huit)

$$\begin{array}{ccc} 10 & 011 & 101 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 & 5 \\ x = \overline{235}^{\text{huit}} \end{array}$$

4) De la base binaire à la base hexadécimale

6. On veut convertir l'écriture de $x = \overline{110110101}^{\text{deux}}$

en base seize. On procède alors directement, de façon analogue à l'activité 5 mais avec des blocs de quatre chiffres

Compléter alors le calcul ci-contre.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x = \overline{\dots\dots\dots}^{\text{seize}} \end{array}$$

5) De la base octale à la base binaire

7. On veut convertir l'écriture de $x = \overline{265}^{\text{huit}}$ en base binaire.

On procède alors de la manière suivante :

Chaque chiffre est éclaté en bloc de trois chiffres et écrit en base binaire (l'écriture de zéro à gauche est inutile) Compléter alors le calcul ci-contre.

$$\begin{array}{ccc} 2 & 6 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \dots & \dots & 101 \\ x = \overline{\hspace{1cm}}^{\text{deux}} \\ \dots & \dots & \end{array}$$

6) De la base hexadécimale à la base binaire

8. On veut convertir l'écriture de $x = \overline{3B8}^{\text{seize}}$

en base binaire. On procède alors comme dans l'activité 7 :

Chaque chiffre est éclaté, cette fois en bloc de quatre chiffres et écrit en base binaire (l'écriture de zéro à gauche est inutile)

Compléter alors le calcul ci-contre.

$$\begin{array}{ccc} 3 & B & 8 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \dots & \dots & 1000 \\ x = \overline{\hspace{1cm}}^{\text{deux}} \\ \dots & \dots & \end{array}$$

Auto évaluation

1. Ecrire en base dix chacun des entiers suivants :

- a. $x = \overline{175}^{\text{huit}}$
- b. $y = \overline{111101}^{\text{deux}}$
- c. $z = \overline{2AE}^{\text{seize}}$

2. Ecrire en base seize puis en base huit puis en base deux chacun des entiers suivants :

- a. $x = 29$ (écriture décimale)
- b. $y = 108$ (écriture décimale)

3. Ecrire en base huit puis en base seize chacun des entiers suivants :

- a. $x = \overline{1110101}^{\text{deux}}$
- b. $y = \overline{1001110100}^{\text{deux}}$

4. Soit $x = \overline{4016}^{\text{huit}}$

- a. Donner l'écriture de x en base binaire.
- b. Déduire l'écriture de x en base hexadécimale.

5. Soit $x = \overline{29AF}^{\text{seize}}$

- a. Donner l'écriture de x en base binaire.
- b. Déduire l'écriture de x en base huit.

III. Addition et multiplication dans un système de numération de base a

Activités de découverte

1. Soient les entiers $x = \overline{1745}^{\text{huit}}$ et $y = \overline{162}^{\text{huit}}$, on se propose d'écrire en base huit la somme $x + y$.

1) Compléter la table d'addition suivant en base huit :

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2					
1	1	2	3					
2	2	3	4					
3	3	4	5					
4	4	5	6					
5	5	6	7					
6	6	7	10					
7	7	10	11					16

2) L'addition en base a se fait avec les mêmes règles qu'en décimale : on commence à additionner les chiffres de droite, lorsque la somme des chiffres est supérieure ou égale à a on a une retenue qu'on reporte sur le chiffre suivant...

Compléter alors l'opération suivante effectuée en base huit :

$$\begin{array}{r}
 \textcolor{red}{1} \\
 1745 \\
 + \quad 162 \\
 \hline
 = \dots 27
 \end{array}$$

3) Convertir x et y en base décimale et vérifier le résultat obtenu en 2).

2. 1) Dresser la table de multiplication en base huit

2) La multiplication en base a se fait avec les mêmes règles qu'en décimale, compléter alors la multiplication suivante effectuée en base huit :

$$\begin{array}{r}
 5034 \\
 \times \quad 76 \\
 \hline
 36250 \\
 \dots\dots\dots \\
 \hline
 = \dots\dots\dots
 \end{array}$$

3) Convertir les nombres donnés en base décimale et vérifier le résultat obtenu en 2).

L'essentiel du cours

Tables d'addition et de multiplication dans une base a

Base binaire

+	0	1
0	0	1
1	1	10

x	0	1
0	0	0
1	0	1

Base huit

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0							
1	1	2						
2	2	3	4					
3	3	4	5	6				
4	4	5	6	7	10			
5	5	6	7	10	11	12		
6	6	7	10	11	12	13	14	
7	7	10	11	12	13	14	15	16

x	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0							
1	0	1						
2	0	2	4					
3	0	3	6	11				
4	0	4	10	14	20			
5	0	5	12	17	24	31		
6	0	6	14	22	30	36	44	
7	0	7	16	25	34	43	52	61

Base hexadécimale

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0															
1	1	2														
2	2	3	4													
3	3	4	5	6												
4	4	5	6	7	8											
5	5	6	7	8	9	A										
6	6	7	8	9	A	B	C									
7	7	8	9	A	B	C	D	E								
8	8	9	A	B	C	D	E	F	10							
9	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12						
A	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14					
B	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16				
C	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18			
D	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A		
E	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	
F	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0															
1	0	1														
2	0	2	4													
3	0	3	6	9												
4	0	4	8	C	10											
5	0	5	A	F	14	19										
6	0	6	C	12	18	1E	24									
7	0	7	E	15	1C	23	2A	31								
8	0	8	10	18	20	28	30	38	40							
9	0	9	12	1B	24	2D	36	3F	48	51						
A	0	A	14	1E	28	32	3C	46	50	5A	64					
B	0	B	16	21	2C	37	42	4D	58	63	6E	79				
C	0	C	18	24	30	3C	48	54	60	6C	78	84	90			
D	0	D	1A	27	34	41	4E	5B	68	75	82	8F	9C	A9		
E	0	E	1C	2A	38	46	54	62	70	7E	8C	9A	A8	B6	C4	
F	0	F	1E	2D	4C	4B	5A	69	78	87	96	A5	B4	C3	D2	E1

- N.B :**
- l'addition et la multiplication sont commutatives il suffit alors de remplir la moitié de chaque table.
 - Il ne s'agit pas d'apprendre ces tables, on pourrait seulement les utiliser pour faire des opérations de calcul.

Auto évaluation

1. Calculer en base binaire :

a. $\overline{1101} + \overline{1110}$

b. $\overline{110101} \times \overline{101}$

2. Calculer en base huit :

a. $\overline{10725} + \overline{5463}$

b. $\overline{3514} \times \overline{63}$

3. Calculer en base seize :

a. $\overline{18FA5} + \overline{902B}$

b. $\overline{AAA} \times \overline{BB}$

TP1

1) Prouver qu'un entier n compris entre 1 et 63 s'écrit en base binaire avec six chiffres au plus.

2) Classer ces entiers en six catégories en utilisant leurs écritures binaires :

- (1) Le premier chiffre à partir de la droite vaut 1 : 1 ; 11 ; 101 ; ... ; 1111
- (2) Le deuxième chiffre à partir de la droite vaut 1 : 10 ; 11 ; 110 ; ... ; 1111
- (3) Le troisième chiffre à partir de la droite vaut 1 : 100 ; 101 ; 110 ; ... ; 1111
- (4) Le quatrième chiffre à partir de la droite vaut 1
- (5) Le cinquième chiffre à partir de la droite vaut 1
- (6) Le sixième chiffre à partir de la droite vaut 1

3) (*Devinez le nombre*) L'ordinateur a choisi un nombre entre 1 et 63. Vous devez le deviner. Pour vous aider, il vous indique que ce nombre se trouve uniquement sur les cartes en jaune (1, 3, 5 et 6). Quel est ce nombre ?

1	2	3
1 3 5 7 9 11 13 15	2 3 6 7 10 11 14 15	4 5 6 7 12 13 14 15
17 19 21 23 25 27 29 31	18 19 22 23 26 27 30 31	20 21 22 23 28 29 30 31
33 35 37 39 41 43 45 47	34 35 38 39 42 43 46 47	36 37 38 39 44 45 46 47
49 51 53 55 57 59 61 63	50 51 54 55 58 59 62 63	52 53 54 55 60 61 62 63
4	5	6
8 9 10 11 12 13 14 15	16 17 18 19 20 21 22 23	32 33 34 35 36 37 38 39
24 25 26 27 28 29 30 31	24 25 26 27 28 29 30 31	40 41 42 43 44 45 46 47
40 41 42 43 44 45 46 47	48 49 50 51 52 53 54 55	48 49 50 51 52 53 54 55
56 57 58 59 60 61 62 63	56 57 58 59 60 61 62 63	56 57 58 59 60 61 62 63

4) Elaborer un jeu analogue avec n compris entre 1 et 127.

(Vérifier que , dans ce cas, on aura besoin de sept cartes)

TP2

1) Compléter le tableau suivant :

Ecriture hexadécimale	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
Ecriture binaire	0	1	10	101												

2) Dans un ordinateur, les informations sont mises en mémoire sous forme d'une suite de bits ; les calculs sont traités en système binaire. Les bits sont groupés par paquets de huit (octets). Il est souvent utile en informatique, de représenter un octet en écriture hexadécimale.

Pour un octet, le plus petit nombre est 0 représenté par huit zéros 00000000, et le plus grand est 255 représenté par huit chiffres " un " 11111111 (FF en hexadécimal), ce qui représente 256 possibilités de valeurs différentes.

Donner la représentation en hexadécimal de chacun des octets suivants :

10101101; 01101001; 00111100; 10111000 ; 00001110 ; 11110000

1

- 1) Elaborer un programme informatique permettant la conversion de l'écriture décimale d'un nombre comportant au plus trois chiffres en écriture binaire.
- 2) Elaborer un programme informatique permettant la conversion de l'écriture binaire d'un nombre comportant au plus 10 chiffres en écriture décimale.

2

Le code ASCII :

• *Rappel sur le code ASCII :*

La mémoire de l'ordinateur conserve toutes les données sous forme numérique. Il n'existe pas de méthode pour stocker directement les caractères. Chaque caractère possède donc son équivalent en code numérique: c'est le code ASCII (American Standard Code for Information Interchange - traduisez " Code American Standard pour l'Echange d'Informations"). Le code ASCII de base représentait les caractères sur 7 bits (c'est-à-dire 128 caractères possibles, de 0 à 127). Le code ASCII a été mis au point pour la langue anglaise, il ne contient donc pas de caractères accentués, ni de caractères spécifiques à une langue. Pour coder ce type de caractère il faut recourir à un autre code. Le code ASCII a donc été étendu à 8 bits (un octet) pour pouvoir coder plus de caractères (on parle d'ailleurs de code ASCII étendu...). Ce code attribue les valeurs 0 à 255 aux lettres majuscules et minuscules, aux chiffres, aux marques de ponctuation et aux autres symboles

• *Programme en Turbo Pascal permettant l'affichage du code ASCII en binaire d'un caractère donné :*

```

Program Lecture_caractere;
uses winCRT;
Var c: char;
    q,i:integer;
    T:array[1..8]of integer;
Begin
Write('Entrez le caractère: c = ');
Readln(c);
q:=ORD(c);
i:=0;
Repeat
i:=i+1;
T[i]:=q MOD 2;
q:=q DIV 2;
Until q= 0;
Write('Le compilateur transforme le caractère ',c, ' sous la forme: ');
for i:=8 downto 1 do
write(t[i]);
End.
```

1

Soit a une base de numération telle que $a > 2$. Ecrire en base a chacun des entiers suivants :

$$\begin{aligned} 1) \quad & x = a + 1 \quad ; \quad y = a^2 + 1 \quad ; \quad z = a^2 + a \quad ; \quad t = a^2 + a + 1 \\ 2) \quad & m = (a + 1)^2 \quad ; \quad n = a(a + 1)^2 \quad ; \quad p = (a^2 + 1)^2 \quad ; \quad q = (a^2 + 1)^2 (a + 1) \end{aligned}$$

2

Soit a une base de numération. On désigne par α le chiffre représentant $a - 1$.

Ecrire en base a et en fonction de α chacun des entiers suivants :

$$x = a^2 + a - 1 \quad ; \quad y = a^2 - a + 1 \quad ; \quad z = a^2 - a \quad ; \quad t = a^2 - 1$$

3

L'expression d'un entier naturel n , au moyen d'une certaine base de numération b , est $\overline{1234}$. On sait de plus que l'expression de l'entier $2n$, dans la même base, est $\overline{2470}$.

- 1) Déterminer les valeurs de b et n exprimées en base dix.
- 2) Déterminer les expressions en base b des entiers $3n$ et $4n$.

4

Soient x, y, z trois entiers naturels tels que $x > 3$. On suppose que y et z

s'écrivent en base x respectivement sous la forme :

- 1) Exprimer dans le système de base x le produit $x.y.z$ $y = \overline{131}$ et $z = \overline{101}$
- 2) On suppose, de plus, que $x + y + z$ est égale, dans le système décimal, à 50. Déterminer alors, dans le système décimal, les entiers x et xyz .

5

- 1) Déterminer les entiers naturels a et b vérifiant : $3a = 5b$

Trouver l'ensemble des nombres de deux chiffres qui s'écrivent $\overline{xy}$ dans le système décimal et $\overline{yx}$ dans le système hexadécimal.

6

- 1) Soit a une base de numération telle que $a > 3$. Montrer que chacun des nombres suivants (écrits en base a) est une puissance d'un entier, avec un exposant supérieur ou égal à 2 :

- a. $\overline{121}$
- b. $\overline{1331}$

- 2) On suppose que $a > 6$. Ecrire $(a + 1)^4$ dans le système de numération de base a
- 3) Dans le système décimal on donne le nombre $n = (17)^4$. Dans quel système de numération le nombre n s'écrit-il $\overline{14641}$? (utiliser 2))

7 Un nombre n s'écrit 1101010011 dans le système binaire.

1) Ecrire n dans le système octal puis dans le système hexadécimal.

2) Ecrire $2n$:

- Dans le système binaire
- Dans le système octal.
- Dans le système hexadécimal.

8 1) En quelle base a la multiplication suivante est-elle valable ?

$$\overline{11}^a \times \overline{44}^a = \overline{504}^a$$

2) a vaut la valeur trouvée en 1). Effectuer en base a la multiplication suivante :

$$\overline{712}^a \times \overline{53}^a$$

9 Un nombre a s'écrit $\overline{3241}$ en base huit .

1) Donner l'écriture de a dans le système binaire.

2) Trouver l'expression de a^2 de deux manières :

- Effectuer l'opération dans le système de base huit , puis convertir dans le système binaire.
- Effectuer l'opération, directement dans le système binaire, en utilisant le résultat de 1)

10 Dans le système de numération de base seize, les symboles sont :

0, 1, 2 ...9, A, B, C, D, E, F

Calculer dans ce système :

1) $\overline{42A3C} + \overline{E14B}$

2) $\overline{F283A} - \overline{17B14}$

3) $\overline{3A5} \times \overline{42}$

11 On considère une base de numération a .

1) On se propose de montrer que le nombre $\overline{10101}$ est divisible par $\overline{111}$.

a. (1^{ère} manière) :

Soit $\alpha = a - 1$ (α est le chiffre qui représente l'entier $a - 1$). Effectuer dans le système de numération de base a la multiplication suivante :

$$\begin{array}{r} 111 \\ \times \alpha 1 \\ \hline \end{array}$$

Conclure.

b. (2^{ème} manière) :

Calculer le produit $(1 + a + a^2)(1 - a + a^2)$. Dédire le résultat demandé.

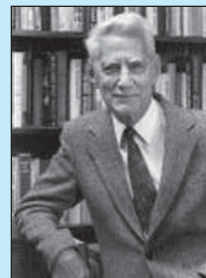
2) Montrer que $\overline{100010001}$ est divisible par $\overline{10101}$

■ *L'homme compte sur ses doigts, l'ordinateur compte sur ses bits :*

L'homme a **dix doigts**. Le système de numération humain est le système décimal. L'ordinateur a **deux états significatifs** (impulsions électriques). Le système de numération qu'il emploie est donc le système binaire.

Vers la fin des années 30, **Claude Shannon** (auteur avec W. Weaver de la théorie mathématique de la communication en 1949) démontra qu'à l'aide de " contacteurs " (interrupteurs), il était possible d'effectuer des opérations en associant le nombre 1 pour un contacteur fermé et 0 pour un contacteur ouvert.

Ce codage de l'information est nommé **base binaire**. C'est avec ce codage que fonctionnent les ordinateurs. Il consiste à utiliser deux états (représentés par les chiffres 0 et 1) pour coder les informations.



Claude Elwood
SHANNON
mathématicien
américain né en 1916

Des bases de numération autre que la base décimale :

■ *L'homme calcule depuis 2000 ans av. J-C avec dix chiffres (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) on parle alors de base décimale (ou base dix). Toutefois dans des civilisations plus anciennes ou pour certaines applications actuelles d'autres bases de calcul ont et sont toujours utilisées :*

- **base binaire** (2), utilisée par l'ensemble des technologies numériques.
- **base quinaire** (5), utilisée par les Mayas (indiens d'Amérique localisés au Guatemala, au Mexique et à l'ouest du Honduras)
- **base duodécimale** (12), utilisée par les anglo-saxons dans leur système monétaire jusqu'en 1960 : un " pound " représentait vingt " shilling " et un " shilling " représentait douze " pences ". Le système d'heure actuel fonctionne également sur douze heures (notamment dans la notation anglo-saxonne)
- **base hexadécimale** (16) Le langage **hexadécimal** est venu pour freiner l'accroissement en longueur des nombres binaires.
- **base vicésimale** (20), utilisée par les Mayas
- **base sexagésimale** (60), utilisée par les Sumériens. Cette base est également utilisée dans le système horaire actuel, pour les minutes et les secondes.

PLAN DU CHAPITRE

I. Principes de dénombrement, nombre d'applications

II. Permutation, arrangement

III. Combinaison

IV. Binôme de Newton

Travaux pratiques

Avec l'outil informatique

Exercices et problèmes

Mathématiques et culture

I. Principes de dénombrement, nombre d'applications

Activités préliminaires

1. Soit E un ensemble fini. On rappelle que le nombre d'éléments de E s'appelle cardinal de E et se note par $\text{card}(E)$. Soient A et B deux parties de E , on considère les parties

$B \setminus A$ = ensemble des éléments de B qui n'appartiennent pas à A

$\overline{A}$ = ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A

(on a donc $\overline{A} = E \setminus A$)

- 1) Vérifier que $\text{card}(\overline{A}) = \text{card}(E) - \text{card}(A)$
- 2) Montrer que $\text{card}(B \setminus A) = \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$
- 3) Dédire que $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$

Indication :

Utiliser le résultat : si $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ alors $\text{card}(E_1 \cup E_2) = \text{card}(E_1) + \text{card}(E_2)$

et remarquer que

$$E = \overline{A} \cup A ; \quad \overline{A} \cap A = \emptyset$$

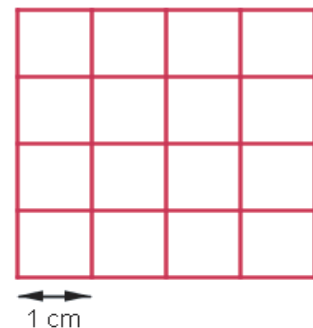
$$B = (B \setminus A) \cup (A \cap B) ; (B \setminus A) \cap (A \cap B) = \emptyset$$

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A) ; A \cap (B \setminus A) = \emptyset$$

2. Combien peut-on voir de carrés sur la figure ci-contre ?

Indication :

- 1) Soit C l'ensemble de ces carrés, noter A_1, A_2, A_3 et A_4 les sous ensembles de C de côtés respectifs 1, 2, 3 et 4 cm, trouver le cardinal de chacune de ces parties.
- 2) Trouver alors le cardinal de C .



3. 300 candidats participent à un concours comportant deux épreuves E_1 et E_2 , 172 d'entre eux ont la moyenne à l'épreuve E_1 et 138 à l'épreuve E_2 , alors que 80 candidats n'ont la moyenne en aucune épreuve. Quel est le nombre de candidats qui ont la moyenne aux deux épreuves ?

indication :

Soient A et B les ensembles des élèves qui ont la moyenne respectivement à l'épreuve E_1 et E_2 et C l'ensemble des élèves qui n'ont la moyenne en aucune épreuve.

- 1) Justifier le résultat $\text{card}(A \cup B) = 300 - \text{card}(C)$
- 2) Dédire $\text{card}(A \cap B)$

Activités de découverte

4. 1) Ecrire tous les entiers de deux chiffres (distincts ou non) pouvant s'écrire à l'aide des chiffres 1, 2 et 3. Quel est leur nombre ?

2) Montrer que le nombre d'entiers de deux chiffres (distincts ou non) dont l'écriture ne comporte pas le chiffre 0 est égal à 9^2 (penser au nombre total d'entiers de deux chiffres et retrancher le nombre d'entiers de deux chiffres dont l'un est égal à 0)

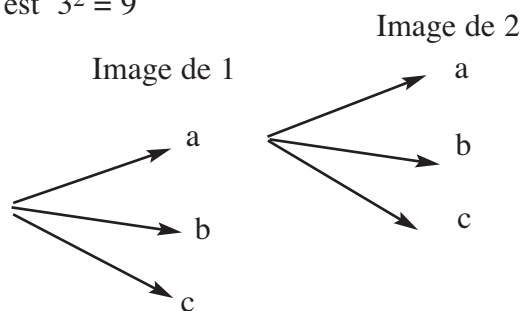
5. On considère les deux ensembles $E = \{1, 2\}$ et $F = \{a, b, c\}$. On se propose de déterminer le nombre des applications de E dans F .

1) L'application $f_1 : 1 \mapsto a$

$2 \mapsto b$

est une application de E dans F . Donner trois autres applications de E dans F

2) En complétant l'arbre de choix suivant trouver toutes les applications de E dans F et vérifier que leur nombre est $3^2 = 9$



6. On jette une pièce de monnaie trois fois de suite et on a obtenu Face au premier jet, Pile au deuxième et Pile aussi au troisième, on convient de noter ce résultat par le triplet (F, P, P)

1) Donner trois autres exemples de résultats possibles.

2) Vérifier en utilisant un arbre de choix que le nombre de résultats possibles est égal à $2^3 = 8$

L'essentiel du cours

Cardinal d'un ensemble fini

Définition : Le nombre d'éléments d'un ensemble fini E s'appelle cardinal de E .

Notation $\text{card}(E)$

Partition d'un ensemble

Définition : les parties $A_1, A_2, \dots, A_n$ de l'ensemble E forment une partition de E si elles sont deux à deux disjointes et leur réunion est égale à E

Principes de dénombrement

Règle 1 (principe de la somme) : Si les parties $A_1, A_2, \dots, A_n$ de l'ensemble E forment une partition de E alors : $\text{Card}(E) = \text{card}(A_1) + \text{card}(A_2) + \dots + \text{card}(A_n)$

Conséquence :

Si A et B sont deux parties d'un ensemble E alors :

$\text{card}(\overline{A}) = \text{card}(E) - \text{card}(A)$ ($\overline{A}$ est le complémentaire de A)

$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$

en particulier, si $A \cap B = \emptyset$ alors $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$

Règle 2 (principe du produit) : Si une situation comporte p étapes offrant respectivement $n_1, n_2, \dots, n_p$ possibilités ; chacun des nombres n_i ne dépend que de l'étape i , alors le nombre total de possibilités est $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_p$

Nombre d'applications

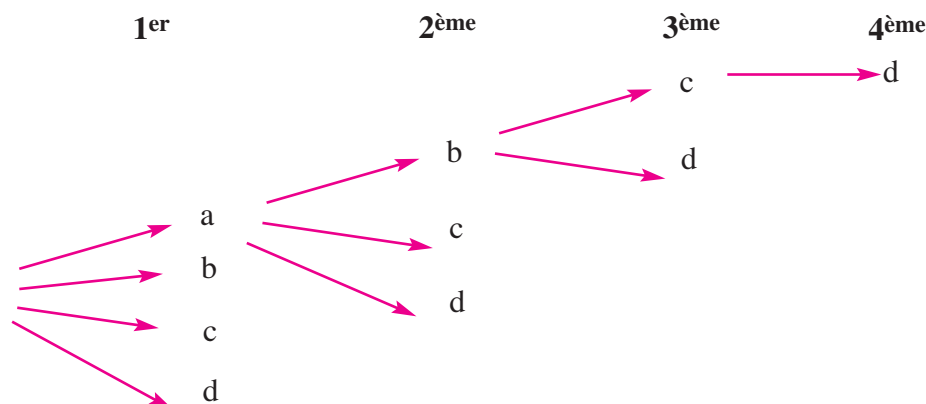
Si $\text{card}(E) = p$ et $\text{card}(F) = n$ alors le nombre d'applications de E dans F est n^p

Auto évaluation

1. Soit N le nombre de façons de placer quatre objets a, b, c, d dans trois cases d'un meuble (on suppose que chacune des cases peut contenir les quatre objets)
1) Donner une possibilité et vérifier qu'elle correspond à une application de l'ensemble $E = \{a, b, c, d\}$ vers $F = \{1, 2, 3\}$.
2) Calculer N
2. On se propose de déterminer le nombre d'entiers de quatre chiffres (distincts ou non) que l'on peut écrire avec les chiffres 7, 8 et 9 seulement.
1) Vérifier que le choix d'un tel entier revient à déterminer une application d'un ensemble de quatre éléments vers l'ensemble $\{7, 8, 9\}$
2) trouver alors le nombre demandé.
3. Ahmed oublie les deux derniers chiffres du code de sa valise mais il sait qu'il s'agit de deux chiffres pairs non nuls. Quel est le nombre maximum d'essais que doit faire Ahmed pour garantir l'ouverture de sa valise ?
4. Fatma remarque qu'il est très rare de voir circuler sur nos routes une voiture dont la plaque d'immatriculation porte un numéro de moins de quatre chiffres. Comment peut-on lui expliquer ce fait ?

II. Permutations, arrangements

1. On dispose de trois jetons portant les numéros 1, 2 et 3. Citer les nombres de trois chiffres qu'on peut former avec ces jetons (exemples 123, 213, ...). Quel est leur nombre ?
2. Quatre coureurs A, B, C et D participent à une course, on veut connaître le nombre N de classements possibles en supposant qu'il n'y a pas d'ex æquo. Compléter l'arbre de choix suivant et vérifier que $N = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$



Le comité d'une association est formé de cinq membres. On veut choisir un président, un secrétaire général et un trésorier. Vérifier à l'aide d'un arbre de choix que le nombre de choix possibles est égal à $5 \times 4 \times 3 = 60$

L'essentiel du cours

Permutation

Définition

Soit E un ensemble fini non vide de n éléments. On appelle permutation des éléments de E tout n -uplet d'éléments distincts de E .

Théorème

Le nombre de permutations d'un ensemble non vide de n éléments est égal à :
 $n(n-1)(n-2) \dots 2 \times 1$

Notation

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note l'entier $n(n-1)(n-2) \dots \times 2 \times 1$ par $n!$ (lire factorielle n)

$$n! = n(n-1)(n-2) \dots \times 2 \times 1$$
- Par convention on pose $0! = 1$

Arrangement

Définition

Soit E un ensemble fini non vide de n éléments et p un entier vérifiant : $1 \leq p \leq n$.
On appelle arrangement de p éléments de E tout p -uplet d'éléments distincts de E

Théorème

Le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble non vide de n éléments ($1 \leq p \leq n$) est égal à : $n(n-1)(n-2) \dots (n-p+1)$

Notation

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note l'entier $n(n-1)(n-2) \dots (n-p+1)$ par A_n^p (lire A, n, p)

$$A_n^p = n(n-1)(n-2) \dots (n-p+1)$$

L'essentiel du cours

(Retenez que A_n^p **est le produit de** p **entiers consécutifs dont le plus grand est** n)

Autre expression de A_n^p : $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$

Remarque

si $\text{card}(E) = n$ alors une permutation des éléments de E est aussi un arrangement des n éléments de E .

Auto évaluation

1. Calculer

$$5!, 4!, 5! + 4!, (5 + 4)!$$

$$\frac{3!}{3}, \frac{6!}{6}, \frac{3! \times 6!}{3 \times 6}, \frac{(3 \times 6)!}{3 \times 6}$$

2. 1) Vérifier les égalités suivantes pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$n! = n \times (n-1)!$$

$$(n+1)! = (n+1) \times n \times (n-1)!$$

2) Simplifier :

$$\text{a. } \frac{7!}{4!} \quad \text{et} \quad \frac{10! \times 9!}{8! \times 6! \times 3!}$$

$$\text{b. } \frac{(n+1)!}{(n-1)!} \quad \text{et} \quad \frac{n! \times (p+2)!}{p! \times (n+1)!}$$

3. 1) Calculer A_5^3 ; A_7^4 ; A_{10}^2 ; A_{225}^1

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Ecrire plus simplement A_n^1 ; A_n^n ; A_n^{n-1}

4. Un anagramme du mot "SERA" est un mot de quatre lettres ayant un sens ou non formé par les mêmes lettres, exemples : RASE, ESRA, ...

1) Trouver le nombre d'anagrammes du mot "SERA".

2) Trouver le nombre d'anagrammes du mot "SERA" commençant par une voyelle.

III. Combinaison

Activités de découverte

1. Soit l'ensemble $E = \{a, b, c, d\}$

1) Citer les parties de E à trois éléments

2) Vérifier que le nombre de parties de E à trois éléments est égal à $\frac{A_4^3}{3!}$

3) Citer les parties de E à deux éléments et trouver leur nombre $3!$

► On montre d'une façon générale que le nombre de parties de p éléments d'un ensemble de n éléments noté C_n^p (on lit " c, n, p ") est égal à $\frac{A_n^p}{p!}$ ($p \leq n$)

2. Vérifier par le calcul que :

$$\begin{aligned} C_n^0 &= 1 & C_n^n &= 1 \\ C_n^1 &= n & C_n^{n-1} &= n \quad (n > 0) \\ C_n^p &= C_n^{n-p} \quad (0 \leq p \leq n) \end{aligned}$$

3. 1) Un professeur propose à ses élèves une série de cinq exercices et impose la résolution de trois exercices au choix. Combien a-t-on de choix possibles ?

2) Combien a-t-on de choix possibles si on doit résoudre deux exercices au choix ?

Que remarque-t-on ?

3) Justifier, sans faire des calculs, le résultat général $C_n^p = C_n^{n-p}$ ($0 \leq p \leq n$).

4. 1) Vérifier l'égalité : $C_6^4 = C_5^3 + C_5^4$

2) Soient p et n deux entiers tels que ($1 \leq p \leq n-1$), on se propose de prouver d'une façon générale l'égalité $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$. On considère alors un ensemble E non vide de cardinal n et contenant un élément a .

a. Dénombrer les parties à p éléments de E qui contiennent a .

b. Dénombrer les parties à p éléments de E qui ne contiennent pas a .

c. En déduire l'égalité demandée.

► La formule $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$ permet de calculer de proche en proche les nombres : C_n^p

On place dans un tableau à la n -ème ligne et p -ème colonne le nombre C_n^p de sorte que C_n^p soit la somme du nombre C_{n-1}^p situé au dessus et du nombre C_{n-1}^{p-1} situé à gauche du nombre C_{n-1}^p

		$p-1$	p	
$n-1$		C_{n-1}^{p-1}	C_{n-1}^p	$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$
n			C_n^p	$\downarrow$
				C_n^p

On obtient alors un tableau appelé **triangle de Pascal**

$n \backslash P$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

L'essentiel du cours

Combinaison

Définition

Soit E un ensemble fini non vide de n éléments et p un entier naturel tel que $p \leq n$. On appelle combinaison de p éléments de E toute partie de E formée par p éléments.

Notation

Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble de n éléments est noté par

$$C_n^p \text{ (on lit "c, n, p")} \text{ ou } \binom{n}{p}$$

Théorème

Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble de n éléments est :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} \quad (0 \leq p \leq n)$$

Propriétés

$$C_n^p = C_n^{n-p} \quad (0 \leq p \leq n)$$

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p \quad (1 \leq p \leq n-1)$$

Auto évaluation

1. 1) Déterminer C_{149}^1 ; C_{208}^0 ; C_{65}^{65} ; C_{331}^{330}
 2) Calculer C_5^3 ; C_7^2 ; C_{10}^3 ; C_{331}^1
 3) Calculer C_{14}^{10} ; C_{38}^{35} ; C_{2007}^{2005} .

2. Utiliser l'égalité $C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$ pour montrer que :

- 1) $C_n^p = C_n^{n-p}$ ($0 \leq p \leq n$)
 2) $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$ ($1 \leq p \leq n-1$)

3. Soit n un entier naturel tel que $n > 2$.

Prouver l'égalité : $C_n^2 + C_n^{n-3} = C_{n+1}^3$ de deux manières :

- 1) En exprimant chacun des coefficients C_n^2 , C_n^{n-3} et C_{n+1}^3 en fonction de n .
 2) En utilisant les propriétés des nombres C_n^p .

4. Déterminer l'entier naturel n dans chaque cas :

- 1) $C_n^5 = C_n^4$
 2) $5C_n^5 = 4C_n^4$
 3) $C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 = 387n$

5. On sait qu'une équipe de football est formée de onze joueurs et que l'entraîneur a le droit de remplacer trois joueurs sur le terrain au plus au cours du match. L'entraîneur veut remplacer au moins un joueur, combien a-t-il alors de choix possibles ?

6. Soit (P) un polygone convexe de n sommets. ($n > 3$)

- 1) Quel est le nombre des droites joignant deux à deux les sommets de (P)
 2) Dédurre que le nombre des diagonales de (P) est égal à $\frac{n(n-3)}{2}$

IV. Binôme de Newton

Activités préliminaires

1. Soient a et b deux réels quelconques.

- 1) Rappeler le développement de chacun des produits remarquables : $(a + b)^2$ et $(a + b)^3$
- 2) Dédire le développement de : $(a + b)^4$ et $(a + b)^5$.

2. Utiliser le triangle de Pascal pour calculer :

- 1) Les nombres C_4^p pour $p \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$
- 2) Les nombres C_5^p pour $p \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
- 3) Les nombres C_6^p pour $p \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Activités de découverte

3. Soient a et b deux réels.

- 1) Vérifier qu'on peut écrire : $(a + b)^2 = C_2^0 a^2 + C_2^1 a^1 b^1 + C_2^2 b^2$
et $(a + b)^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2 b^1 + C_3^2 a^1 b^2 + C_3^3 b^3$
- 2) Ecrire de façon analogue : $(a + b)^4$ et $(a + b)^5$

4. Soient a et b deux réels. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n , on a :

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n b^n \quad (1)$$

Indication : $(a + b)^{n+1} = (a + b)(a + b)^n = a(a + b)^n + b(a + b)^n$

$$C_n^0 = C_{n+1}^0 = 1, \quad C_n^n = C_{n+1}^{n+1} = 1$$

$$C_n^{p-1} + C_n^p = C_{n+1}^p$$

► L'égalité (1) s'appelle **formule du binôme**, les nombres C_n^p s'appellent coefficients binomiaux.

5. Soit E un ensemble non vide de cardinal n .

- 1) Montrer que le nombre de toutes les parties de E est égal à

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n$$

- 2) En déduire que le nombre de toutes les parties de E est égal à 2^n
(utiliser la formule du binôme pour $a = b = 1$)

L'essentiel du cours

Formule du binôme

Théorème

Pour tous nombres réels a et b , et tout entier naturel non nul n on a,

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n b^n$$

Remarque

Les coefficients C_n^p s'obtiennent à l'aide du triangle de Pascal.

Nombre de parties d'un ensemble fini

Théorème

Le nombre de parties d'un ensemble fini de cardinal n est égal à 2^n .

Auto évaluation

1. Développer, avec la formule du binôme, les produits suivants :

a. $(x+2)^5$

c. $(3x-2a)^4$

b. $(1-x)^6$

d. $(2x + \frac{1}{2})^4$

1) Ecrire à l'aide de la formule du binôme le développement de $(1+2)^n$.

2) Calculer alors, $C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2 C_n^2 + \dots + 2^n C_n^n$

3. Calculer les sommes :

$$S_1 = C_5^0 + 3C_5^1 + 9C_5^2 + 27C_5^3 + 243C_5^4 + 729C_5^5$$

$$S_2 = C_5^0 - 3C_5^1 + 9C_5^2 - 27C_5^3 + 243C_5^4 - 729C_5^5$$

$$S = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (1)^n C_n^n \quad (n \text{ est un entier naturel non nul})$$

4. Siwar possède 10 poupées différentes. Combien a-t-elle de possibilités de placer ces poupées dans deux cases, chaque case doit contenir au moins une poupée.

TP1

Les sortes de tirages :

A. Tirages simultanés :

Tirer **simultanément** p objets parmi n , c'est choisir une partie de p élément d'un ensemble de n éléments. Dans ce cas on ne tient pas compte de l'ordre, il y a donc C_n^p tirages possibles.

Exemple :

Un sac contient 2 boules blanches, 3 boules noires et 4 boules rouges. On tire simultanément trois boules.

- 1) Quel est le nombre de tirages possibles.
- 2) Dénombrer dans chaque cas les tirages :
 - a. de trois boules rouges.
 - b. sans aucune boule rouge
 - c. avec exactement deux boules rouges
 - d. avec au moins une boule rouge (penser au complémentaire)
 - e. avec trois boules de même couleur
 - f. avec une boule de chaque couleur

B. Tirages successifs sans remise :

Tirer **successivement sans remise** p objets parmi n , c'est choisir un arrangement de p élément d'un ensemble de n éléments. Dans ce cas, il faut tenir compte de l'ordre, il y a donc A_n^p tirages possibles.

Exemple :

Un sac contient 3 boules blanches, 4 boules noires. On tire successivement et sans remise deux boules.

- 1) Quel est le nombre de tirages possibles.
- 2) Dénombrer dans chaque cas les tirages :
 - a. de deux boules noires.
 - b. avec une boule blanche au premier tirage et une boule noire au deuxième tirage
 - c. avec deux boules de couleurs différentes.
 - d. avec deux boules de même couleur.

C. Tirages successifs avec remise :

Tirer **successivement avec remise** p objets parmi n , c'est choisir un p -uplet c'est donc une application d'un ensemble de p éléments vers un ensemble de n éléments. Dans ce cas, il faut tenir compte de l'ordre, de plus le même objet peut être tiré plus qu'une fois, il y a donc n^p tirages possibles.

Exemple :

Un sac contient 3 boules blanches, 4 boules noires. On tire successivement et avec remise deux boules.

- 1) Quel est le nombre de tirages possibles.
- 2) Dénombrer dans chaque cas les tirages :
 - a. de deux boules noires.
 - b. avec deux boules de même couleur
 - c. avec une boule blanche au premier tirage

TP2 Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ où $n \in \mathbb{N}^*$
$$x \mapsto x(1+x)^n$$

- 1) Montrer que $f(x) = C_n^0 x + C_n^1 x^2 + C_n^2 x^3 \dots + C_n^n x^{n+1}$
- 2) Calculer $f'(x)$ (nombre dérivé de f en x) de deux façons différentes :
 - a. En utilisant la définition de f
 - b. En utilisant le résultat de la question 1)
- 3) En déduire la valeur de $S = C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 \dots + (n+1)C_n^n$

A l'aide d'un logiciel de programmation élaborer un programme permettant le calcul des coefficients C_n^p pour n et p donnés de différentes manières :

- 1) En calculant $n!$, $p!$, $(n-p)!$ et en utilisant l'égalité : $C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$
- 2) En calculant $n(n-1)(n-2) \dots (n-p+1)$, $p!$ et en utilisant l'égalité :

$$C_n^p = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-p+1)}{p!}$$

- 3) En calculant successivement pour $0 \leq k \leq p$ à l'aide de la formule :

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$

Exécuter ces programmes pour quelques valeurs de n et p.

1 Un questionnaire comporte deux questions Q_1 et Q_2 posées à 25 personnes. A chaque question on doit répondre par "oui" ou "non". On suppose que 15 personnes ont répondu "oui" à la question Q_1 , 8 ont répondu "oui" à la question Q_2 et 5 personnes ont répondu "oui" aux deux questions.

- 1) Combien de personnes ont répondu "oui" à l'une au moins des deux questions ?
- 2) Combien de personnes ont répondu "non" aux deux questions
- 3) Combien de personnes ont répondu "oui" à Q_1 et "non" à Q_2 ?

2 Un sondage d'opinion est réalisé auprès de cent clients d'un supermarché concernant leurs avis sur trois produits A, B et C. Les résultats du sondage se résument comme suit :

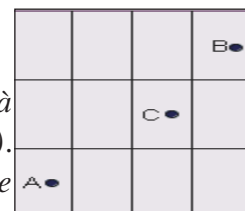
- 12 clients aiment les trois produits
- 28 clients aiment les produits A et B
- 32 clients aiment les produits B et C
- 22 clients aiment les produits A et C
- 45 clients aiment le produit A
- 53 clients aiment le produit B
- 46 clients aiment le produit C

Faire un diagramme et déduire le nombre de clients qui préfèrent :

- a. deux et deux seulement des produits A, B et C
- b. au moins un des trois produits ?
- c. aucun des trois produits .

3 Sur le damier ci-contre on place un pion dans la case de départ A et on veut se rendre en B. Les seuls déplacements autorisés sont vers la droite ou vers le haut.

- 1) Combien y a-t-il de chemins de la case A vers la case B ?
- 2) Combien y a-t-il de chemins de A vers B en passant par C ?



Indication : pour aller de A vers B il faut effectuer trois déplacements à droite et deux déplacements vers le haut (dans un ordre quelconque). Coder alors par D un déplacement à droite et H un déplacement vers le haut et utiliser un arbre de choix.

4 Vous savez qu'en informatique un bit (abréviation de binary digit) vaut 0 ou 1 et qu'un octet est une unité d'information formée de huit bits. Expliquer alors l'existence de 256 octets possibles.

5 On considère un réseau téléphonique de huit chiffres.

1) Quelle est la capacité théorique de ce réseau (en supposant que tous les numéros sont possibles y compris le numéro 00000000)

2) Quel est le nombre de numéros de téléphone se terminant par un chiffre pair ?

3) Quel est le nombre de numéros de téléphone commençant par 95

4) Parmi les numéros de téléphone commençant par 95, combien de numéros se terminent par 2007.

Parmi les numéros de téléphone commençant par 95, combien de numéros formés par deux nombres identiques de trois chiffres après 95 (exemples 95**05**1051, 95**22**4224 ...)

6 Un QCM comporte 10 questions et 10 réponses, et on demande d'associer à chaque question une seule réponse. De combien de façons peut-on répondre au hasard ?

7 On considère quatre jetons numérotés de 1 à 4 et quatre cases numérotés de 1 à 4. On place au hasard un jeton, et un seul, dans chaque case.

1) Combien y a-t-il de dispositions possibles.

2) Utiliser un arbre de choix pour trouver le nombre de dispositions pour lesquelles aucun jeton ne se trouve dans la case portant le même numéro.

8 La fabrication d'une pièce exige son passage par cinq machines M_1, M_2, M_3, M_4 et M_5 . Dénombrer les trajets possibles dans chacun des cas suivants :

1) L'ordre de passage est quelconque.

2) La pièce doit passer d'abord par M_1 .

3) La pièce doit passer par M_3 avant M_4 et M_5 .

9 Une main d'un jeu de 32 cartes est formée de huit cartes.

1) Dénombrer toutes les mains possibles

2) Dénombrer dans chacun des cas suivants les mains comportant :

a. les quatre as

b. Deux couleurs seulement

c. Au moins deux valets

10 Au CAN 2006 en Egypte M. LEMERRE l'entraîneur de l'équipe de Tunisie de Football dispose de 23 joueurs dont trois gardiens de but, 8 défenseurs, 8 joueurs du milieu et 4 attaquants.

1) Le premier match la Tunisie affronte la Zambie. Combien a-t-il de choix possibles concernant les 11 joueurs titulaires sans tenir compte du poste de chaque joueur (à part le gardien) ?

2) Combien a-t-il de choix possibles sachant que l'équipe doit comporter un gardien, quatre défenseurs, quatre au milieu et deux attaquants ?

11 Une urne contient sept boules numérotées de 1 à 7. On en tire 3 boules simultanément.

- 1) Combien y a-t-il de tirages possibles au total ?
- 2) Combien y a-t-il de tirages possibles contenant la boule numéro 7 ?
- 3) Combien y a-t-il de tirages possibles contenant exactement deux boules de numéros impairs ?
- 4) Combien y a-t-il de tirages possibles contenant trois boules portant des numéros de même parité ?
- 5) Combien y a-t-il de tirages possibles contenant au moins une boule de numéro supérieur ou égal à 5 ?

12 Une porte est équipée d'une serrure à code comportant un dispositif muni des touches 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et les lettres A, B, C, D. Un code est formé de trois chiffres suivis de deux lettres. Les chiffres sont nécessairement distincts les lettres non (exemples : 825CA, 213BB, ...)

- 1) Combien de codes peut-on ainsi former ?
- 2) Un signal d'alarme se déclenche lorsque aucun des trois chiffres frappés n'est correct. Combien peut-on former de codes déclanchant l'alarme ? Déduire le nombre de codes ne déclanchant pas l'alarme ?

13 Soient n et p deux entiers tels que $n \geq 2$ et $p \leq n - 2$.

Montrer que $C_n^p = C_{n-2}^p + 2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2}$

14 On considère la propriété $P : n! \geq n^2$ où n est un entier naturel.

- 1) Vérifier que P est vraie pour $n = 0$ mais elle est fausse pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.
- 2) Montrer par récurrence que P est vraie pour tout $n \geq 4$

15 Montrer de deux façons différentes l'égalité :

$$C_1^1 + C_2^1 + C_3^1 + \dots + C_n^1 = C_{n+1}^2 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

- 1) Par récurrence
- 2) En utilisant l'égalité $C_{p+1}^2 = C_p^2 + C_p^1$

16 1) Soient n et p deux entiers tels que $1 \leq p \leq n$. Montrer que $pC_n^p = nC_{n-1}^{p-1}$

2) Déduire que pour tout entier naturel $n > 1$: $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n = n2^{n-1}$

17 Soit n un entier naturel non nul.

- 1) Développer $(2 + 1)^n$.
- 2) En déduire $C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2C_n^2 + \dots + 2^nC_n^n$.
- 3) calculer $C_n^0 - 2C_n^1 + 2^2C_n^2 + \dots + (-2)^n C_n^n$

18 Soit un entier pair $n > 2$.

1). Développer $(1 + 1)^n$ et $(1-1)^n$.

2) En déduire que les nombres $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots + C_n^n$ et $C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots + C_n^{n-1}$ sont égaux et donner leur valeur commune.

3) Calculer les sommes $A = C_{100}^0 + C_{100}^2 + C_{100}^4 + \dots + C_{100}^{100}$ et $B = C_{100}^1 + C_{100}^3 + C_{100}^5 + \dots + C_{100}^{99}$

■ **Ahmed Ibn AL BANNA : 1256 – 1321 MARRAKECH (Maroc)**

Abou Moussa Ahmed Ibn AL BANNA est l'auteur de plusieurs recueils mathématiques en algèbre et en analyse combinatoire (dénombrement). Dans son livre «رفع الحجاب» il a établi des propositions relatives au dénombrement. En particulier, on retrouve chez Ibn Al Banna l'utilisation du triangle des coefficients du binôme attribué plus tard à Pascal. Marrakech rayonnait dans les sciences grâce à Ibn Al Banna.

■ **Blaise PASCAL : 1623 – 1662 CLERMONT PARIS**



Blaise Pascal est physicien, mathématicien, philosophe et écrivain français. Il a marqué l'histoire de la science, en particulier par sa grande rigueur d'analyse et son sens de l'expérience.

*A partir de 1650, Pascal s'intéresse en arithmétique, aux suites de nombres entiers. S'il n'est pas le premier à travailler sur le triangle de Pascal, puisque des mathématiciens chinois et arabes l'ont fait bien avant lui, on lui doit l'étude la plus systématique. Et c'est à l'occasion du **Traité sur le triangle arithmétique** qu'il énonce pour la première fois le principe du raisonnement par récurrence .*

En 1642, il entreprend de développer une machine à calculer afin d'aider son père dans son travail de comptabilité fiscale. Il n'a alors que 19 ans. Destinée au calcul abstrait et financier, la "Pascaline" additionne, soustrait, multiplie et divise, grâce à un système composé de six roues à dix dents. Bien qu'elle ne soit pas la première du genre (Wilhelm Schickard avait inventé une machine similaire en 1623), Blaise Pascal n'a pas connaissance des travaux antérieurs lorsqu'il invente son calculateur et celui-ci reste comme l'une de ses plus grandes contributions à la science.

PLAN DU CHAPITRE

- I.** Probabilité.
- II.** Equiprobabilité.
- III.** Expériences indépendantes.
- IV.** Expériences dépendantes.

Travaux pratiques

Avec l'outil informatique.

Exercices et problèmes.

Mathématiques et culture.

I. Probabilité

Activités préliminaires

1. Dans la plupart des calculatrices, il y a une touche Random.

Lorsqu'on appuie sur cette touche, il s'affiche un nombre appartenant à l'intervalle $[0, 1[$. Dans la plupart des cas, ce nombre s'affiche avec trois décimales.

Chacun de ces nombres a la même chance d'apparaître. Cela permet d'obtenir chaque fois trois chiffres au hasard.

Exemples :

Random = 0.268 donne 2, 6, 8.

Random = 0.420 donne 4, 2, 0.

Utiliser la calculatrice pour obtenir 50 chiffres au hasard.

2. Lorsque l'on tire au sort un sujet d'examen, ou que l'on lance une pièce de monnaie bien équilibrée ou un dé non pipé, il est impossible de prévoir le résultat, car ce résultat est soumis au hasard. On dit alors que le résultat est aléatoire. De telles expériences sont dites expériences aléatoires.

Donner trois autres exemples de phénomènes aléatoires.

3. 1) On se propose de simuler 500 lancers d'une pièce de monnaie ;

- utiliser la calculatrice pour obtenir 500 chiffres aléatoires,
- noter P pour chaque chiffre pair obtenu et F pour chaque chiffre impair obtenu,
- organiser les résultats dans le tableau ci-contre.

Issue	P	F
Fréquence		

2) A-t-on autant de chances de voir apparaître P que de voir apparaître F ?

4. On a simulé 10000 lancers d'une pièce de monnaie puis on a organisé les résultats dans le tableau ci-dessous.

Nombre de lancers	100	500	1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000	10000
Nombre d'apparitions de pile	52	242	502	1002	1513	2034	2513	3035	3544	4020	4518	5008

1. Calculer la fréquence de l'issue " pile ".
 2. Tracer dans un même repère la courbe de fréquence de l'issue " pile " et la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$.
- Vers quelle valeur la fréquence de l'issue " pile " tend-t-elle à se stabiliser ?

Activités de découverte

1. Un sac contient 100 jetons numérotés de 1 à 100.

Une expérience consiste à tirer un jeton au hasard.

- 1) Combien y a-t-il d'issues possibles ?

a. Dénombrer chacun des événements ci-dessous.

A: " Obtenir un jeton portant un numéro qui commence par 1 ".

B: " Obtenir un jeton portant un numéro qui finit par 2 ".

C: " Obtenir un jeton portant un numéro impair qui commence par 2 ".

b. Vérifier que les événements A et C sont incompatibles.

- 2) Si on suppose que chaque issue apparaît avec la même fréquence égale à $\frac{1}{100}$

Déterminer la fréquence d'apparition de chacun des événements

$$A, \bar{A}, B, C, A \cap B, \bar{A} \cup B, A \cup B, A \cup B \cup C.$$

► Lorsqu'on répète plusieurs fois une expérience aléatoire, on constate que la fréquence de réalisation d'un événement tend à se stabiliser autour d'un nombre.

On parle alors de fréquence théorique de l'événement ou encore de probabilité de l'événement.

2. On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

- 1) Déterminer l'ensemble des issues de l'expérience.

- 2) On suppose que la probabilité d'apparition d'un nombre impair est le double de la probabilité d'apparition d'un nombre pair.

Déterminer la probabilité de chaque événement élémentaire.

- 3) Déterminer la probabilité de chacun des événements ci-dessous

A: " Obtenir un nombre pair "

B: " Obtenir un nombre impair inférieur ou égal à 3 "

C: " Obtenir un nombre pair strictement supérieur à 3 ".

D: " Obtenir un multiple de 3 ou un nombre pair ".

3. Soit E un ensemble fini et p une loi de probabilité sur E.

On considère deux parties A et B de E.

- 1) On suppose que A et B sont incompatibles prouver que $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.
- 2) Dédire que $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.
- 3) On note A_1 l'ensemble des éléments de A n'appartenant pas à B.
 - a. Vérifier que $A = A_1 \cup (A \cap B)$ et que $A \cup B = A_1 \cup B$.
 - b. Dédire que $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

L'essentiel du cours

Langage probabiliste

Lorsqu'on fait une expérience aléatoire :

- Un résultat est appelé issue.
- L'ensemble des issues possibles est appelé univers des possibles.
- Un événement est une partie de l'univers des possibles.
- Un événement qui se réduit à une seule issue est appelé événement élémentaire.
- Deux événements sont dits incompatibles, si leur intersection est vide.
- L'événement complémentaire d'un événement A est dit l'événement contraire de A.
- La réunion de deux événements A et B est dite événement A ou B.
- L'intersection de deux événements A et B est dite événement A et B.

Probabilité

Soit E l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire et $P(E)$ l'ensemble des parties de E. On appelle probabilité sur E, toute application p, de $P(E)$ dans $[0,1]$ telle que

- $p(E) = 1$;
- L'image $p(A)$ d'un événement A, est la somme des images des événements élémentaires de A;
- L'image $p(\emptyset)$ de l'ensemble vide est égale à 0.

Vocabulaire et notation

Soit $E = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire et p une probabilité sur E.

L'événement E est toujours réalisé. On dit que E est l'événement certain.

L'événement vide n'est jamais réalisé. On dit que le vide est l'événement impossible.

L'image $p(A)$ d'un événement A, est appelée probabilité de A.

La probabilité d'un événement élémentaire $\{a_i\}$ est notée $p(a_i)$.

Propriétés

Soit E un ensemble fini et p une probabilité sur E.

Soit A et B deux événements, alors

- $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ si A et B sont incompatibles.

Auto Évaluation

1. un sac contient des jetons, non identiques numérotés de 10 à 19.

une expérience aléatoire consiste à tirer un jeton du sac.

Le tableau ci-dessous donne les probabilités d'apparition des numéros.

a_i	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
p_i	0.2	0.1	0.05	0.06	0.04	0.1	0.1	0.15	0.15	0.05

Déterminer la probabilité de chacun des événements ci-dessous

1. Le chiffre obtenu est pair.
2. Le chiffre obtenu est un carré.
3. Le chiffre obtenu n'est pas un carré.
4. Le chiffre obtenu est un multiple de 3 ou un multiple de 4.
5. Le chiffre obtenu n'est ni un multiple de 3, ni un multiple de 4.

2. Dans une classe de troisième année, 35% des élèves ont 17 ans, 55% ont 18 ans et le reste ont 19 ans.

On rencontre un élève au hasard de cette classe.

Quelle est la probabilité des événements suivants.

- A : " l'élève a plus de 17 ans "
- B : " l'élève a au plus 18 ans ".

3. Dans un jeu de 40 cartes. On tire simultanément deux cartes.

Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants.

- A : " on tire deux figures "
- B : " on tire deux cartes rouges "
- C : " on tire deux figures ou deux cartes rouges ".

II. Equiprobabilité

Activités de découverte

1. Lorsque dans une expérience aléatoire toutes les issues ont la même probabilité d'apparaître, on dit qu'il y a équiprobabilité.

C'est le cas, par exemple:

- Lorsqu'on lance une pièce de monnaie bien équilibrée
- ou on jette un dé non pipé
- ou on tire au hasard une boule parmi d'autres, toutes indiscernables au toucher.

Donner deux expériences aléatoires où il y a équiprobabilité.

2. On dispose de trois urnes et de trois boules indiscernables au toucher.

Une épreuve consiste à répartir les trois boules chacune dans une urne.

1) Déterminer l'ensemble des issues de l'expérience.

2) Vérifier qu'il s'agit d'un cas d'équiprobabilité.

3. Soit E l'ensemble des issues dans une situation d'équiprobabilité et p la probabilité sur E .

On note $N = \text{card}(E)$

1) Montrer que la probabilité de tout événement élémentaire est égale à $\frac{1}{N}$

2) Montrer que la probabilité d'un événement A est égale à $\frac{\text{card}(A)}{N}$

L'essentiel du cours

Soit E l'ensemble des issues dans une situation d'équiprobabilité.

Si le cardinal de E est égal à N et si p est la probabilité sur E , on a :

- Pour tout événement élémentaire a_i , $p(a_i) = \frac{1}{N}$.
- Pour tout événement A , $p(A) = \frac{\text{card}(A)}{N}$.

Auto évaluation

1. Une usine organise un sondage, auprès de 500 de ses clients pour déterminer quels sont les produits qu'ils apprécient. On donne ci-dessous les résultats

- 200 clients apprécient le produit A et n'apprécient pas le produit B.
- 120 clients apprécient à la fois les produits A et B
- 150 clients apprécient le produit B et n'apprécient pas le produit C
- 180 clients n'apprécient ni le produit B, ni le produit C

On choisit un client au hasard parmi ceux qui ont été interrogés.

Quelle est la probabilité de chacun des événements ci-dessous.

Le client apprécie le produit A.

Le client n'apprécie pas le produit C.

Le client apprécie le produit C.

Le client apprécie le produit B.

2. Une bonbonnière contient trois caramels et sept mentholés. On prend au hasard trois bonbons. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

A: " les bonbons sont des caramels "

B: " les bonbons sont de même type "

C : " il y a au plus un mentholé "

3. entreprise fabrique des puces pour cartes téléphoniques.

On a remarqué que : 15% des puces présentent un défaut D_1 ;

24% des puces présentent un défaut D_2 ;

10% des puces présentent les deux défauts à la fois.

On choisit une puce au hasard. Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :

A: " la puce a au moins l'un des deux défauts "

B: " la puce n'a ni le défaut D_1 ni le défaut D_2 "

C : " la puce a un seul défaut "

4. On a rangé cinq paires de chaussures de couleurs différentes dans un tiroir.

On tire au hasard deux chaussures. Déterminer la probabilité de chacun des évènements

A: " les chaussures appartiennent à la même paire ";

B: " il y a un pied droit et un pied gauche".

5. On range quatre livres sur trois étagères.

1) Calculer la probabilité pour que les livres soient tous rangés sur la même étagère.

2) Calculer la probabilité pour que chaque livre soit rangé dans une étagère différente

3) Calculer la probabilité pour qu'il y ait au moins deux livres rangés sur une même étagère.

4) Calculer la probabilité pour que seulement deux livres soient rangés sur la même étagère.

III. Expériences indépendantes

Activités de découverte

On jette un dé parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 puis on lance une pièce de monnaie non truquée.

1) Quelle est la probabilité d'obtenir l'une des faces :

a. du dé ?

b. de la pièce de monnaie ?

2) Soit A un évènement réalisé lors du jet du dé et B un évènement réalisé lors du lancer de la pièce de monnaie.

La réalisation de A influe-t-elle sur celle de B ?

3) Soit E l'ensemble des issues possibles de l'expérience.

a. Déterminer et dénombrer E.

b. Quelle est la probabilité d'un évènement élémentaire de E ?

c. Comparer la probabilité obtenue avec $p(A) \times p(B)$.

L'essentiel du cours

On convient que la probabilité d'un p-uplet de résultats d'expériences aléatoires indépendantes est le produit des probabilités de chaque résultat.

Auto évaluation

1. Une urne contient deux boules blanches et huit boules rouges.

1) On tire au hasard une boule.

- Calculer la probabilité de tirer une boule blanche.
- En déduire la probabilité de tirer une boule rouge.

2) On répète l'expérience trois fois en remettant après chaque essai la boule tirée dans l'urne.

Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants

- Obtenir dans l'ordre une boule rouge, une boule blanche et une boule rouge ;
- Obtenir deux boules rouges et une boule blanche;
- La seconde boule tirée est blanche ;
- Aucune boule tirée n'est blanche ;
- La dernière boule tirée est blanche ;
- Le tirage contient au moins une boule blanche.

2. Trois élèves A, B et C travaillent indépendamment sur un problème.

La probabilité que A résolve le problème est $\frac{1}{2}$; celle de B est $\frac{1}{3}$ et celle de C est $\frac{2}{5}$.

Calculer la probabilité que le problème ne soit résolu ni par A ni par B ni par C.

En déduire la probabilité que le problème soit résolu.

3. On jette une pièce de monnaie bien équilibrée dix fois de suite.

Quelle est la probabilité d'obtenir "pile" au moins une fois ?

4. Un sac contient quatre boules : une rouge et trois vertes. On effectue au maximum deux tirages de la manière suivante: On extrait une boule de l'urne,

- si elle est rouge, on s'arrête.
- si non, on la remet et on tire une deuxième boule.

Quelle est la probabilité d'obtenir une boule rouge ?

IV. Expériences dépendantes

Activités de découverte

Un libraire dispose de six livres rares : quatre en français et deux en arabe.

1) Il vend un livre.

- Quelle est la probabilité pour que ce livre soit en français ?
- Quelle est la probabilité pour qu'il soit en arabe ?

2) Il vend un second livre.

Peut-on déterminer la probabilité pour que le second livre soit en français ?

3) On suppose que le premier livre vendu est en français.

Déterminer la probabilité pour que le second livre

- soit en français.
- soit en arabe.

4) La vente du premier livre influe-t-elle sur celle du second livre ?

5) En vendant successivement deux de ces six livres.

- Déterminer les couples de ventes possibles et leurs probabilités correspondantes.
- Comparer chaque probabilité obtenue avec le produit des probabilités des ventes respectives.

L'essentiel du cours

On considère une expérience aléatoire, constituée de n expériences aléatoires successives. Soit A_1 un événement réalisé lors de la première expérience, A_2 un événement réalisé lors de la deuxième expérience, ... et A_n est un événement réalisé lors de la $n^{\text{ème}}$ expérience. On dit que les événements sont dépendants si la réalisation de l'un influe sur la réalisation du suivant.

Soit p_1 la probabilité de A_1 , p_2 la probabilité de A_2 si A_1 se réalise, ... et p_n la probabilité de A_n si l'événement A_{n-1} se réalise. Alors la probabilité que les événements $A_1, A_2, \dots$ et A_n se réalisent successivement est égale à $p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n$.

Auto évaluation

1. Une personne est emprisonnée dans une pièce, comportant quatre portes d'apparence identiques et numérotées de 1 à 4. Seule la porte numéro 1, donne accès à l'extérieur.

Si la personne choisit la porte 1, elle peut quitter la pièce.

Si elle choisit l'une des autres portes, elle doit faire un autre essai.

1) On suppose qu'à chaque essai, la personne ne se souvient pas de l'essai précédent.

Déterminer la probabilité de chacun des événements ci-dessous:

A " La personne choisit la porte numéro 1 au premier essai".

B " La personne choisit la porte numéro 1 au deuxième essai ".

C " La personne choisit la porte numéro 1 au sixième essai "

2. Lors d'un examen, un élève doit tirer successivement et au hasard trois questions parmi 27 questions réparties de la manière suivante

9 questions d'analyse

9 questions de géométrie

4 questions de probabilité

5 questions d'arithmétique.

Calculer les probabilités des évènements ci-dessous:

- 1) L'élève tire trois questions d'analyse.
- 2) L'élève ne tire aucune question d'analyse.
- 3) L'élève tire au moins une question de probabilité et une seule question d'arithmétique.
- 4) L'élève ne tire que des questions de géométrie et de probabilité.

3. Deux joueurs participent au jeu suivant : à tour de rôle, ils tirent une boule d'une urne qui contient quatre boules rouges et deux boules noires. Les boules ne sont pas remises dans l'urne. Celui des deux joueurs qui extrait une boule rouge gagne la partie.

- 1) Quelle est la probabilité pour que le deuxième joueur gagne la partie ?
- 2) En déduire la probabilité pour que le premier joueur gagne la partie.

4. Reprendre les questions de l'activité 4 en supposant que l'urne contient quatre boules rouges et trois boules noires.

5. Une urne contient deux boules rouges et trois boules blanches.

Une expérience aléatoire consiste à tirer une boule et à la remettre dans l'urne en ajoutant une boule de la même couleur, puis enfin, à tirer une nouvelle fois une boule de l'urne.

Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants

A: " obtenir deux boules rouges ".

B: " obtenir une boule rouge et une boule blanche ".

6. Une urne contient des boules numérotées de 12 à 2007.

On tire, au hasard successivement et sans remise, deux boules de l'urne.

- a. Combien y a-t-il de boules portant un nombre impair .
- b. Quelle est la probabilité pour que le produit des nombres obtenus soit impair ?
- c. En déduire la probabilité pour que le produit des nombres obtenus soit pair.

TP1

On suppose que les moteurs des avions ont tous le même risque de tomber en panne et un moteur peut être endommagé indépendamment des autres. Un avion reste en vol si au moins la moitié de ses moteurs fonctionnent. Que préférez vous prendre, des avions à deux moteurs ou à quatre moteurs ?

Apparemment un avion à quatre moteurs est plus sécurisant, mais !

Stratégie de résolution

Soient q la probabilité qu'un moteur tombe en panne

- 1) Calculer la probabilité a qu'un avion à deux moteurs reste en vol.
- 2) Calculer la probabilité b qu'un avion à quatre moteurs reste en vol.
- 3) Etudier, suivant les valeurs de q , le signe de $b-a$.
- 4) Répondre à la question du problème.

TP2

Le père est le meilleur joueur d'échec de la famille (le père, la mère et le fils).

Le père dit à son fils " J'augmenterai ton argent de poche si tu gagnes deux parties successives sur trois que tu joueras contre ta mère et moi en changeant à chaque fois d'adversaire".

Avec qui, le fils doit commencer le jeu pour augmenter sa chance de gagner ?

Apparemment, il doit commencer avec sa mère pour éviter de jouer deux fois avec son père, mais !

Stratégie de résolution

Soient a la probabilité de vaincre le père et b la probabilité de vaincre la mère.

On a: ($b > a$)

- 1) Si le fils se décide pour l'alternative Père – Mère – Père :
Montrer que la probabilité p de gagner est $p = aba + ab(1-a) + (1-a)ba = ab(2-a)$
- 2) Si le fils se décide pour l'alternative Mère – Père – Mère :
Montrer que la probabilité q de gagner est $q = bab + ba(1-b) + (1-b)ab = ab(2-b)$
- 3) Montrer que $p > q$.

Commentaire :

Effectivement le fils a intérêt à commencer avec son père parce qu'il doit nécessairement gagner la deuxième partie pour gagner l'offre de son père donc il vaut mieux la jouer avec sa mère.

On dispose d'une urne contenant m boules blanches ($m \geq 2$) et n boules noires ($n \geq 2$) indiscernables au toucher. Une épreuve consiste à tirer successivement deux boules au hasard et à noter leurs couleurs.

Soit A l'évènement " Les deux boules tirées sont de même couleur".

1) Elaborer un programme permettant :

- la saisie de m et n et le type de tirage (avec remise ou sans remise).
- le calcul de la probabilité p de A ,
- l'affichage du résultat.

2) Fixer $m = 50$ et faire varier n entre 2 et 100.

Déterminer, pour chaque type de tirage, la valeur de n pour laquelle p est plus proche de 0.5.

Exercices et problèmes

1 Un enfant joue avec des objets de différentes couleurs, répartis de la façon suivante :

Couleur	tout rouge	tout vert	tout bleu	bleu et rouge	vert et bleu
nombre d'objets	3	5	6	2	4

L'enfant prend un objet au hasard. Il dit que l'objet est rouge s'il est rouge ou il contient du rouge ; de même pour les autres couleurs.

Déterminer les probabilités des évènements suivants :

A : "prendre un objet rouge ";

B : " prendre un objet bleu ";

C : "prendre un objet bleu et rouge ";

D : " prendre un objet bleu ou rouge ".

E : " prendre un objet ni rouge ni bleu ";

F : " prendre un objet qui n'est pas rouge".

2 Dans un texte on a relevé la longueur des mots : 12% des mots ont une seule lettre, 18% ont deux lettres, 9% ont trois lettres, 17% ont quatre lettres, 16% ont cinq lettres.

On considère un mot quelconque de ce texte.

a. Calculer la probabilité pour que le mot ait moins de cinq lettres.

b. En déduire la probabilité pour que le mot ait au moins cinq lettres.

3 Vingt bijoux sont emballés de la même manière : 7 montres , 7 colliers, 3 bracelets, 3 bagues. On prend simultanément et au hasard quatre bijoux.

Quelle est la probabilité de chacun des évènements suivants:

- A: " obtenir un bijou de chaque sorte "
- B: " les quatre bijoux sont de même nature " .
- C: " obtenir les trois bagues " .
- D: " obtenir au moins un collier " .

4 Un sac contient trois boules rouges, quatre boules bleues et cinq boules jaunes, indiscernables au toucher. On extrait, au hasard, trois boules du sac.

Quelle est la probabilité de chacun des évènements suivants:

- A: " les trois boules sont jaunes " .
- B: " il n'y a aucune boule rouge " .
- C: " avoir au moins une boule rouge " .
- D: " les trois boules sont de couleurs différentes " .

5 Deux voitures V et W se présentent à une aire de péage comportant trois voies de passage ouvertes numérotées de gauche à droite 1, 2, 3. On suppose qu'elles s'engagent au hasard dans des voies de passage différentes.

Calculer la probabilité des évènements suivants :

- A: " les deux voitures sont côte à côte " .
- B: " les deux voitures ne sont pas côte à côte " .
- C: " la voie numéro 3 reste libre " .
- D: " la voiture V passe à gauche de la voiture W " .

6 Un feu tricolore a les caractéristiques suivantes:

Les feux rouge et vert durent 24 secondes mais l'orangé ne dure que 12 secondes.

Un conducteur suit une route comportant deux feux successifs indépendants l'un de l'autre qui possède les caractéristiques précédentes.

Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants:

- A: " le conducteur rencontre deux feux rouges " .
- B: " le conducteur rencontre un feu vert et un feu rouge " .
- C: " le conducteur ne s'arrête à aucun des deux feux " .

7 Un marchand de glaces propose six arômes distincts pour des glaces en cornet, trois enfants choisissent un des arômes proposés .Déterminer la probabilité des événements suivants:

- A: " ils choisissent des arômes deux à deux distincts " .
- B: " un arôme et un seul est choisi par les trois enfants " .
- C: " deux arômes et deux seulement sont choisis par les trois enfants " .

Remarque : la probabilité de C peut être calculée de façon directe ou indirecte.

8 Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher : deux boules rouges et trois boules blanches. On tire simultanément trois boules de l'urne.

On désigne par n le nombre de boules blanches tirées.

1) Quelles sont les valeurs possibles de n ?

2) Soit l'événement A_n : "le nombre de boules blanches tirées est n ".

Pour chaque valeur de n trouvé en 1) déterminer la probabilité pour que A_n soit réalisé.

9 On dispose d'une urne contenant deux boules blanches et cinq rouges .

On tire successivement sans remise quatre boules de l'urne et on désigne par n le rang de la première boule rouge tirée.

1) Quelles sont les valeurs possibles de n ?

2) On désigne par R_n l'événement " le rang de la première boule rouge tirée est n ."

Pour chaque valeur de n trouvée en 1) déterminer la probabilité pour que R_n soit réalisé.

10 Dans un lycée, 40% des élèves ont déclaré aimer l'étude de sciences informatiques, 55% des mathématiques et 15% des sciences informatiques et des mathématiques.

On prend un élève au hasard, quelle est la probabilité pour qu'il :

- a. aime les sciences informatiques, mais pas les mathématiques.
- b. aime les mathématiques, mais pas les sciences informatiques
- c. n'aime ni les mathématiques ni les sciences informatiques.

11 On considère une urne contenant dix boules indiscernables au toucher : sept jaunes et trois rouges.

Montrer que la probabilité de tirer simultanément deux boules rouges est supérieure à celle de les tirer successivement et avec remise.

12 Dans une urne, il y a trois boules blanches, trois boules noires et quatre boules vertes.

On tire simultanément trois boules de l'urne.

Quelle est la probabilité de tirer :

- a. trois boules de la même couleur ;
- b. une boule de chaque couleur ;
- c. trois boules de deux couleurs différentes.

13 On effectue une permutation des jetons ci-dessous :

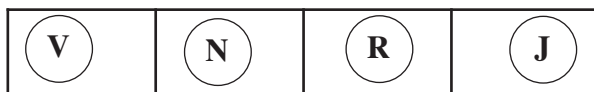


1) Déterminer la probabilité des événements suivants :

A: " un seul jeton est à sa place "

B: " aucun jeton n'est à sa place "

2) On effectue maintenant une permutation des jetons ci-dessous:



Déterminer la probabilité des événements suivants :

- A: " un seul jeton est à sa place " .
B: " deux jetons seulement sont à leurs places "
C: " aucun jeton n'est à sa place " .

14 Une boîte contient cinq jetons rouges et cinq jetons verts. Dans chaque couleur, les jetons sont numérotés 1, 2, 3, 4 et 5. On tire au hasard et simultanément cinq jetons.

a. Calculer la probabilité des événements suivants :

- A: " les jetons sont de même couleur " .
B: " avoir trois jetons blancs et deux jetons rouges " .
C: " les numéros des jetons sont deux à deux distincts " .

b. Calculer la probabilité pour que les cinq jetons satisfassent à la fois aux deux conditions suivantes :

- un jeton, et un seul, porte le numéro 1.
- quatre jetons, et quatre seulement, sont verts

15 Quatre élèves E, F, G et H laissent leurs livres de math sur le bureau du professeur. Celui-ci leur remet les livres au hasard.

Calculer la probabilité des événements suivants :

- A: "chaque élève retrouve son livre " .
B: " deux élèves seulement retrouvent leurs livres " .
C: "l'élève E seulement reçoit son livre" .
D: " Aucun élève ne reçoit son livre " .

16 Une urne contient huit boules : trois rouges où on a inscrit sur chacune d'elles -1 ; quatre vertes numérotées 1, 1, 1, 1 et une orange numérotée par 2 . On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne.

1) Déterminer la probabilité des événements suivants

- A: " la somme des nombres obtenus est égale à (- 2) " .
B: " la somme des nombres obtenus est égale à (-1) " .
C: " la somme des nombres obtenus est nulle " .
D: "la somme des nombres obtenus est égale à 1 " .
E: "la somme des nombres obtenus est égale à 2 " .
F: " somme des nombres obtenus est égale à 3 " .

2) Vérifier que $P(A) + P(B) + P(C) + P(D) + P(E) + P(F) = 1$ et justifier l'égalité.

17 Une première boîte contient deux jetons rouge numérotés 1, 2, et une seconde boîte contient trois jetons blancs numérotés 0, 1, 2. On tire un jeton de la première boîte puis un second jeton de la deuxième boîte. Soit p le produit des deux nombres obtenus.

1) Montrer que $p \in \{0, 1, 2, 4\}$.

2) a. Calculer, pour chaque valeur possible de p , la probabilité de l'événement

A_p : " le produit des deux numéros obtenus est p ".

b. Calculer $P(A_0) + P(A_1) + P(A_2) + P(A_4)$ et justifier le résultat obtenu.

18 Une usine produit des ordinateurs dont 3% présentent des défauts. En vue d'un contrôle de qualité, on constitue au hasard un échantillon de cinquante ordinateurs tirés de la production. La production est assez importante pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de cinquante ordinateurs.

Calculer la probabilité que l'échantillon contienne :

a. aucun ordinateur défectueux;

b. un seul ordinateur défectueux;

c. au moins un ordinateur défectueux.

19 Une famille de cinq enfants : deux filles et trois garçons.

La maman est tombée malade pendant 7 jours. Au cours de cette période, les enfants décident de ne faire la vaisselle qu'une fois par jour.

Chaque jour, ils tirent au sort qui fera la vaisselle.

Calculer la probabilité des événements suivants :

A : " aucun garçon ne fait la vaisselle pendant les 7 jours "

B : " au moins une fille fait la vaisselle pendant les 7 jours ".

20 Une urne contient deux boules blanches et trois boules noires.

1) On tire au hasard et successivement deux boules sans remise

A : " obtenir une boule noire puis une boule blanche "

B : " obtenir une boule blanche puis une boule noire "

2) On tire une première boule et on ne la remet pas dans l'urne :

• Si elle est une blanche, on ajoute une boule noire dans l'urne.

• Si elle est noire, on ajoute deux boules blanches dans l'urne et on tire une deuxième boule.

Calculer la probabilité des événements suivants :

A' : " obtenir dans l'ordre une boule blanche, une boule noire "

B' : " obtenir dans l'ordre une boule noire, une boule blanche ".

Le premier auteur à jeter les bases de la théorie des probabilités fut **Girolamo Cardano** Médecin, inventeur et astrologue italien 1501-1576. En effet, il exposa le concept mathématique d'anticipation, il expliqua les lois de la répétition des événements, et, enfin, il définit formellement la notion de probabilité comme une fréquence relative.

En 1654, Antoine Gombauld, posa une énigme à **Blaise Pascal** (Philosophe, auteur des célèbres *Pensées*, mathématicien et physicien, français 1623-1662). Il s'agissait de savoir " comment répartir entre deux joueurs l'enjeu d'un jeu de hasard, lorsque celui-ci est inachevé et qu'un des joueurs a l'avantage sur l'autre ". B. Pascal se tourna vers un mathématicien très connu au XVII^e siècle, **Pierre Fermat** (français, 1601-1665). Les travaux de ces deux mathématiciens constituent les fondements mathématiques de la théorie moderne des probabilités en étudiant des problèmes de jeux et d'espérance de gain. Ce furent sans doute les travaux les plus marquants en matière de probabilité qu'ait connus le XVII^e siècle, même si **Christian Huygens** (hollandais, 1629-1695) proposa le concept de compétition dans les jeux de chance.

Ensuite, au début du XVIII^e siècle, **Jean Bernoulli** (suisse, 1667-1748) énonça pour la première fois de façon rigoureuse les concepts de permutation et de combinaison. De son oeuvre dérive la définition classique des probabilités. De plus, son frère, Jacques Bernoulli, définit la loi des grands nombres. En outre, en 1738, le fils de Jean Bernoulli, Daniel " définit le processus par lequel les individus font des choix et prennent des décisions ".

Une autre avancée a également été cruciale : c'est celle d'un mathématicien français **Abraham de Moivre** (anglais, 1667-1754). En effet, à côté des travaux sur les combinaisons, les permutations, l'analyse de jeux de cartes et l'énoncé du premier théorème limite en probabilité, en 1733, de Moivre découvrit la structure de la loi normale, ainsi que le concept d'écart type.

Cardano



Blaise



Fermat



Huygens



Bernoulli



De Moivre

