

REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION

MATHÉMATIQUES

3ème année de l'enseignement secondaire

Section : Sciences expérimentales

TOME 2

Hikma Smida

Professeur universitaire

Ali Béji Hammas

Inspecteur

Imène Ghedamsi

Assistante universitaire

Leïla Ben Youssef

Professeur du secondaire

Néjiba Mhamdi

Inspectrice

Ridha Ben Saad

Inspecteur

Béchir Labidi

Inspecteur

Evaluateurs

Belhassen Dehman

Professeur universitaire

Khédija Ben Messaoud

Inspecteur principal

Ali Rahmouni

Inspecteur principal

Centre National Pédagogique

Remerciements

Madame Khédija BEN MESSAOUD, Messieurs Abdennebi ACHOUR, Belhassen DEHMAN et Ali RAHMOUNI ont évalué ce manuel. Nous remercions tous les membres de cette équipe pour leurs critiques, leurs conseils pertinents et leurs modifications judicieuses.

Messieurs Taoufik CHARRADA, Ali AZIZI, Nebil MZIOU et Mourad ARBI ont lu ce manuel. Nous remercions tous les membres de cette équipe pour leurs remarques judicieuses.

Monsieur Abderrazek BERREZIGUE a contribué à l'élaboration des figures proposées dans ce manuel. Nous remercions Monsieur BERREZIGUE pour sa gentillesse et sa disponibilité.

La mise en page de ce manuel est l'œuvre de l'équipe d'édition du CNP. Nous remercions tous les membres de cette équipe pour leur grande compétence et leur patience.

Les auteurs

Ce manuel comprend onze chapitres. Chaque chapitre comprend six rubriques.

Pour commencer

Cette rubrique vise à permettre aux élèves de consolider leurs acquis antérieurs.

Cours

Cette rubrique comprend :

- *des activités visant à permettre aux élèves de développer leur capacité à chercher, à expérimenter, à modéliser, à conjecturer et à démontrer,*
- *les résultats du cours à retenir.*

QCM - Vrai ou faux

La rubrique QCM vise à permettre à l'élève de faire sa propre évaluation.

La rubrique Vrai ou faux vise à l'apprentissage progressif des règles logiques.

Mobiliser ses compétences

Cette rubrique est consacrée à la résolution de problèmes, pour la plupart intégratifs, dans des situations mathématiques ou en rapport avec l'environnement.

Exercices et problèmes

Cette rubrique comprend deux parties.

- *Une partie qui comporte des exercices et problèmes visant à permettre aux élèves de mobiliser leurs compétences de façon autonome.*
- *Une partie Avec l'ordinateur, qui vise à permettre aux élèves d'utiliser un logiciel numérique ou géométrique pour chercher, expérimenter ou contrôler un résultat.*

Math-culture

Cette rubrique propose des éléments d'histoire des mathématiques et des éléments sur la contribution des mathématiques à la compréhension des phénomènes.

Sommaire

Chapitre 1	Produit scalaire dans le plan	5
Chapitre 2	Angles orientés	25
Chapitre 3	Trigonométrie	49
Chapitre 4	Nombres complexes	70
Chapitre 5	Vecteurs de l'espace	88
Chapitre 6	Produit scalaire dans l'espace	108
Chapitre 7	Equations de droites et de plans	124
Chapitre 8	Dénombrement	140
Chapitre 9	Statistiques	157
Chapitre 10	Probabilités	186

Chapitre 1

Produit scalaire dans le plan

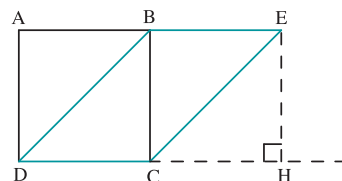
" J'aimais et j'aime encore les mathématiques pour elles-mêmes comme n'admettant pas l'hypocrisie et le vague, mes deux bêtes d'aversion. "

Stendhal

Pour commencer

Activité 1

Dans la figure ci-contre, ABCD est un carré de côté a , BECD est un parallélogramme et H est le projeté orthogonal de E sur la droite (DC).

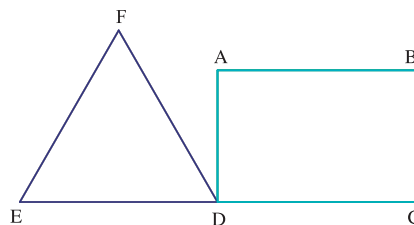


1. Calculer en fonction de a les réels $\|\overrightarrow{DB}\|$; $\|\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BC}\|$.
2. Calculer $\cos \widehat{BDC}$ et $\cos \widehat{EDH}$.
3. Calculer $\|\overrightarrow{DB}\| \|\overrightarrow{DC}\| \cos \widehat{BDC}$ et $\|\overrightarrow{DE}\| \|\overrightarrow{DC}\| \cos \widehat{EDC}$.

Activité 2

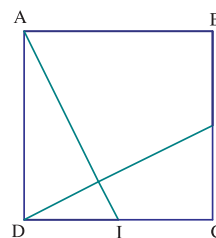
Dans la figure ci-contre, ABCD est un rectangle EFD est un triangle équilatéral et E, D et C sont alignés.

Déterminer le signe de $\cos \widehat{CDF}$, $\cos \widehat{BDF}$ et $\cos \widehat{AEF}$.



Activité 3

Dans la figure ci-contre, ABCD est un carré, I et J sont les milieux respectifs des segments [CD] et [BC]. Montrer que les droites (AI) et (DJ) sont perpendiculaires.



1. Produit scalaire

1.1 Définition

Activité 1

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

Soit O, A et B des points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

Soit O', A' et B' des points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{O'A'}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{O'B'}$.

Montrer que $\widehat{AOB} = \widehat{A'O'B'}$.

Définition

Soit O un point du plan et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

On désigne par A et B les points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on note $\vec{u} \cdot \vec{v}$, le réel ainsi défini

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = OA \cdot OB \cdot \cos \widehat{AOB}$, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul.

Conséquence

Pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.

Activité 2

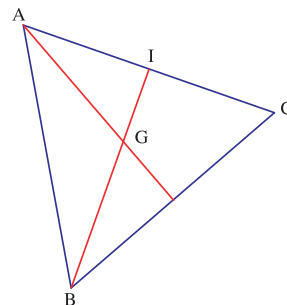
Soit ABC un triangle équilatéral de côté 4 et de centre G.

On désigne par I le milieu du côté [AC].

Calculer les produits scalaires ci-dessous.

$\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{CI}$; $\overrightarrow{IG} \cdot \overrightarrow{AI}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BI}$;

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$; $\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC}$; $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AI}$.



1. 2 Propriétés du produit scalaire

Activité 1

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et O, A et B trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.
Montrer la propriété ci-dessous.

Propriété

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

Activité 2

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et O, A et B trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

On se propose de montrer que pour tout réel α , $(\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v})$.

Soit α un réel et C le point tel que $\alpha \vec{u} = \overrightarrow{OC}$.

1. On suppose que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls et que α est strictement positif.

Justifier que $\cos \widehat{AOB} = \cos \widehat{COB}$. Conclure.

2. On suppose que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls et que α est strictement négatif.

Montrer que $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} = -\alpha OA \cdot OB \cos(\pi - \widehat{AOB})$. Conclure.

3. En déduire que pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et tout réel α , on a $(\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v})$.

4. Montrer que pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et tous réels α et β , on a

$$\vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v}) \text{ et } (\alpha \vec{u}) \cdot (\beta \vec{v}) = \alpha \beta (\vec{u} \cdot \vec{v}).$$

Propriétés

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tous réels α et β ,

$$(\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v}), \quad \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v}), \quad (\alpha \vec{u}) \cdot (\beta \vec{v}) = \alpha \beta (\vec{u} \cdot \vec{v}).$$

Activité 3

On considère un parallélogramme OACB.

On note $\widehat{AOB} = \theta$.

1. On désigne par H le projeté orthogonal de B sur (OA).

a. Exprimer OH et BH à l'aide de OB et θ .

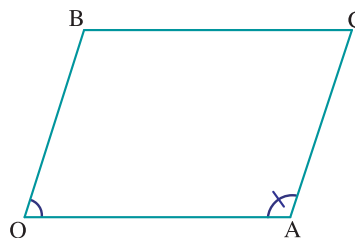
b. Exprimer AH à l'aide de OB, OA et θ .

2. Montrer que $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos \theta$.

3. Montrer que $OC^2 = OA^2 + OB^2 + 2OA \cdot OB \cos \theta$.

4. Montrer que $OC^2 + AB^2 = 2(OA^2 + OB^2)$.

On a donc obtenu les propriétés ci-dessous.



Propriétés

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}.$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}.$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2).$$

Activité 4

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de même norme.

Soit O, A, B et C quatre points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$.

On suppose que $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{3}$, $\widehat{BOC} = \frac{\pi}{4}$ et $\widehat{AOC} = \frac{\pi}{12}$.

Calculer puis comparer $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.

Le résultat qu'on vient de trouver est une propriété du produit scalaire valable pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Propriété

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.

Activité 5

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs tels que $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2$, $\vec{u} \cdot \vec{w} = 1$ et $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0,5$.

1. Calculer $(2\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w}$ et $-\vec{v} \cdot (\vec{u} - \vec{w})$.

2. Calculer $\vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{w}) + \vec{v} \cdot (\vec{w} - \vec{u}) + \vec{w} \cdot (\vec{u} - \vec{v})$.

Activité 6

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

Soit O, A et B trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

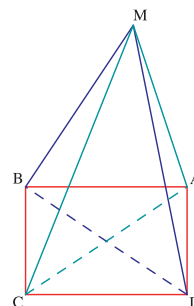
On suppose que $OA = 2$, $OB = 3$ et $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{6}$.

Calculer $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$, $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2$ et $(2\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - 3\vec{v})$.

Activité 7

Soit M un point du plan.

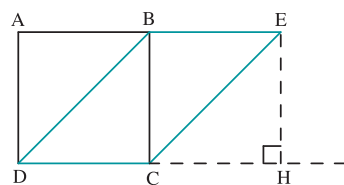
Montrer que la somme des carrés des distances de M à deux sommets opposés d'un rectangle est égale à la somme des carrés des distances de M aux deux autres sommets.



1.3 Vecteurs orthogonaux

Activité 1

Dans la figure ci-contre, $ABCD$ et $BCHE$ sont des carrés.
Calculer $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{HC}$; $\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AC}$.



Définition

Deux vecteurs sont dits orthogonaux si leur produit scalaire est nul et on note $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Conséquence

Deux droites sont perpendiculaires, si et seulement si, le produit scalaire de leurs vecteurs directeurs est nul.

Activité 2

Soit A et B deux points distincts.

1. Déterminer et représenter l'ensemble des points M du plan tel que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$.
2. Déterminer et représenter l'ensemble des points M du plan tel que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

1.4 Produit scalaire et projection orthogonale

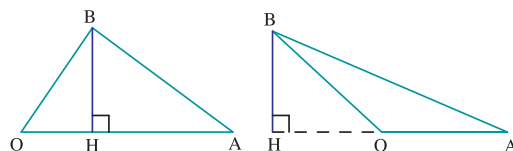
Activité 1

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

Soit O, A et B trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

On désigne par H le projeté orthogonal de B sur (OA).

Montrer que $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$.



Propriété

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et O, A et B des points tels $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

Si H est le projeté orthogonal de B sur la droite (AO), alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$.

Activité 2

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

On désigne par O, A, B et C quatre points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$.

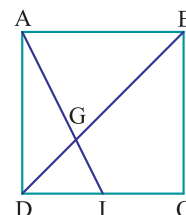
On désigne par H et K les projetés orthogonaux respectifs de B et C sur la droite (OA).

Montrer que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{HK}$.

Activité 3

Soit ABCD un carré de côté 3, I le milieu de [DC] et G le point d'intersection de [BD] et [AI].

1. a. Calculer AI, GB, GD, GA et GI.
b. En déduire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{DG} \cdot \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GD}$.
2. a. Calculer $\cos \widehat{IAB}$ et $\cos \widehat{DGI}$.
b. En déduire une valeur approchée à 10^{-2} près en radians de $\widehat{IAB}$ et $\widehat{DGI}$.



1. 5 Vecteurs colinéaires

Activité 1

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

Soit O, A et B trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

1. Montrer que $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $\cos \widehat{AOB}$ pour que O, A et B soient alignés.

Propriété

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \text{ (Inégalité de Cauchy-Schwarz).}$$

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|, \text{ si et seulement si, les vecteurs } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires.}$$

Activité 2

Soit A et B deux points tels que $AB = 5$.

Soit M un point du plan n'appartenant pas à (AB) et H son projeté orthogonal sur (AB).

Construire M dans chacun des cas ci-dessous.

- a. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = 10$;
- b. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = -5$.

Activité 3

Soit A et B deux points distincts.

1. Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = AB \times AM$.
2. Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -AB \times AM$.

1. 6 Expression analytique du produit scalaire dans une base orthonormée

Activité 1

Dans l'ensemble des vecteurs du plan muni d'une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, on considère les vecteurs $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$.

1. Exprimer à l'aide de x et y chacun des réels $\vec{u} \cdot \vec{i}$, $\vec{u} \cdot \vec{j}$ et $\|\vec{u}\|$.
2. Exprimer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ à l'aide de x, y, x' et y'.

Théorème

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée de l'ensemble des vecteurs du plan.

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de composantes respectives (x, y) et (x', y'), $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

Activité 2

Soit ABCD un carré de côté $a > 1$ et E le point à l'intérieur du carré tel que EAB est un triangle équilatéral.

On désigne par I et J les points des segments respectifs [AB] et [AD] tels que $AI = AJ = 1$.

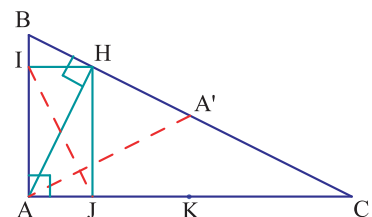
1. Déterminer les coordonnées des points A, B, C, D et E dans le repère $(A, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ})$.
2. Calculer en fonction de a, les réels $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{EB}$.

Activité 3

Dans la figure ci-contre, $AB = 1$ et ABC est un triangle rectangle en A tel que $AC = 2 AB$.

On désigne par A' et K les milieux respectifs de [BC] et [AC] et par H, I et J les projetés orthogonaux respectifs de A sur (BC), de H sur (AB) et de H sur (AC).

1. Déterminer les coordonnées des points A, B, C, K et A' dans le repère $(A, \overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AB})$.
2. Déterminer une équation de la droite (AH).
3. Déterminer les coordonnées du point H puis des points I et J.
4. Calculer $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{IJ}$ et en déduire les positions relatives des droites (AA') et (IJ).



2. Lignes de niveau

Activité 1

Soit A et B deux points du plan et soit f l'application du plan dans $\mathbb{R}$ définie par $f(M) = \overline{AM} \cdot \overline{AB}$.

1. Déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant $f(M) = 0$.
2. On suppose que $AB = 2$.
 - a. Placer le point H de la droite (AB) tel que $\overline{AH} \cdot \overline{AB} = -1.5$.
 - b. Montrer que l'ensemble des points M du plan tels que $f(M) = -1.5$ est la droite perpendiculaire à (AB) passant par le point H.

Activité 2

Soit A et B deux points du plan, et g l'application du plan dans $\mathbb{R}$ définie par $g(M) = \overline{MA} \cdot \overline{MB}$.

1. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $g(M) = 0$.
2. Soit I le milieu de [AB].
 - a. Montrer que $g(M) = IM^2 - IA^2$.
 - b. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = 12$.

Activité 3

Soient A et B deux points du plan, I le milieu de [AB], k un réel et (F) l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 = k$.

1. Déterminer (F) lorsque $k = 0$.
2. Montrer que pour tout point M du plan, on a $MA^2 - MB^2 = 2\overline{IM} \cdot \overline{AB}$.
3. Déterminer (F) lorsque $k = -2$ et $AB = 2$.

Activité 4

Soit A et B deux points du plan, I le milieu de [AB] et h l'application du plan dans $\mathbb{R}$ définie par $h(M) = MA^2 + MB^2$.

1. Montrer que pour tout point M du plan, on a $h(M) = 2IM^2 + \frac{AB^2}{2}$.
2. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que $h(M) = AB^2$.

Activité 5

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(-1, 2)$ et $B(2, 3)$.

On se propose de déterminer l'ensemble des points M du plan tel que $MA^2 - 3MB^2 = -2$.

1. Montrer que $MA^2 - 3MB^2 = (\overrightarrow{MA} - \sqrt{3}\overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \sqrt{3}\overrightarrow{MB})$.
2. On désigne par G le barycentre des points pondérés $(A, 1)$ et $(B, -\sqrt{3})$, par G' le barycentre des points pondérés $(A, 1)$ et $(B, \sqrt{3})$.
 - a. Montrer que $(\overrightarrow{MA} - \sqrt{3}\overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \sqrt{3}\overrightarrow{MB}) = -2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MG'}$.
 - b. En déduire l'ensemble des points M du plan tel que $MA^2 - 3MB^2 = -2$.

3. Produit scalaire et configurations

Activité 1 (Les hauteurs d'un triangle)

Soient A, B, C et H quatre points du plan.

1. Montrer que $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.
2. Montrer que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Activité 2 (Théorème de la médiane)

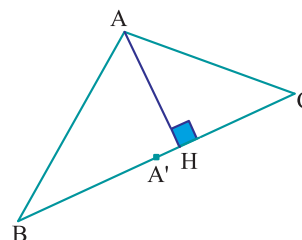
On considère un triangle ABC et on désigne par A' le milieu du segment $[BC]$.

1. a. Montrer que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA'} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AA'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.
b. En déduire que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AA'^2 - \frac{1}{4}BC^2$.
2. Soit un triangle ABC tel que $AC = 2$, $BC = 4$, $AA' = 1.5$ et K est le pied de la hauteur issue de B .
 - a. Calculer AK , BK et AB .
 - b. Donner une valeur approchée en radians à 10^{-1} près de $\widehat{ABC}$.

Activité 3

On considère un triangle ABC et on désigne par H le pied de la hauteur issue de A et par A' le milieu de $[BC]$.

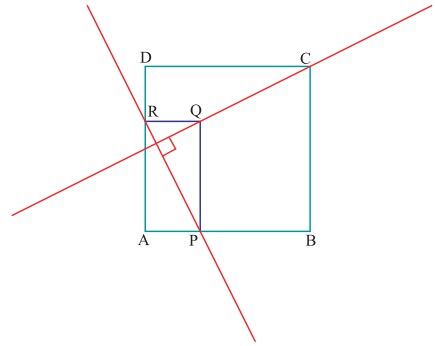
1. Vérifier que $AB^2 - AC^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AC})$.
2. En déduire que $AB^2 - AC^2 = 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{A'H}$.



Activité 4

Dans la figure ci-contre, ABCD est un carré et APQR est un rectangle tel que P est sur le côté [AB], R est sur le côté [AD] et $AP = DR$.

Montrer que (PR) et (CQ) sont perpendiculaires.



Activité 5

Soit ABCD un carré de côté 6, I et J les points définis respectivement par

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}.$$

On désigne par K le point d'intersection des droites (ID) et (JC).

1. a. Faire une figure.
b. Montrer que les droites (ID) et (JC) sont perpendiculaires.
2. a. En utilisant un produit scalaire, montrer que $DK \times DI = \frac{1}{3}DA^2$.
b. Calculer DK.
3. Soit L le projeté orthogonal de A sur la droite (DI).
a. Calculer IL, puis LK.
b. En déduire une construction d'un carré de côté $\frac{6}{5}\sqrt{10}$.

Activité 6 (Projection orthogonale)

Soit O et A deux points du plan tels que $OA = 1$.

Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M du plan associe le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = (\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OA}) \overrightarrow{OA}$.

1. Déterminer f(O) et f(A).
2. Montrer que pour tout point M du plan, le point M' appartient à (OA).
3. Que peut-on dire de l'image d'un point de (OA) ?
4. Montrer que pour tout point M, les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont orthogonaux.
5. En déduire la nature de f.

Situation 1 Droite et cercle d'Euler

Soit un triangle ABC. On désigne par $\mathcal{C}$ son cercle circonscrit, de centre O et de rayon r, et par G son centre de gravité.

I. Droite d'Euler

Soit H le point tel que $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

On se propose de montrer que O, H et G sont situés sur une même droite appelée droite d'Euler.

1. a. Calculer $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC}$.
b. En déduire que H est l'orthocentre du triangle ABC.
2. Montrer que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ et en déduire que les points O, H et G sont alignés.

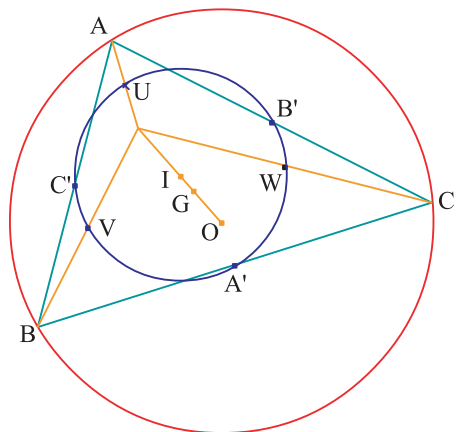
II. Cercle d'Euler

On désigne par A', B' et C' les milieux respectifs des côtés [BC], [AC] et [BA], par P, Q et R les pieds des hauteurs issues respectivement de A, B et C, par U, V et W les milieux respectifs de [AH], [BH] et [CH].

On se propose de montrer que les points A', B', C', P, Q, R, U, V et W sont situés sur un même cercle appelé cercle d'Euler.

On désigne par I le milieu de [OH].

1. a. Calculer $\overrightarrow{IU} \cdot \overrightarrow{IA'}$.
b. Montrer que U et A' appartiennent au cercle $\mathcal{C}'$ de centre I et de rayon $\frac{r}{2}$ et que U et A' sont diamétralement opposés sur $\mathcal{C}'$.
c. Calculer $\overrightarrow{PU} \cdot \overrightarrow{PA'}$ et en déduire que P appartient au cercle $\mathcal{C}'$.
2. Procéder de même que dans 1. pour montrer que V, B' et Q appartiennent à $\mathcal{C}'$ et que W, C' et R appartiennent à $\mathcal{C}'$.



Situation 2 Astroïde

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on désigne par $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1. Soit M un point de $\mathcal{C}$ et P et Q les projetés orthogonaux de M respectivement sur $(O, \vec{i})$ et $(O, \vec{j})$.

1. Montrer que $PQ = 1$ et que $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PM} = OQ^2$.
2. On désigne par M' le projeté orthogonal de M sur (QP) .

Lorsque M décrit le cercle $\mathcal{C}$, le point M' décrit une courbe appelée astroïde.

On désigne par (x, y) les coordonnées de M .

Montrer que M' a pour coordonnées (x^3, y^3) .

QCM – VRAI – FAUX

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. On considère un triangle équilatéral ABC de côté a. Le réel $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ est égal à

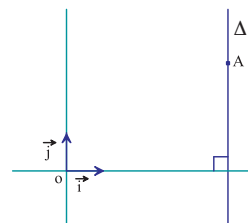
- ☐ $\frac{a^2}{2}$ ☐ 0 ☐ a.

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on considère un point H appartenant à la droite (OI) et un point K appartenant à la droite (OJ). Le réel $\overline{OH} \cdot \overline{OK}$ est égal à

- ☐ HK^2 ☐ $OH \times OK$ ☐ 0.

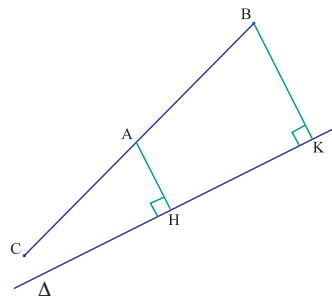
3. Dans la figure ci-contre, $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé, A est un point de la droite Δ . Tout point M de la droite Δ vérifie

- ☐ $\overline{AM} \cdot \vec{j} = AM$ ☐ $\overline{AM} \cdot \vec{i} = 0$ ☐ $\overline{AM} \cdot (\vec{i} + \vec{j}) = -AM$.



4. Dans la figure ci-contre, A, B et C sont trois points tels que $AB = 2$, $AC = 3$, H et K sont les projetés orthogonaux respectifs de A et B sur Δ . Le réel $\overline{HK} \cdot \overline{AC}$ est égal à

- ☐ 6 ☐ 5 ☐ -6.



VRAI - FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

- Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux alors $\vec{u} = \vec{0}$.
- Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, on considère un vecteur $\vec{u}$ de composantes $(1, -2)$. Alors il existe un unique vecteur $\vec{v}$ vérifiant $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- Pour que $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$ il faut que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient de composantes (x, y) et (x', y') dans une base orthonormée.
- Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux et les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
- Pour que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires il suffit que $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

Exercice 1

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs.

On se propose de montrer que $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.

1. a. Montrer en utilisant la règle du parallélogramme que

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 4(\vec{u} \cdot \vec{v}).$$

b. En déduire que

$$8(\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}) = 2(\|\vec{v} + \vec{u}\|^2 + \|\vec{w} + \vec{u}\|^2) - 2(\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 + \|\vec{w} - \vec{u}\|^2).$$

2. Utiliser la règle du parallélogramme pour montrer que

$$8(\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}) = (\|\vec{v} + \vec{w} + 2\vec{u}\|^2 + \|\vec{v} - \vec{w}\|^2) - (\|\vec{v} + \vec{w} - 2\vec{u}\|^2 + \|\vec{v} - \vec{w}\|^2).$$

3. En déduire que $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.

Exercice 2

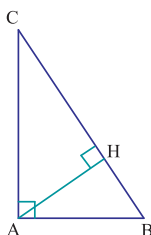
On considère un triangle ABC

rectangle en A et on désigne par

H le pied de la hauteur issue de A.

1. Vérifier que $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = AH^2 - HB \cdot HC$.

2. En déduire que $AH^2 = HB \cdot HC$.

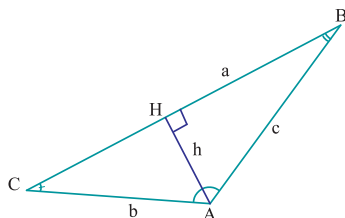


Exercice 3

Montrer que dans tout triangle, la somme des carrés des côtés est égale aux $\frac{4}{3}$ de la somme des carrés des médianes.

Exercice 4 La règle du sinus

On considère un triangle ABC et on désigne par H le pied de la hauteur issue de A.



On note $AH = h$, $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$.

1. a. Montrer que $\overline{AB} \cdot \overline{AH} = \overline{AC} \cdot \overline{AH}$.

b. En déduire que $c \sin \hat{B} = b \sin \hat{C}$.

2. Montrer que $\frac{c}{\sin \hat{C}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{a}{\sin \hat{A}}$.

Exercice 5

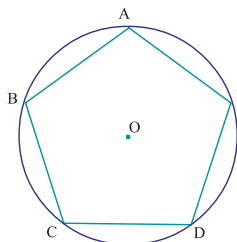
Soit un triangle ABC.

1. Montrer que $\overline{BA} \cdot \overline{BC} + \overline{CA} \cdot \overline{CB} = BC^2$.

2. En déduire que $BC = AB \cos \hat{B} + AC \cos \hat{C}$.

Exercice 6

Dans la figure ci-dessous, ABCDE est un pentagone régulier de centre O.



1. Calculer en fonction de OA

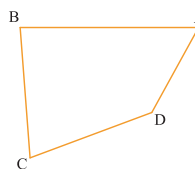
$\overline{OA} \cdot \overline{OB}$, $\overline{OA} \cdot \overline{OE}$, $\overline{OA} \cdot \overline{OC}$.

2. Calculer en fonction de AB,

$\overline{AB} \cdot \overline{AE}$, $\overline{AB} \cdot \overline{ED}$, $\overline{AB} \cdot \overline{AD}$, $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$.

Exercice 7

On considère un quadrilatère ABCD.



1. a. Montrer que $AB^2 - BC^2 = \overline{AC} \cdot (\overline{AB} - \overline{BC})$.

b. Montrer que $DC^2 - AD^2 = \overline{AC} \cdot (\overline{DC} - \overline{AD})$.

2. En déduire que $AB^2 + CD^2 - BC^2 - AD^2 = 2\overline{AC} \cdot \overline{DB}$.

Exercice 8

Soit un triangle ABC rectangle et isocèle en A.

On désigne par M et N deux points du plan tels que

$\overline{AM} = -3\overline{AB}$ et $\overline{AN} = -3\overline{AC}$.

On désigne par I le milieu du segment [BN].

1. Vérifier que $\overline{AB} + \overline{AN} = 2\overline{AI}$.

2. a. Montrer que $\overline{AI} \cdot \overline{CM} = -\frac{3}{2}(AB^2 - AC^2)$.

b. En déduire que la droite (AI) porte une hauteur du triangle AMC.

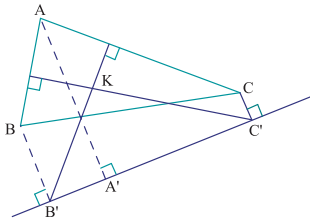
Exercice 9

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon r et soit $[AB]$ un diamètre de $\mathcal{C}$.

- Placer un point M sur $\mathcal{C}$ sachant que $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OM} = \frac{r^2}{2}$.
- Placer un point N sur $\mathcal{C}$ sachant que $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{ON} = -\frac{r^2\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 10

Dans la figure ci-dessous, ABC est un triangle, A' , B' et C' sont les projetés orthogonaux respectifs de A , B et C sur la droite Δ .



On désigne par K le point d'intersection de la perpendiculaire à (AC) passant par B' et la perpendiculaire à (AB) passant par C' .

- Montrer que $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{B'A'}$.
 - Montrer que $\overrightarrow{A'K} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'}$.
- En déduire que les droites $(A'K)$ et (BC) sont perpendiculaires.

Exercice 11

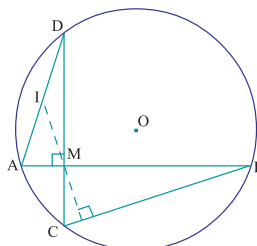
Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(-2, 2)$, $B(4, 0)$ et $C(-1, 2)$.

- Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, AB et AC .
 - En déduire une valeur approchée en radians à l'unité près de $\widehat{BAC}$.
- Déterminer une valeur approchée en radians à l'unité près de chacun des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$.

Exercice 12

Soit A , B , C et D quatre points d'un cercle de centre O et de rayon R tels que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires et sécantes en M .

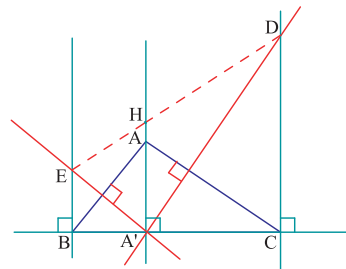
On désigne par I le milieu de $[AD]$.



- Montrer que $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4R^2$.
 - Montrer que $AD^2 + BC^2 = AC^2 + BD^2 = 4R^2$.
 - Montrer que les droites (MI) et (BC) sont perpendiculaires.
- Indication :** On pourrait considérer un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$; poser $A(a, b)$ et $C(c, d)$ puis déterminer les coordonnées des points B , D et M .

Exercice 13

Dans la figure ci-dessous, ABC est un triangle et A' est le pied de la hauteur issue de A .



On désigne par D le point d'intersection de la perpendiculaire à (AC) passant par A' et la perpendiculaire à (BC) passant par C .

On désigne par E le point d'intersection de la perpendiculaire à (AB) passant par A' et la perpendiculaire à (BC) passant par B .

On désigne par H le point d'intersection de la droite (ED) et la droite (AA') .

Montrer que H est l'orthocentre du triangle ABC .

Indication : On pourrait considérer un repère orthonormé $(A, \vec{i}, \vec{j})$; poser $A(0, a)$, $B(b, 0)$ et $C(c, 0)$.

Exercice 14

Soit k un réel, A et B deux points tels que $AB = 6$.

On désigne par Γ_k l'ensemble des points M du plan tel que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = k$.

- Représenter graphiquement Γ_0 , Γ_6 , Γ_{12} , Γ_{-6} et Γ_{42} .
- Que représente l'ensemble des points M du plan tel que $6 < \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} \leq 18$?

Exercice 15

Soit A et B deux points distincts du plan et I le milieu du segment [AB].

On désigne par Γ l'ensemble des points M du plan tel que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 2$.

1. Montrer que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$.

2. En déduire que Γ est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

Exercice 16

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points I(1, 0) et I'(-1, 0).

On désigne par E l'ensemble des points M du plan tel que $\frac{MI}{MI'} = 2$.

On désigne par G le barycentre des points pondérés (I, 1) et (I', -4).

1. Montrer que $MI^2 - 4MI'^2 = -3MG^2 + GI^2 - 4GI'^2$.

2. Montrer que E est l'ensemble des points M du plan tel que $MG^2 = \frac{1}{3} (GI^2 - 4GI'^2)$.

3. En déduire que E est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

Exercice 17

Soit A, B et C trois points distincts du plan.

On se propose de déterminer l'ensemble E des points M du plan tel que $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MC}\|$.

On désigne par I le milieu du segment [AB].

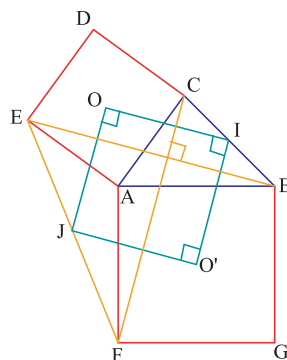
1. Montrer que E est l'ensemble des points M du plan tel que $MC^2 = 4MI^2$.

2. On désigne par G le barycentre des points pondérés (I, 4) et (C, -1).

Montrer que E est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

Exercice 18

Soit ABC un triangle et I le milieu du côté [BC]. On construit les carrés ACDE et ABGF de centres respectifs O et O' comme l'indique la figure ci-après.



1. a. Montrer que $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AE} = -AF \cdot AE \cdot \cos \widehat{BAC}$.

b. Calculer $\overrightarrow{FC} \cdot \overrightarrow{BE}$. En déduire la position relative des droites (FC) et (BE).

2. Montrer que $FC = BE$.

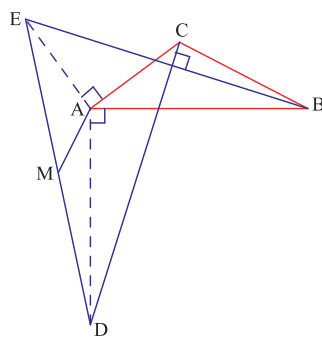
3. a. Quelle est la nature du triangle IOO' ?

b. Soit J le milieu de [EF].

Montrer que OIO'J est un carré.

Exercice 19

Dans la figure ci-dessous, ABC est un triangle tel que $\widehat{BAC}$ est aigu, $AD = AB$ et $(AD) \perp (AB)$, $AE = AC$ et $(AE) \perp (AC)$.



1. Comparer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE}$.

2. En déduire que $(BE) \perp (CD)$ et que $BE = CD$.

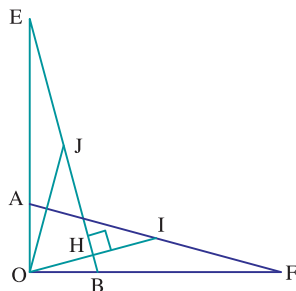
3. Soit M le milieu de [DE].

Montrer que $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 2 \overrightarrow{AM}$.

4. Calculer $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC}$ et en déduire la position relative des droites (AM) et (BC).

Exercice 20

Dans la figure ci-dessous, l'angle $\widehat{EOF}$ est droit, $OE = OF = r$, A un point de $[OE]$ et B un point de $[OF]$ tels que $OA = OB = r'$.



1. Montrer que la médiane issue de O du triangle AOF est la hauteur relative au côté $[BE]$ du triangle BOE.
2. Soit I le milieu de $[AF]$ et H le projeté orthogonal de O sur (BE) .

Exprimer à l'aide de r et r' le produit scalaire $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OH}$.

3. Soit J le milieu de $[BE]$.

Exprimer $\cos \widehat{IOJ}$ en fonction de r et r' .

Exercice 21

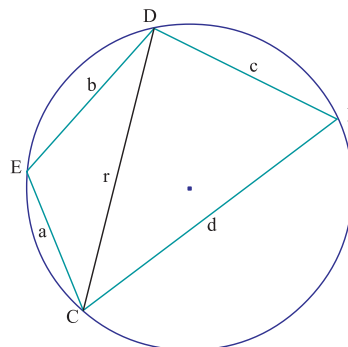
Soit O et A deux points du plan tels que $OA=1$.

Soit g l'application du plan dans lui-même qui à tout point M du plan associe le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = 2(\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OA})\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM}$.

1. Déterminer $g(O)$ et $g(A)$.
2. Que peut-on dire de l'image d'un point de (OA) ?
3. Montrer que pour tout point M du plan, le milieu H du segment $[MM']$ appartient à (OA) .
4. Montrer que pour tout point M, les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont orthogonaux.
5. En déduire la nature de g .

Exercice 22 Formule de Brahmagupta et Héron

Dans la figure ci-dessous, E, C, F et D sont quatre points d'un même cercle tels que $ED = b$, $EC = a$, $FC = d$ et $CD = r$.



1. a. Montrer que

$$r = a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{E} = c^2 + d^2 - 2cd \cos \widehat{F}.$$

- b. En déduire que $2(ab - cd) \cos \widehat{E} = a^2 + b^2 - c^2 - d^2$.

2. Montrer que l'aire $\mathcal{A}$ du quadrilatère ECFD est donnée par $2(ab + cd) \sin \widehat{E} = 4\mathcal{A}$.

3. On désigne par $p = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$, le demi-périmètre du quadrilatère ECFD.

Etablir la formule de Brahmagupta,

$$\mathcal{A} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

4. Retrouver la formule de Héron ;

l'aire $\mathcal{A}'$ d'un triangle de côtés a , b , c et de demi-périmètre p est $\mathcal{A}' = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Avec l'ordinateur

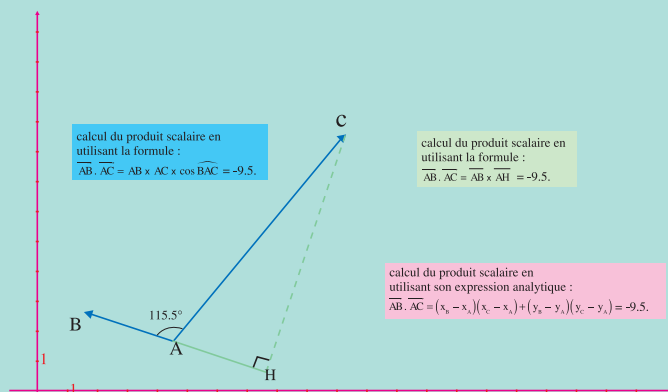
Séquence 1

Soit A, B et C trois points distincts du plan et H le projeté orthogonal de C sur (AB).

On suppose que le plan est muni d'un repère orthonormé.

A l'aide d'un logiciel de géométrie, on vérifie en faisant varier les points A, B et C que la valeur de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ est la même si on utilise l'une des formules suivantes :

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AH}$,
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$,
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (x_B - x_A)(x_C - x_A) + (y_B - y_A)(y_C - y_A)$.

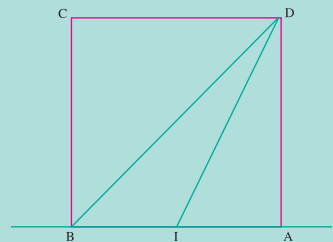


Séquence 2

ABCD est un carré et I est le milieu du côté [AB].

L'objectif de cette séquence est d'utiliser CABRI pour émettre une conjecture concernant l'angle IDB lorsque le côté du carré varie.

- Construire un carré ABCD.
- Construire I le milieu du côté [AB] et tracer les segments [DI] et [DB].
- Mesurer l'angle $\widehat{IDB}$.
- Faire varier le côté du carré et observer les valeurs de $\widehat{IDB}$.
- Que peut-on conjecturer ?

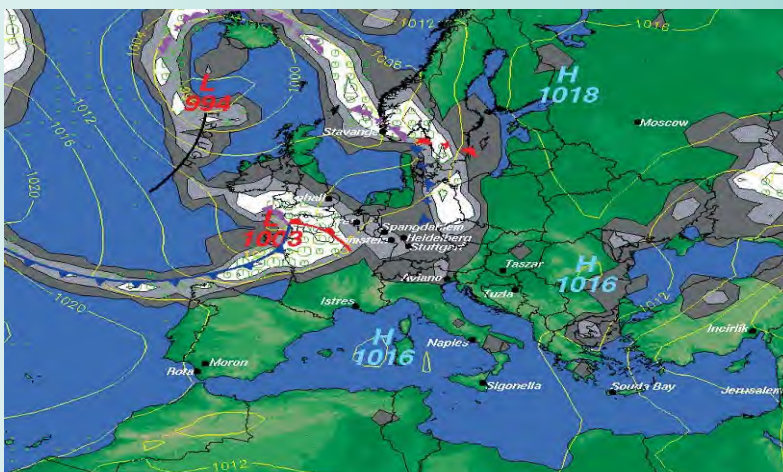


Démontrer cette conjecture en calculant de deux manières le produit scalaire $\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{DB}$.

Les lignes de niveau

Pour représenter le relief d'une région, on relie tous les points de même altitude. La courbe ainsi obtenue est appelée ligne de niveau. A chaque point M d'une carte géographique, on peut associer sa pression $H(M)$. Tous les points M ayant la même pression, par exemple 1016, constituent la ligne de niveau $H1016$ de la fonction H .

Les isobares, les isothermes, les parallèles et les méridiens sont des lignes de niveau.



Le produit scalaire

Au XIX^{ème} siècle, le mathématicien allemand Grassman (1809-1877), étudiant les phénomènes des marées, développe le calcul vectoriel et définit le produit scalaire qu'il appelle produit linéaire. "Il s'agit du produit algébrique d'un vecteur et de la projection du second vecteur sur le premier".

C'est Hamilton qui en 1853, le nomme produit scalaire car scalaire vient du mot latin scala qui signifie mesure et le produit scalaire de deux vecteurs est en effet un nombre.

Le produit scalaire se révèle très utile, aussi bien en physique pour le calcul du travail d'une force qu'en géométrie élémentaire pour démontrer des propriétés sur les angles et les distances.



Chapitre 2

Angles orientés

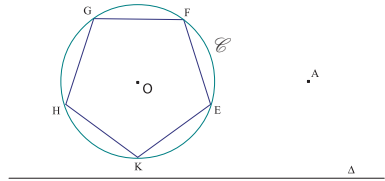
*" En mathématique, il n'y a
pas de vérité inaccessible. "*

Hilbert

Pour commencer

Activité 1

Dans la figure ci-contre, EFGHK est un pentagone régulier inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1, A est un point et Δ est une droite.

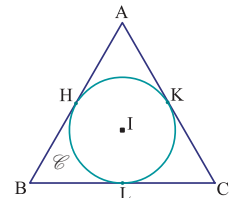


1. a. Calculer la longueur de l'arc $\widehat{EG}$ qui contient le point F.
En déduire la longueur de l'arc $\widehat{EG}$ qui ne contient pas F.
- b. Donner une mesure de chacun des angles géométriques $\widehat{HOG}$, $\widehat{EOG}$ et $\widehat{EOH}$.
2. Soit S_Δ la symétrie d'axe Δ et t la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$.
On désigne par
E', F', G', H' et K' les images respectives des points E, F, G, H et K par la symétrie S_Δ .
M, N, P, Q et R les images respectives des points E, F, G, H et K par la translation t .
- a. Calculer la longueur de l'arc $\widehat{E'G'}$ qui contient F', puis celle de l'arc $\widehat{MP}$ qui contient N.
Comparer les valeurs obtenues à la longueur de l'arc $\widehat{EG}$ qui contient le point F.
- b. Soit O' l'image de O par S_Δ . Donner une mesure de chacun des angles géométriques $\widehat{E'O'G'}$, $\widehat{MAP}$ et $\widehat{QAP}$.

Activité 2

On considère un triangle équilatéral ABC de côté 4 et on désigne par I le centre du cercle $\mathcal{C}$ inscrit dans le triangle. On note par H, L et K les points de contact.

1. Calculer le rayon de $\mathcal{C}$.
2. a. Donner une mesure de l'arc $\widehat{HL}$ qui contient K.
- b. Donner une mesure de l'arc $\widehat{KL}$ qui ne contient pas H.
- c. Donner une mesure de l'arc $\widehat{KH}$ qui contient L.



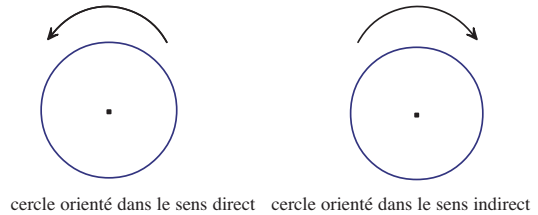
1. Arcs orientés

1.1 Orientation d'un cercle

On admet qu'il n'y a que deux orientations possibles sur un cercle donné.

Orienter un cercle, c'est choisir l'une des deux orientations.

Nous conviendrons qu'un cercle est orienté dans le sens direct s'il est orienté dans le sens contraire des aiguilles d'une montre et qu'il est orienté dans le sens indirect s'il est orienté dans le sens des aiguilles d'une montre.



Un cercle trigonométrique est un cercle de rayon 1, orienté dans le sens direct.

Définition

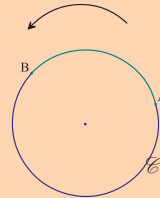
Soit (A, B) un couple de points distincts d'un cercle orienté $\mathcal{C}$.

Alors, il y a deux arcs de cercle d'origine A et d'extrémité B .

Un et un seul de ces arcs est orienté conformément à l'orientation du cercle.

On l'appelle arc orienté d'origine A et d'extrémité B et on le note $\widehat{AB}$.

On convient que le couple (A, A) détermine un arc orienté dont l'origine et l'extrémité sont confondues. On le note $\widehat{AA}$.



Vocabulaire

Tout arc orienté $\widehat{AB}$ détermine un unique arc géométrique appelé arc géométrique associé à $\widehat{AB}$.

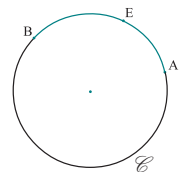
1.2 Mesures algébriques d'un arc orienté

Activité 1

Soit A, B et E trois points distincts appartenant à un cercle $\mathcal{C}$ de rayon 1.

On désigne par L la longueur de l'arc géométrique d'extrémités A et B qui contient E .

On considère un point mobile M qui se déplace sur le cercle $\mathcal{C}$ toujours dans le même sens.



On se propose de mesurer le trajet parcouru par le mobile M, lorsqu'il part de A pour s'arrêter en B.
On convient que la mesure algébrique x du trajet parcouru est égale à :

- La longueur du trajet parcouru, si M se déplace dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.
- L'opposé de la longueur du trajet parcouru, si M se déplace dans le sens des aiguilles d'une montre.

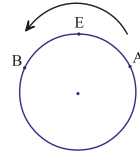
1. On suppose que M se déplace dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

Déterminer x dans chacun des cas ci-dessous.

Le mobile M s'arrête en B dès son premier passage par B.

Le mobile M s'arrête en B, à son deuxième passage par B.

Le mobile M s'arrête en B, à son n ème passage par B ($n \geq 1$).



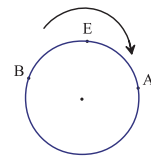
2. On suppose que M se déplace dans le sens des aiguilles d'une montre.

Déterminer x dans chacun des cas ci-dessous.

Le mobile M s'arrête en B dès son premier passage par B.

Le mobile M s'arrête en B, à son deuxième passage par B.

Le mobile M s'arrête en B, à son n ème passage par B.



L'activité précédente nous a permis de constater que pour partir de A et s'arrêter en B, le mobile M peut faire n tours complets sur le cercle avant de s'arrêter en B. Il est donc légitime de donner la définition ci-dessous.

Définition

Soit $\mathcal{C}$ un cercle orienté de rayon 1, (A, B) un couple de points distincts de $\mathcal{C}$ et L la longueur de l'arc géométrique associé à $\widehat{AB}$.

On appelle mesure algébrique de l'arc orienté $\widehat{AB}$ et on note $\text{mes } \widehat{AB}$ tout réel de la forme $L + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

On convient que $\text{mes } \widehat{AA} = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Les propriétés ci-dessous découlent aisément de la définition précédente.

Conséquences

Soit $\mathcal{C}$ un cercle orienté de rayon 1 et A et B deux points de $\mathcal{C}$.

- Si x et y sont deux mesures de $\widehat{AB}$, alors $x - y = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- L'arc orienté $\widehat{AB}$ possède une unique mesure dans $[0, 2\pi[$, qui est la longueur de l'arc géométrique associé.
- Pour tout point M de $\mathcal{C}$ et tout réel x , il existe un unique point N de $\mathcal{C}$ tel que $\text{mes } \widehat{MN} = x$.

Notation

L'égalité $x - y = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, est notée $x \equiv y [2\pi]$.

On lit " x est congru à y modulo 2π ".

Activité 2

Dans la figure ci-contre, $\mathcal{C}$ est un cercle trigonométrique de centre O, OAB est un triangle équilatéral.

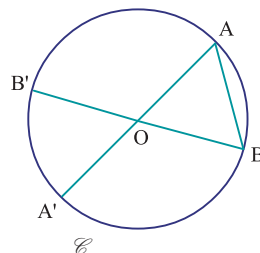
Les points A' et B' sont les symétriques respectifs des points A et B par rapport à O.

1. Pour chacun des arcs orientés $\widehat{AB}$, $\widehat{AA'}$, $\widehat{AB'}$, déterminer la mesure qui appartient à $[0, 2\pi[$.

2. Soit K le point de $\mathcal{C}$ tel que $\text{mes } \widehat{AK} \equiv \frac{37\pi}{4} [2\pi]$.

Ecrire la division euclidienne de 37 par 4. Donner la mesure de $\widehat{AK}$ qui appartient à $[0, 2\pi[$ et placer le point K.

3. Placer le point N de $\mathcal{C}$ tel que $\text{mes } \widehat{BN} \equiv \frac{19\pi}{3} [2\pi]$.



1. 3 Propriétés des arcs orientés

Activité 1

Soit $\mathcal{C}$ un cercle trigonométrique et (A, B) un couple de points de $\mathcal{C}$ tels que $\text{mes } \widehat{AB} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

1. Faire une figure.

2. Placer sur $\mathcal{C}$ le point D tel que $\text{mes } \widehat{BD} \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ et le point D' tel que $\text{mes } \widehat{AD'} \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$.

3. On désigne par L_1, L_2, L_3, L_4 et L_5 les mesures respectives qui appartiennent à $[0, 2\pi[$ des arcs $\widehat{AB}, \widehat{BD}, \widehat{AD}, \widehat{BD'}$ et $\widehat{AD'}$.

a. Comparer $L_1 + L_2$ et L_3 .

b. Comparer $L_1 + L_4$ et L_5 .

Propriétés (admisses)

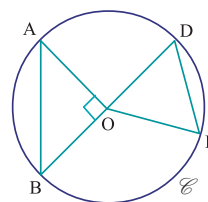
Pour tous points A, B et C d'un cercle orienté $\mathcal{C}$ de rayon 1, on a
 $\text{mes } \widehat{AB} + \text{mes } \widehat{BC} \equiv \text{mes } \widehat{AC} [2\pi]$ (Relation de Chasles).
 $\text{mes } \widehat{AB} \equiv -\text{mes } \widehat{BA} [2\pi]$.

Activité 2

Dans la figure ci-contre, $\mathcal{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O. Les points B, D sont diamétralement opposés, le triangle AOB est rectangle en O et le triangle ODE est équilatéral.

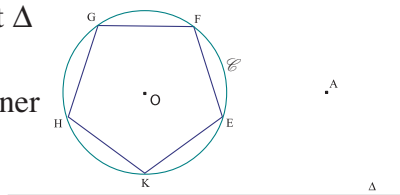
Pour chacun des arcs orientés ci-dessous, donner la mesure qui appartient à $[0, 2\pi[$.

$\widehat{AB}, \widehat{BA}, \widehat{BE}, \widehat{EB}, \widehat{AE}, \widehat{AD}$.



Activité 3

Dans la figure ci-contre, EFGHK est un pentagone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ de centre O, A est un point et Δ est une droite.



- Pour chacun des arcs orientés $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FK}$, $\overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{EK}$, déterminer la mesure qui appartient à $[0, 2\pi[$.
- Soit S_{Δ} la symétrie d'axe Δ .
On désigne par $\mathcal{C}'$ l'image du cercle $\mathcal{C}$ par S_{Δ} et par E' , F' , G' , H' et K' les images respectives des points E, F, G, H et K par S_{Δ} .
 - Donner la mesure de $\overrightarrow{E'F'}$ qui appartient à $[0, 2\pi[$ et la comparer à la mesure de $\overrightarrow{EF}$ qui appartient à $[0, 2\pi[$.
 - Reprendre la question pour chacun des arcs orientés $\overrightarrow{F'K'}$, $\overrightarrow{F'E'}$ et $\overrightarrow{E'K'}$.
- Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$, MNPQR l'image du pentagone EFGHK par cette translation.
 - Donner la mesure de $\overrightarrow{MN}$ qui appartient à $[0, 2\pi[$ et la comparer à la mesure de $\overrightarrow{EF}$ qui appartient à $[0, 2\pi[$.
 - Reprendre la question pour chacun des arcs orientés $\overrightarrow{NR}$, $\overrightarrow{NM}$ et $\overrightarrow{PR}$.
Que remarque-t-on ?

Théorème (admis)

Toute symétrie axiale transforme les mesures des arcs orientés en leurs opposés.
Toute translation conserve les mesures des arcs orientés.

2. Angles orientés

2.1 Définition d'un angle orienté

On dit que le plan est orienté si tous les cercles du plan sont orientés dans le même sens.

On convient que le plan est orienté dans le sens direct si tous les cercles du plan sont orientés dans le sens direct.

On convient que le plan est orienté dans le sens indirect si tous les cercles du plan sont orientés dans le sens indirect.

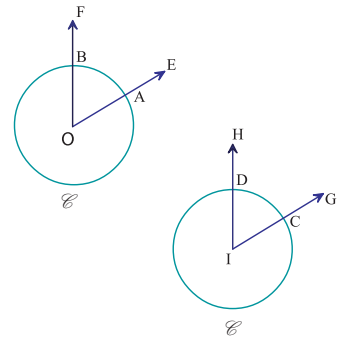
Activité 1

Dans le plan orienté dans le sens direct, O et I sont deux points distincts. On considère deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on désigne par E et F les points du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{IG}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{IH}$.

Le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ de centre O coupe les demi-droites $[OE)$ et $[OF)$ respectivement en A et B .

Le cercle trigonométrique $\mathcal{C}'$ de centre I coupe les demi-droites $[IG)$ et $[IH)$ respectivement en C et D .

Montrer que les arcs orientés $\widehat{AB}$ et $\widehat{CD}$ ont le même ensemble de mesures.



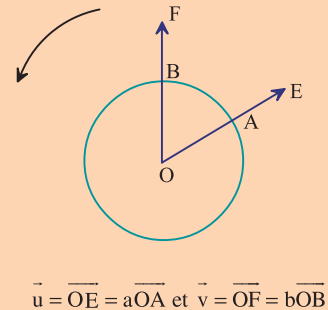
Définition

Soit O un point du plan orienté dans le sens direct et $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique de centre O .

Soit $(\vec{u}, \vec{v})$ un couple de vecteurs non nuls.

On désigne par E et F les points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OE}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OF}$ et par A et B les points d'intersection respectifs du cercle $\mathcal{C}$ et des demi-droites $[OE)$ et $[OF)$.

On appelle mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ toute mesure de l'arc orienté $\widehat{AB}$.



Les propriétés ci-dessous découlent de la définition précédente.

Propriétés

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

- Pour tous réels strictement positifs a et b , les angles orientés $(\vec{u}, \vec{v})$ et $(a\vec{u}, b\vec{v})$ ont les mêmes mesures.
- Si α est une mesure de $(\vec{u}, \vec{v})$ alors toute mesure de $(\vec{u}, \vec{v})$ est de la forme $\alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Toute mesure de $(\vec{u}, \vec{u})$ est de la forme $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Toute mesure de $(\vec{u}, -\vec{u})$ est de la forme $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ est notée $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$.

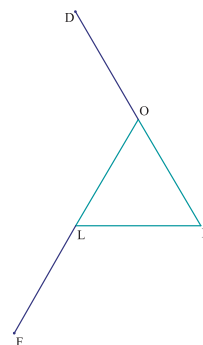
On note $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} \equiv \alpha[2\pi]$ et on lit $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ est congru à α modulo 2π .

Activité 2

Le plan étant orienté dans le sens direct, on considère un triangle équilatéral OLK de côté 1. On désigne par D le symétrique de K par rapport à O et par F le symétrique de O par rapport à L .

Pour chacun des angles orientés ci-dessous, déterminer la mesure qui appartient à $[0, 2\pi[$,

$$(\overrightarrow{OL}, \overrightarrow{OK}), (\overrightarrow{OK}, \overrightarrow{OD}), (\overrightarrow{OK}, \overrightarrow{OF}), (\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OL}), (\overrightarrow{LO}, \overrightarrow{LF}), (\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{KL}), (\overrightarrow{LF}, \overrightarrow{KO}).$$



Activité 3

Soit A et B deux points distincts du plan orienté dans le sens direct.

Dans cette activité, on se propose de déterminer l'ensemble des points M du plan tels que

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi].$$

Soit $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique de centre A et B' le point d'intersection de $\mathcal{C}$ et de la demi-droite $[AB)$.

1. a. Construire le point D tel que $AD = 1$ et $(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

b. Soit M un point de la demi-droite $[AD)$ privée de A . Déterminer $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$.

2. Soit M un point du plan tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$. On note M' le point d'intersection de $\mathcal{C}$ et de la demi-droite $[AM)$.

Montrer que M' et D sont confondus.

3. En déduire que M appartient à $[AD)$.

4. Soit N un point du plan tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN}) [2\pi]$.

Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$?

Propriétés (admisses)

- Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et α un réel.

Il existe un unique vecteur unitaire $\vec{v}$ tel que $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \alpha [2\pi]$.

- Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ trois vecteurs non nuls. Alors

$(\vec{u}, \vec{v}) \equiv (\vec{u}, \vec{v}') [2\pi]$, si et seulement si, $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ sont colinéaires et de même sens.

2. 2 Vecteurs colinéaires – Vecteurs orthogonaux

Activité 1

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

1. Montrer que $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} \equiv 0[2\pi]$, si et seulement si, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens.
2. Montrer que $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} \equiv \pi[2\pi]$, si et seulement si, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens opposés.

Propriétés

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

$\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} \equiv 0[2\pi]$, si et seulement si, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens.

$\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} \equiv \pi[2\pi]$, si et seulement si, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens opposés.

Activité 2

Soit A et B deux points distincts du plan orienté dans le sens direct.

1. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que $\widehat{(\vec{MA}, \vec{MB})} \equiv 0[2\pi]$.
2. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que $\widehat{(\vec{MA}, \vec{MB})} \equiv \pi[2\pi]$.

Activité 3

Soit O un point du plan orienté dans le sens direct, $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique de centre O et A un point du plan distinct de O. On désigne par C et D les points de $\mathcal{C}$ tels que

$$\widehat{(\vec{OA}, \vec{OC})} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \text{ et } \widehat{(\vec{OA}, \vec{OD})} \equiv \frac{3\pi}{2}[2\pi].$$

Soit M un point du plan distinct de O.

Montrer que les vecteurs $\vec{OA}$ et $\vec{OM}$ sont orthogonaux, si et seulement si,

$$\widehat{(\vec{OA}, \vec{OM})} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \text{ ou } \widehat{(\vec{OA}, \vec{OM})} \equiv \frac{3\pi}{2}[2\pi].$$

Propriété

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, si et seulement si, $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ ou $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} \equiv \frac{3\pi}{2}[2\pi]$.

Activité 4

Soit A, B, C et D quatre points distincts du plan orienté dans le sens direct.

1. Montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles, si et seulement si,

$$\widehat{(\vec{AB}, \vec{CD})} = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2. Montrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires, si et seulement si,

$$\widehat{(\vec{AB}, \vec{CD})} = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2. 3 Mesure principale d'un angle orienté

Activité 1

Le plan est orienté dans le sens direct.

1. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls tels que $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} \equiv \frac{128\pi}{3} [2\pi]$.

Ecrire la division euclidienne de 128 par 3. En déduire que $\frac{2\pi}{3}$ est une mesure de $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ qui appartient à $] -\pi, \pi]$.

2. Utiliser un procédé analogue pour déterminer dans chacun des cas ci-dessous une mesure de $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ qui appartient à $] -\pi, \pi]$.

a. $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} \equiv \frac{245\pi}{4} [2\pi]$; b. $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} \equiv -\frac{137\pi}{3} [2\pi]$.

Activité 2

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. On se propose de montrer que $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ admet une unique mesure dans l'intervalle $] -\pi, \pi]$.

1. Montrer que si y et z sont deux mesures de $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ qui appartiennent à $] -\pi, \pi]$ alors $y = z$.
2. On désigne par x la mesure de $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ qui appartient $[0, 2\pi[$.

Montrer que si x appartient $[\pi, 2\pi]$, alors $x - 2\pi$ est une mesure de $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ qui appartient à $] -\pi, \pi]$.

3. Conclure.

Définition

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Alors l'angle orienté $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ admet une unique mesure dans l'intervalle $] -\pi, \pi]$, appelée mesure principale de $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$.

Activité 3

Soit I un point du plan orienté dans le sens direct. Placer sur le cercle trigonométrique de centre I , les points F, G et H tels que $\widehat{(\vec{IF}, \vec{IG})} \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ et $\widehat{(\vec{IF}, \vec{IH})} \equiv \frac{5\pi}{3} [2\pi]$.

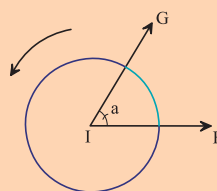
1. Donner les mesures principales de $\widehat{(\vec{IF}, \vec{IG})}$ et $\widehat{(\vec{IF}, \vec{IH})}$.
2. Donner les mesures des angles géométriques $\widehat{FIG}$ et $\widehat{FIH}$. Que remarque-t-on ?

Propriétés

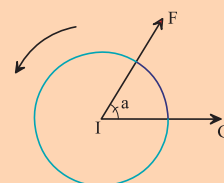
Dans le plan orienté dans le sens direct, on considère trois points non alignés I, F et G tels que $\widehat{FIG} = a$.

Si L est la mesure de $\widehat{AB}$ qui appartient à $[0, 2\pi[$ et α est la mesure principale de $\widehat{(\vec{IF}, \vec{IG})}$, alors

$$\alpha = \begin{cases} a & \text{si } 0 \leq L \leq \pi \\ -a & \text{si } \pi < L < 2\pi \end{cases}.$$



la mesure principale de $\widehat{(\vec{IF}, \vec{IG})}$ est égale à a .



la mesure principale de $\widehat{(\vec{IF}, \vec{IG})}$ est égale à $-a$.

2. 4 Propriétés des angles orientés

La propriété ci-dessous découle de la relation de Chasles sur les mesures des arcs orientés.

Propriété

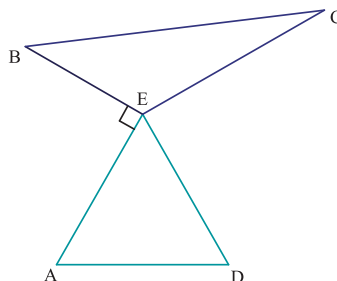
Le plan est orienté dans le sens direct.

Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$,

$$\widehat{(\vec{u}, \vec{w})} \equiv \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} + \widehat{(\vec{v}, \vec{w})} [2\pi] \text{ (Relation de Chasles).}$$

Activité 1

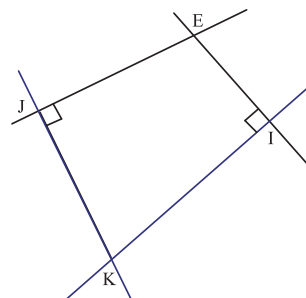
Dans le plan orienté dans le sens direct, on considère un triangle équilatéral AED. On suppose de plus que $\widehat{(\vec{EA}, \vec{EB})}$ est perpendiculaire à $\widehat{(\vec{EB}, \vec{EC})}$ et $\widehat{(\vec{EB}, \vec{EC})} \equiv -\frac{2\pi}{3} [2\pi]$. Donner la mesure principale de chacun des angles orientés $\widehat{(\vec{EA}, \vec{EC})}$; $\widehat{(\vec{ED}, \vec{EB})}$; $\widehat{(\vec{ED}, \vec{EC})}$.



Activité 2 (Angles à côtés perpendiculaires)

Dans le plan orienté dans le sens direct, on considère quatre points E, I, J et K tels que les droites (KI) et (KJ) sont respectivement perpendiculaires aux droites (EI) et (EJ).

Montrer que $\widehat{(\vec{EI}, \vec{EJ})} = \widehat{(\vec{KI}, \vec{KJ})} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.



Activité 3

Utiliser la relation de Chasles pour montrer la propriété ci-dessous.

Propriété

Le plan est orienté dans le sens direct.

Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$,

$$\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} \equiv \widehat{(\vec{u}', \vec{v}')} [2\pi], \text{ si et seulement si, } \widehat{(\vec{u}, \vec{u}')} \equiv \widehat{(\vec{v}, \vec{v}')} [2\pi].$$

Activité 4

Dans le plan orienté dans le sens direct, on considère trois points A, B et C tels que $\widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})} \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$. Soit D un point distinct de A tels que les droites (AD) et (AB) sont perpendiculaires et E un point tel que $\widehat{(\vec{AD}, \vec{AE})} \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

Montrer que les droites (AE) et (AC) sont perpendiculaires.

Activité 5

En utilisant la relation de Chasles, établir les propriétés suivantes.

Propriétés

Le plan est orienté dans le sens direct.

- Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

$$(\vec{u}, \vec{v}) \equiv -(\vec{v}, \vec{u}) [2\pi]; \quad (-\vec{u}, \vec{v}) \equiv \pi + (\vec{u}, \vec{v}) [2\pi].$$

$$(\vec{u}, -\vec{v}) \equiv \pi + (\vec{u}, \vec{v}) [2\pi]; \quad (-\vec{u}, -\vec{v}) \equiv (\vec{u}, \vec{v}) [2\pi].$$

- Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et tous réels non nuls a et b ,

$$(a\vec{u}, b\vec{v}) \equiv (\vec{u}, \vec{v}) [2\pi] \text{ si } ab > 0; \quad (a\vec{u}, b\vec{v}) \equiv \pi + (\vec{u}, \vec{v}) [2\pi] \text{ si } ab < 0.$$

Activité 6

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls tels que $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv -\frac{\pi}{6} [2\pi]$ et $(\vec{v}, \vec{w}) \equiv \frac{5\pi}{12} [2\pi]$.

Déterminer les mesures principales des angles orientés $(\vec{v}, \vec{u})$; $(\vec{u}, -\vec{w})$; $(-2\vec{u}, \vec{v})$; $(3\vec{w}, -\frac{1}{3}\vec{u})$.

Activité 7

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit $[BC]$ un segment et un A un point de la médiatrice de $[BC]$.

Montrer que $(\vec{BC}, \vec{BA}) \equiv (\vec{CA}, \vec{CB}) [2\pi]$.

Activité 8

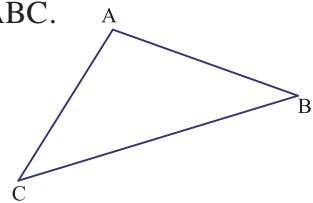
Dans le plan orienté dans le sens direct, on considère un triangle ABC .

- Utiliser la relation de Chasles pour calculer la somme

$$(\vec{AB}, \vec{AC}) + (\vec{CA}, \vec{CB}) + (\vec{BC}, \vec{BA}).$$

- On suppose que le triangle ABC est isocèle en A , montrer que

$$(\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv \pi - 2(\vec{BC}, \vec{BA}) [2\pi].$$



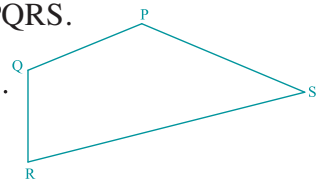
Activité 9

Dans le plan orienté dans le sens direct, on considère un quadrilatère $PQRS$.

- Calculer la somme $(\vec{PQ}, \vec{PS}) + (\vec{SP}, \vec{SR}) + (\vec{RS}, \vec{RQ}) + (\vec{QR}, \vec{QP})$.

- On suppose que $PQRS$ est un parallélogramme, montrer que

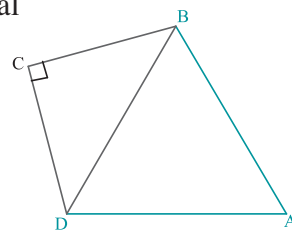
$$(\vec{PQ}, \vec{PS}) \equiv (\vec{RS}, \vec{RQ}) [2\pi] \text{ et que } (\vec{SP}, \vec{SR}) \equiv (\vec{QR}, \vec{QP}) [2\pi].$$



Activité 10

Dans le plan orienté dans le sens direct, le triangle ABD est équilatéral et le triangle BCD est isocèle rectangle en C.

Donner la mesure principale des angles $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC})$; $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{BD})$; $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CD})$; $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC})$; $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$; $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC})$.

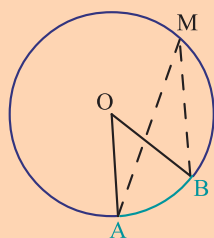


3. Cercle et angles

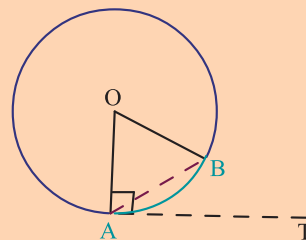
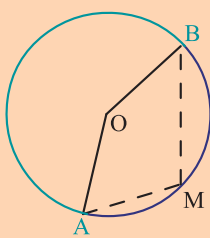
3.1 Angles inscrits et angles au centre

Définition

On dit qu'un angle est inscrit dans un cercle lorsque son sommet appartient à ce cercle et ses côtés recoupent ce cercle ; l'un des côtés pouvant être tangent au cercle.



$\widehat{AOB}$ est l'angle au centre associé à l'angle inscrit $\widehat{AMB}$



$\widehat{AOB}$ est l'angle au centre associé à l'angle inscrit $\widehat{TAB}$

Activité 1

Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans la figure ci-contre A, B et C sont trois points d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre O.

On se propose de montrer que $2(\widehat{CA}, \widehat{CB}) \equiv (\widehat{OA}, \widehat{OB})[2\pi]$.

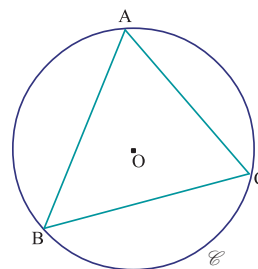
1. En remarquant que le triangle OAC est isocèle en O, montrer que

$$(\widehat{OC}, \widehat{OA}) = \pi - 2(\widehat{CA}, \widehat{CO}) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

2. En déduire que $2(\widehat{CA}, \widehat{CO}) \equiv (\widehat{OA}, \widehat{CO})[2\pi]$.

3. Montrer de même que $2(\widehat{CB}, \widehat{CO}) \equiv (\widehat{OB}, \widehat{CO})[2\pi]$.

4. Conclure.

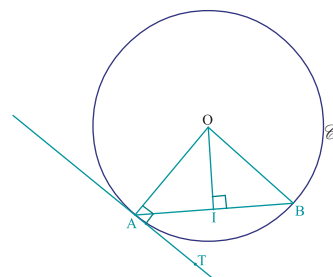


Activité 2

Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans la figure ci-contre la droite (AT) est tangente au cercle $\mathcal{C}$ en A.

On se propose de montrer que $(\widehat{OA}, \widehat{OB}) \equiv 2(\widehat{AT}, \widehat{AB})[2\pi]$.



1. Soit I le milieu de $[AB]$. En remarquant que les droites (OA) et (OI) sont respectivement perpendiculaires aux droites (AT) et (AB) , comparer $\widehat{(AT, AB)}$ et $\widehat{(OA, OI)}$.
2. Conclure.

Théorème

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O dans le plan orienté dans le sens direct.

- Pour tous points distincts A, B et M du cercle $\mathcal{C}$, $\widehat{(OA, OB)} \equiv 2\widehat{(MA, MB)} [2\pi]$.
- Si la droite (AT) est tangente au cercle $\mathcal{C}$ en A , alors $\widehat{(OA, OB)} \equiv 2\widehat{(AT, AB)} [2\pi]$.

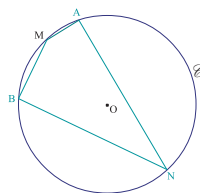
Activité 3

Dans le plan orienté dans le sens direct, on considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O .

Soit A, N, B et M quatre points distincts de $\mathcal{C}$ tels que $\widehat{(NA, NB)} \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$

et N et M soient diamétralement opposés.

Déterminer la mesure principale de l'angle orienté $\widehat{(MA, MB)}$.



Propriétés (admisses)

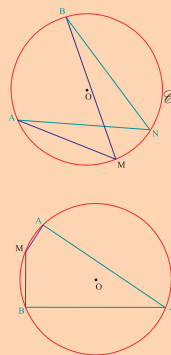
Dans le plan orienté dans le sens direct, soit A, B, M et N quatre points distincts d'un cercle.

- Si M et N appartiennent à l'arc orienté $\widehat{AB}$, alors

$$\widehat{(MA, MB)} \equiv \widehat{(NA, NB)} [2\pi].$$

- Si M appartient à l'arc orienté $\widehat{AB}$ et N appartient à l'arc orienté $\widehat{BA}$, alors

$$\widehat{(MA, MB)} \equiv \widehat{(NA, NB)} + \pi [2\pi].$$



3. 2 Ensemble des points M tels que $\widehat{(MA, MB)} \equiv \theta [2\pi]$, $\theta \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Activité 1

Dans le plan orienté dans le sens direct, on considère deux points distincts A et B et un réel θ tel que $\theta \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

1. Soit un point T tel que $\widehat{(AT, AB)} \equiv \theta [2\pi]$.

a. Montrer qu'il existe un unique cercle $\mathcal{C}$ passant par A et B et tangent à (AT) en A .

b. Soit M un point de l'arc orienté $\widehat{BA}$ distinct de A et B . Déterminer $\widehat{(MA, MB)}$.

2. Soit N un point du plan tel que $\widehat{(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB})} \equiv \theta [2\pi]$.

Soit $\mathcal{C}'$ le cercle circonscrit au triangle NAB et O' son centre.

a. Déterminer $\widehat{(\overrightarrow{O'A}, \overrightarrow{O'B})}$, puis $\widehat{(\overrightarrow{AO'}, \overrightarrow{AB})}$.

b. En déduire que (AT) est tangente à $\mathcal{C}'$ en A.

c. Où se trouve alors le point N ?

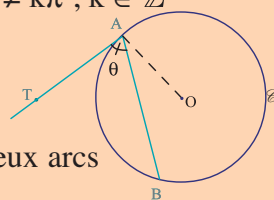
3. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\widehat{(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})} \equiv \theta [2\pi]$, $\theta \neq k\pi$.

Théorème

Soit A et B deux points distincts du plan orienté dans le sens direct, $\theta \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et T un point du plan tel que $\widehat{(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB})} \equiv \theta [2\pi]$.

Il existe un unique cercle $\mathcal{C}$ passant par A et B et tangent à (AT) en A.

L'ensemble des points M tels que $\widehat{(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})} \equiv \theta [2\pi]$ est l'un des deux arcs orientés $\widehat{BA}$ ou $\widehat{AB}$ privé des points A et B.



Activité 2

Soit A et B deux points distincts du plan orienté dans le sens direct. Construire dans chacun des cas suivants l'ensemble des points M du plan tels que $\widehat{(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})} \equiv \theta [2\pi]$.

a. $\theta = \frac{\pi}{2}$; b. $\theta = -\frac{\pi}{2}$; c. $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

Activité 3

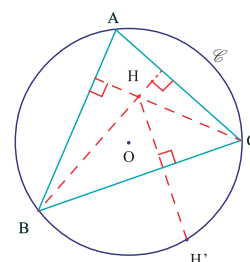
Le plan est orienté dans le sens direct. Dans la figure ci-contre ABC est un triangle inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$ et H est son orthocentre.

1. Montrer que $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} \equiv \pi - \widehat{(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC})} [2\pi]$.

2. Soit H' le symétrique de H par rapport à (BC).

Comparer $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$ et $\widehat{(\overrightarrow{H'B}, \overrightarrow{H'C})}$.

3. En déduire que H' est un point de $\mathcal{C}$.



4. Base orthonormée directe

Activité 1

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée du plan orienté dans le sens direct telle que $\widehat{(\vec{i}, \vec{j})} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

1. Montrer que chacun des couples de vecteurs ci-dessous est une base orthonormée du plan $(\vec{i}, -\vec{j})$, $(-\vec{i}, -\vec{j})$, $(\vec{j}, \vec{i})$.
2. Calculer la mesure principale de chacun des angles orientés $(\vec{i}, -\vec{j})$, $(-\vec{i}, -\vec{j})$, $(\vec{j}, \vec{i})$.

Activité 2

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit $\vec{u}$ un vecteur tel que $\|\vec{u}\| = 1$.

1. Montrer qu'il existe un unique vecteur $\vec{j}$ tel que $\|\vec{j}\| = 1$ et $\widehat{(\vec{i}, \vec{j})} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.
2. Montrer qu'il existe un unique vecteur $\vec{j}'$ tel que $\|\vec{j}'\| = 1$ et $\widehat{(\vec{i}, \vec{j}')} \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$.

Définition

Le plan est orienté dans le sens direct.

On dit qu'une base $(\vec{i}, \vec{j})$ du plan est orthonormée directe si $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ et $\widehat{(\vec{i}, \vec{j})} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

On dit qu'une base $(\vec{i}, \vec{j})$ du plan est orthonormée indirecte si $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ et $\widehat{(\vec{i}, \vec{j})} \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$.

Activité 3

Soit A et B deux points distincts du plan orienté dans le sens direct.

1. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que $\widehat{(\vec{AB}, \vec{MB})} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.
2. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que $\widehat{(\vec{AM}, \vec{AB})} \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$.

Définition

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, et soit $\vec{u}'$ le vecteur vérifiant

$$\|\vec{u}\| = \|\vec{u}'\| \text{ et } \widehat{(\vec{u}, \vec{u}')} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi].$$

On appelle déterminant de $(\vec{u}, \vec{v})$ et on note $\det(\vec{u}, \vec{v})$ le réel $\vec{v} \cdot \vec{u}'$.

On convient que si l'un des vecteurs est nul, leur déterminant est nul.

Activité 4

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

Montrer que $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$, si et seulement si, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Activité 5

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit $(\vec{u}, \vec{v})$ une base orthonormée directe.

Montrer que $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 1$.

Soit $(\vec{u}, \vec{v})$ une base orthonormée indirecte.

Montrer que $\det(\vec{u}, \vec{v}) = -1$.

Activité 6

Le plan est orienté dans le sens direct.

1. Dans la figure ci-contre, ABCD est un parallélogramme,

tel que $\widehat{(\vec{AB}, \vec{AD})} \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$, $AB = 5$ et $AD = 2$.

Calculer $\det(\vec{AB}, \vec{AD})$.

2. Dans la figure ci-contre, EFGH est un parallélogramme, tel que

$\widehat{(\vec{EF}, \vec{EH})} \equiv -\frac{\pi}{6} [2\pi]$, $EF = 2\sqrt{3}$ et $EH = 1.5$.

Calculer $\det(\vec{EF}, \vec{EH})$.



Activité 7

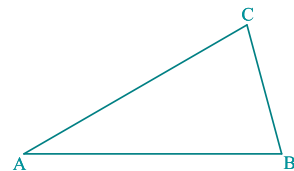
Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans la figure ci-contre ABC est un triangle tel que

$\widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})} \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$.

1. Exprimer $\det(\vec{AB}, \vec{AC})$ et $\det(\vec{AC}, \vec{AB})$ à l'aide de AB et AC .

2. Que remarque-t-on ?



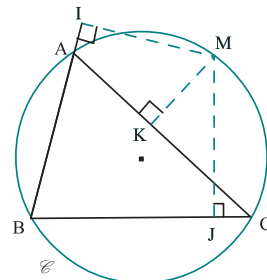
Situation 1 La droite de Simpson

Le plan est orienté dans le sens direct.

1. Dans la figure ci-contre, $\mathcal{C}$ est le cercle circonscrit au triangle ABC, M est un point de $\mathcal{C}$ et I, J et K sont les projetés orthogonaux de M sur les côtés du triangle ABC.

On se propose de montrer que les points I, J et K sont alignés.

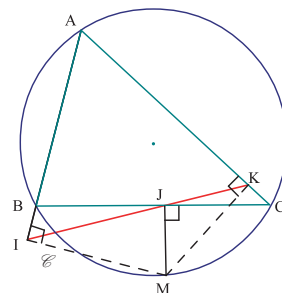
- a. Montrer que les points I, K, M et A appartiennent à un même cercle.
- b. En déduire que $\widehat{2(IM, IK)} \equiv \widehat{2(AM, AK)} [2\pi]$.
- c. Montrer $\widehat{2(IJ, IM)} \equiv \widehat{2(BJ, BM)} [2\pi]$.
- d. En déduire que les points I, J et K sont alignés.



2. Dans la figure ci-contre, N est un point dont les projetés orthogonaux I, J et K sur les côtés du triangle ABC sont alignés.

- a. Montrer que $(\widehat{NA, NB}) \equiv (\widehat{CA, CB}) [2\pi]$.
- b. En déduire que N est un point de $\mathcal{C}$, cercle circonscrit au triangle ABC.

3. Conclure.



Situation 2

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon r et soit A et B deux points diamétralement opposés sur $\mathcal{C}$.

1. Pour tout point M de $\mathcal{C}$, distinct de A et de B, on construit le point Q tel que MABQ soit un parallélogramme.

Déterminer l'ensemble décrit par le milieu I du segment [MQ], puis l'ensemble décrit par le centre de gravité G du triangle BQM lorsque M décrit $\mathcal{C}$ privé des points A et B.

2. On note N le symétrique de A par rapport à M et P le point d'intersection des droites (ON) et (BM).

Déterminer l'ensemble décrit par le point N lorsque M décrit $\mathcal{C}$ privé des points A et B.

3. On considère les cercles circonscrits aux triangles OBP et MNP.

- a. Pourquoi ces cercles ne sont pas tangents en P ?

- b. On note K l'autre point commun à ces deux cercles.

Montrer que le point K est un point de $\mathcal{C}$.

QCM

Cocher la réponse exacte.

Le plan est orienté dans le sens direct.

1. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls tels que $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} \equiv \frac{3024\pi}{4} [2\pi]$.

Alors la mesure principale de $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ est

- ☐ π ☐ 0 ☐ $\frac{\pi}{4}$.

2. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls tels que $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} \equiv \frac{\pi}{21} [2\pi]$.

Alors $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ admet une mesure dans

- ☐ $[\pi, 2\pi]$ ☐ $[9\pi, 10\pi]$ ☐ $[4\pi, 5\pi]$.

3. Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls tels que $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} \equiv -\frac{2\pi}{3} [2\pi]$ et

$\widehat{(\vec{v}, \vec{w})} \equiv -\frac{3\pi}{4} [2\pi]$. La mesure principale de $\widehat{(\vec{u}, \vec{w})}$ appartient à

- ☐ $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ ☐ $[-\pi, 0]$ ☐ $[0, \pi]$.

4. ABC est un triangle isocèle de sommet A tel que la mesure principale de $\widehat{(\vec{CB}, \vec{CA})}$ est égale à $-\frac{\pi}{5}$. Alors la mesure principale de $\widehat{(\vec{BC}, \vec{BA})}$ est

- ☐ $\frac{\pi}{5}$ ☐ $-\frac{\pi}{5}$ ☐ $\frac{4\pi}{5}$.

5. Soit A, B et M trois points distincts tels que $2\widehat{(\vec{MA}, \vec{MB})} \equiv \pi [2\pi]$. Alors

- ☐ A, B et M sont alignés ☐ $(AB) \perp (MB)$ ☐ M appartient au cercle de diamètre [AB]

VRAI – FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

Le plan est orienté dans le sens direct.. Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls.

1. Si $\widehat{(\vec{u}, \vec{w})} \equiv \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} + \pi [2\pi]$, alors les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires de même sens.

2. Si $\widehat{(\vec{u}, \vec{w})} \equiv \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} + \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux, alors les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux.

3. Si les mesures principales respectives de $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ et de $\widehat{(\vec{v}, \vec{w})}$ appartiennent à $] -\pi, 0]$, alors la mesure principale de $\widehat{(\vec{u}, \vec{w})}$ appartient à $] -\pi, 0]$,

4. Si la mesure principale de $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ appartient à $]0, \pi]$, alors une mesure de $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ appartient à $](2k - 1)\pi, 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$.

5. Soit A, B et C trois points distincts et A', B' et C' leurs images respectives par une homothétie. Alors $\widehat{(\vec{A'B'}, \vec{A'C'})} \equiv \widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})} [2\pi]$.

Exercices et Problèmes

Exercice 1

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit $\mathcal{C}$ un cercle trigonométrique, M et N deux points de $\mathcal{C}$ et α une mesure de l'arc orienté $\widehat{MN}$.

Trouver, dans chacun des cas suivants, la mesure de l'arc orienté $\widehat{MN}$ qui appartient à $[0, 2\pi[$.

a. $\alpha = \frac{185\pi}{7}$; b. $\alpha = \frac{-228\pi}{3}$; c. $\alpha = \frac{2006\pi}{13}$.

Exercice 2

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteur non nuls tels que

$$(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi] \text{ et } (\vec{u}, \vec{w}) \equiv -\frac{2\pi}{5} [2\pi].$$

Déterminer les mesures principales des angles

$$(\vec{v}, \vec{u}) ; (\vec{v}, \vec{w}) ; (2\vec{u}, -3\vec{v}) ; (3\vec{v}, -\frac{1}{3}\vec{w}).$$

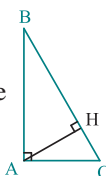
Exercice 3

Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans la figure ci-contre, ABC est un triangle rectangle en A tel que $(\vec{BA}, \vec{BC}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$ et H est le pied de la hauteur issue de A.

Déterminer les mesures principales des angles orientés

$$(\vec{AB}, \vec{BC}), (\vec{AH}, \vec{BA}) \text{ et } (\vec{AH}, \vec{CB}).$$



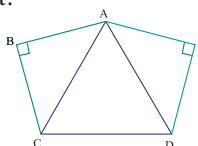
Exercice 4

Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans la figure ci-contre, ACD est un triangle équilatéral et EAD et ABC sont deux triangles rectangles isocèles.

Déterminer les mesures principales des angles

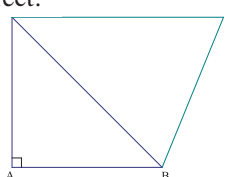
$$(\vec{AD}, \vec{AB}), (\vec{AE}, \vec{AB}), (\vec{AE}, \vec{CD}) \text{ et } (\vec{AC}, \vec{DE}).$$



Exercice 5

Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans la figure ci-contre, ABD est un triangle rectangle isocèle et BCD est un triangle isocèle en D tel que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.



1. Déterminer les mesures principales des angles orientés

$$(\vec{DC}, \vec{BA}), (\vec{DA}, \vec{BD}), (\vec{CB}, \vec{CD}) \text{ et } (\vec{BC}, \vec{DA}).$$

Exercice 6

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit ABCDEFGH un octogone régulier inscrit dans un cercle trigonométrique de centre O.

1. Déterminer les mesures principales de chacun des angles orientés suivants

$$(\vec{OE}, \vec{OD}), (\vec{OA}, \vec{OG}), (\vec{OB}, \vec{OE}) \text{ et } (\vec{OE}, \vec{OB}).$$

2. Déterminer les mesures principales de chacun des angles orientés suivants.

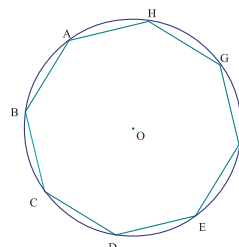
$$(2\vec{OE}, 3\vec{OD}), (\frac{1}{3}\vec{OB}, 4\vec{OF}) \text{ et } (-\vec{OB}, \frac{3}{4}\vec{OF}).$$

3. a. Citer deux bases orthonormées directes.

b. Citer deux bases orthonormées indirectes.

4. Calculer $\det(\vec{OF}, \vec{OG})$, $\det(\vec{OF}, \vec{OH})$,

$$\det(\vec{OF}, \vec{OA}), \det(\vec{OH}, \vec{OE}), \det(\vec{OH}, \vec{OE}).$$



Exercice 7

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit trois points A, B et C du plan et une droite Δ .

1. a. Construire les points A', B' et C' symétriques respectifs des points A, B et C par rapport à Δ .

b. Comparer $(\vec{AB}, \vec{AC})$ et $(\vec{A'B'}, \vec{A'C'})$.

2. On suppose que $(\vec{AB}, \vec{AC})$ est une base orthonormée directe. Que peut-on dire de $(\vec{A'B'}, \vec{A'C'})$?

Exercice 8

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit A, B et C trois points distincts. Soit O et O' deux points du plan et t la translation de vecteur $\vec{OO'}$.

1. a. Construire les points A', B' et C' images respectives de A, B et C par t.

b. Comparer $(\vec{AB}, \vec{AC})$ et $(\vec{A'B'}, \vec{A'C'})$.

2. On suppose que $(\vec{AB}, \vec{AC})$ est une base orthonormée directe. Que peut-on dire de $(\vec{A'B'}, \vec{A'C'})$?

Exercice 9

Le plan est orienté dans le sens direct.

ABCD est un carré de centre I et de côté a.

1. Donner les mesures principales des angles orientés $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, $(\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{DA})$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.

2. Calculer en fonction de a les déterminants $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, $\det(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BC})$, $\det(\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{IA})$, $\det(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{BC})$, $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IC})$.

Exercice 10

Le plan est orienté dans le sens direct.

ABCD est un parallélogramme tel que la mesure principale de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est égale à α .

Déterminer les mesures principales de chacun des angles orientés $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{BA})$, $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ et $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC})$.

Exercice 11

Le plan est orienté dans le sens direct.

On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et un point A de $\mathcal{C}$.

1. Placer le point M de $\mathcal{C}$ tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

Pour tout entier naturel n, on considère le point M_n de $\mathcal{C}$ tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM_n}) \equiv n \frac{\pi}{6} [2\pi]$.

2. Placer les points M_0, M_1, M_2 et M_{10} .

3. Pour quelles valeurs de n, les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM_n}$ sont-ils colinéaires ?

4. Pour quelles valeurs de n, les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM_n}$ sont-ils orthogonaux ?

Exercice 12

Le plan est orienté dans le sens direct. On considère le triangle ABC rectangle en B et tel que

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{2\pi}{5} [2\pi].$$

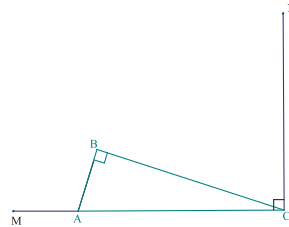
On suppose de plus que les droites (AC) et (NC) sont perpendiculaires et que $AB = AM$ et $CB = CN$.

1. a. Déterminer $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM})$ et $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BN})$.

b. En déduire que les points M, B et N sont alignés.

2. Reprendre la question 1. lorsque

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) \equiv \alpha [2\pi] \quad (\alpha \in \mathbb{R}^+).$$



Exercice 13

Le plan est orienté dans le sens direct.

1. Montrer que deux hauteurs d'un triangle sont perpendiculaires si et seulement si le triangle est rectangle.

On considère trois droites $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$ concourantes en un point H.

2. On suppose que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont perpendiculaires et on considère un point A de $\mathcal{D}$ distinct de H.

Construire un triangle de sommet A dont les hauteurs sont les droites $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$.

3. On suppose que les droites $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$ sont deux à deux non perpendiculaires, soit A un point de $\mathcal{D}$ distinct de H.

Construire un triangle de sommet A dont les hauteurs sont les droites $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$.

Exercice 14

Le plan est orienté dans le sens direct.

A et B sont deux points distincts.

Construire l'ensemble des points M du plan tels que.

$$\text{a. } (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi] \quad ; \quad \text{b. } (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \frac{27\pi}{4} [2\pi].$$

Exercice 15

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit EFG un triangle et $\mathcal{C}$ son cercle circonscrit.

1. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que $(\overrightarrow{ME}, \overrightarrow{EF}) \equiv (\overrightarrow{EG}, \overrightarrow{EF}) [2\pi]$.

2. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que $(\overrightarrow{ME}, \overrightarrow{MF}) \equiv (\overrightarrow{EG}, \overrightarrow{EF}) [2\pi]$.

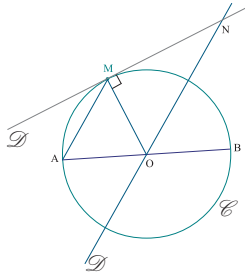
Exercice 16

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de diamètre $[AB]$ et M un point de $\mathcal{C}$ distinct de A et B . Soit $\mathcal{D}$ la tangente à $\mathcal{C}$ en M et $\mathcal{D}'$ la droite parallèle à (AM) passant par O .

Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ se coupent en N .

1. Montrer que $(\widehat{MN}, \widehat{MB}) \equiv (\widehat{ON}, \widehat{OB}) [2\pi]$.
2. En déduire que N appartient au cercle passant par O, M et B .
3. Montrer que la droite (BN) est la tangente à $\mathcal{C}$ en B .

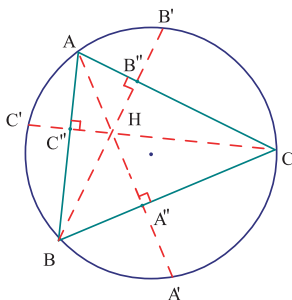


Exercice 17

Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans la figure ci-contre, ABC est un triangle inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$ et H est son orthocentre. Les points A', B' et C' sont les symétriques de H respectivement par rapport aux droites $(BC), (AC)$ et (AB) .

1. Montrer que les points A', B' et C' sont des points de $\mathcal{C}$.
2. a. Montrer que $(\widehat{BB'}, \widehat{BC}) \equiv (\widehat{AC}, \widehat{AA'}) [2\pi]$.
b. En déduire la bissectrice de l'angle $\widehat{B'C'A'}$.
3. Déterminer les bissectrices des angles $\widehat{B'A'C'}$ et $\widehat{A'B'C'}$.
4. On désigne par A'', B'' et C'' les pieds des hauteurs du triangle ABC issues respectivement de A, B et C . Déterminer le centre du cercle inscrit au triangle $A''B''C''$.



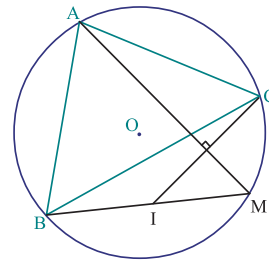
Exercice 18

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit ABC un triangle isocèle de sommet principal A et $\mathcal{C}$ son cercle circonscrit de centre O .

On considère un point M de $\mathcal{C}$ distinct de A et B ; la perpendiculaire à (AM) passant par C coupe (BM) en I .

1. a. Montrer que $2(\widehat{OA}, \widehat{AM}) \equiv 2(\widehat{BC}, \widehat{IC}) [2\pi]$.
b. En déduire que $2(\widehat{IM}, \widehat{IC}) \equiv 2(\widehat{AO}, \widehat{AC}) [2\pi]$.
2. Montrer que $2(\widehat{IB}, \widehat{IC}) \equiv 2(\widehat{AB}, \widehat{AC}) [2\pi]$.
3. a. Soit N un point du cercle de centre A et de rayon AB distinct de B et de C .
Montrer que $2(\widehat{IB}, \widehat{IC}) \equiv 2(\widehat{NB}, \widehat{NC}) [2\pi]$.
b. En déduire que $AI = AB$.



Exercice 19

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et A, B deux points de $\mathcal{C}$ non diamétralement opposés. On désigne par α la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{OA}, \widehat{OB})$. Soit M un point de $\mathcal{C}$ distinct de A et de B .

1. a. On suppose que M est un point de $\widehat{AB}$. Montrer que $(\widehat{MA}, \widehat{MB}) \equiv \pi - \frac{\alpha}{2} [2\pi]$.
b. On suppose que M est point de $\widehat{BA}$. Montrer que $(\widehat{MA}, \widehat{MB}) \equiv \frac{\alpha}{2} [2\pi]$.
2. On désigne par I le centre du cercle inscrit dans le triangle AMB .
Exprimer $(\widehat{IA}, \widehat{IB})$ en fonction de α .
3. Déterminer l'ensemble décrit par le point I lorsque M décrit $\mathcal{C}$ privé des points A et B .
4. a. Construire cet ensemble lorsque $\alpha = \frac{\pi}{4}$.
b. Construire cet ensemble lorsque $\alpha = -\frac{\pi}{3}$.

Droite de Simpson

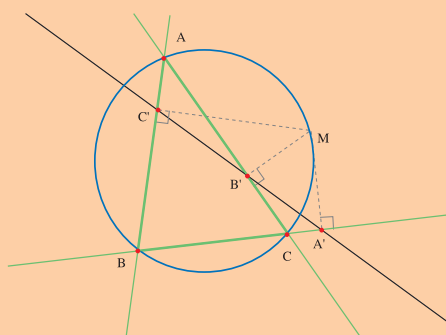
On considère un triangle ABC inscrit dans un cercle C, et M un point du plan.

On désigne par A', B' et C' les projetés orthogonaux du point M respectivement sur les droites (BC), (AC) et (AB).

On se propose dans cette séquence, d'étudier les positions des points A', B' et C' lorsque M varie.

Partie A.

1. Construire un triangle ABC et son cercle circonscrit.
2. Placer un point M et construire ses projetés orthogonaux A', B' et C' respectivement sur les droites (BC), (AC) et (AB).
3. En faisant varier le point M, observer les variations de la figure. On pourra mettre en évidence des positions des configurations particulières.
 - M est confondu avec l'un des points A, B ou C.
 - Un des points A', B', C' est confondu avec un des points A, B, C.
4. Quelle conjecture peut-on formuler sur la position de M pour que les points A', B' et C' soient alignés ?



Partie B

1. On suppose que $C' \neq B$.
 - a) Justifier que les points M, B, A' et C' sont situés sur un même cercle que l'on déterminera.
 - b) En déduire que $\widehat{A'C', A'M} = \widehat{BA, BM} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
2. Justifier de même les points M, C, B' et A' sont cocycliques. En déduire que $\widehat{A'M, A'B'} = \widehat{CM, CA} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

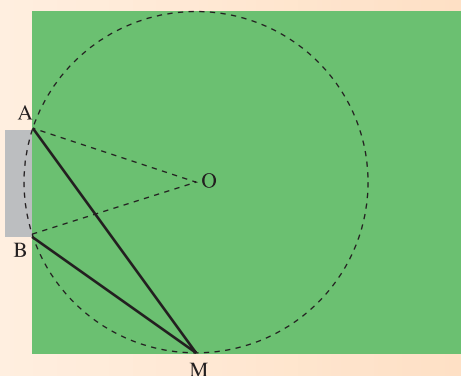
En déduire une preuve de la conjecture faite dans la partie A.

Les pèlerins tournent autour de la Kaaba dans le sens trigonométrique.



Un joueur de football s'apprête à chouter le ballon en se déplaçant le long de la ligne de touche.

Pour maximaliser l'angle de tir $\widehat{AMB}$, il faut maximaliser l'angle $\widehat{AOB}$ et par suite minimiser la distance OA avec la contrainte que le cercle de centre O et de rayon OA rencontre la ligne.



Chapitre 3

Trigonométrie

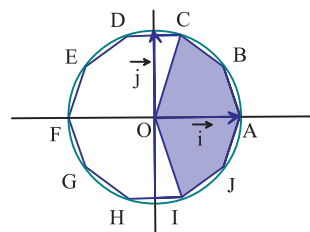
*" Il n'y a pas de voie royale
pour accéder au temple de la
géométrie. "*

Euclide

Pour commencer

Activité 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on a représenté le décagone régulier ABCDEFGHIJ.



- Donner la mesure principale de chacun des angles $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$; $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$; $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OG})$; $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OC})$; $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OJ})$.
- Donner une valeur approchée à 0.001 près, par défaut, des coordonnées de chacun des sommets du décagone.
- Donner une valeur approchée à 0.001 près, par défaut, de l'aire de la partie colorée.

Activité 2

- Construire dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, un octogone régulier ABCDEFGH tel que $A \in (O, \vec{i})$.
- Donner une valeur approchée à 0.001 près, par défaut, des coordonnées de chacun des sommets de ABCDEFGH.
- Donner une valeur approchée à 0.001 près, par défaut, de l'aire de l'octogone.

Activité 3

Recopier puis compléter le tableau ci-dessous.

Mesure en radian de α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos \alpha$									
$\sin \alpha$									

1. Cosinus et sinus d'un réel

Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $\mathcal{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O.

1. Construire dans chacun des cas ci-dessous le point M du cercle $\mathcal{C}$.

$$(\vec{i}, \widehat{OM}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \quad ; \quad (\vec{i}, \widehat{OM}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi] \quad ; \quad (\vec{i}, \widehat{OM}) \equiv \frac{8\pi}{3}[2\pi] ;$$

$$(\vec{i}, \widehat{OM}) \equiv \frac{3\pi}{4}[2\pi] \quad ; \quad (\vec{i}, \widehat{OM}) \equiv \frac{12\pi}{4}[2\pi] \quad ; \quad (\vec{i}, \widehat{OM}) \equiv -\frac{23\pi}{6}[2\pi] ;$$

$$(\vec{i}, \widehat{OM}) \equiv \frac{26\pi}{4}[2\pi] ; \quad (\vec{i}, \widehat{OM}) \equiv -\frac{13\pi}{2}[2\pi] ; \quad (\vec{i}, \widehat{OM}) \equiv -\frac{19\pi}{4}[2\pi] .$$

2. Déterminer, dans chacun des cas ci-dessus, les coordonnées cartésiennes du point M.

Définition

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit θ un réel et M le point du cercle trigonométrique de centre O tel que $(\vec{i}, \widehat{OM}) \equiv \theta[2\pi]$.

On appelle cosinus de θ , et on note $\cos\theta$, l'abscisse de M.

On appelle sinus de θ , et on note $\sin\theta$, l'ordonnée de M.

Pour tout entier k et tout réel θ , $\cos(\theta + 2k\pi) = \cos\theta$ et $\sin(\theta + 2k\pi) = \sin\theta$.

Activité 2

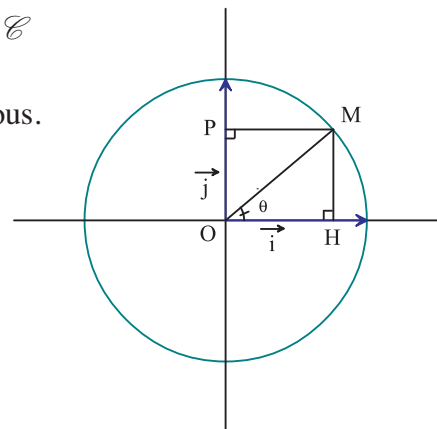
Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $\mathcal{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O.

En utilisant la figure ci-contre, établir les propriétés ci-dessous.

Propriétés

Pour tout réel θ , on a

- $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.
- $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ et $-1 \leq \sin\theta \leq 1$.
- $\cos(-\theta) = \cos\theta$ et $\sin(-\theta) = -\sin\theta$.

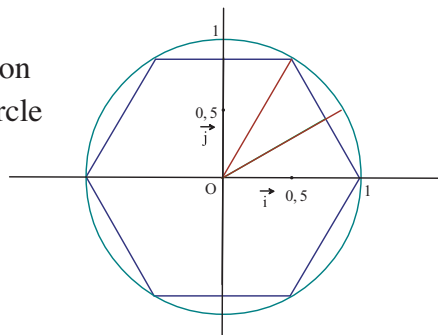


Activité 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère l'hexagone régulier de côté 1, inscrit dans le cercle trigonométrique de centre O.

Calculer le cosinus et le sinus de chacun des réels

$$-\frac{\pi}{3} ; -\frac{4\pi}{3} ; -\frac{\pi}{6} ; \frac{5\pi}{3} ; -\frac{2\pi}{3} ; \frac{7\pi}{6} .$$



Activité 4

Utiliser la calculatrice (en mode radians) pour trouver une valeur approchée à 10^{-1} près, du cosinus et sinus de chacun des réels 2.3 ; -1.5 ; 12.4 ; 0.2 ; -0.4 .

Activité 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $\mathcal{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O.

1 a. Représenter l'ensemble des points M de $\mathcal{C}$ tel que $\widehat{(\vec{i}, \vec{OM})} \equiv \theta [2\pi]$ et $\sin \theta \leq 0$.

b. Représenter l'ensemble des points M de $\mathcal{C}$ tel que $\widehat{(\vec{i}, \vec{OM})} \equiv \theta [2\pi]$ et $\cos \theta \geq 0$.

c. Représenter l'ensemble des points M de $\mathcal{C}$ tel que $\widehat{(\vec{i}, \vec{OM})} \equiv \theta [2\pi]$, $\sin \theta \leq 0$ et $\cos \theta \geq 0$.

2. Résoudre dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$, puis dans l'intervalle $[0, 2\pi[$,

$$\sin \theta \leq 0 ; \cos \theta \geq 0 ; \begin{cases} \sin \theta \leq 0 \\ \cos \theta \geq 0 \end{cases} .$$

Activité 6

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $\mathcal{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O.

1 a. Représenter l'ensemble des points M de $\mathcal{C}$ tel que $\widehat{(\vec{i}, \vec{OM})} \equiv \theta [2\pi]$ et $0 < \sin \theta < \frac{1}{2}$.

b. Représenter l'ensemble des points M de $\mathcal{C}$ tel que $\widehat{(\vec{i}, \vec{OM})} \equiv \theta [2\pi]$ et $\frac{1}{2} < \cos \theta < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Résoudre dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$, puis dans l'intervalle $[0, 2\pi[$,

$$0 < \sin \theta < \frac{1}{2} ; \frac{1}{2} \leq \cos \theta \leq \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

Activité 7

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $\mathcal{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O .

Dans la figure ci-contre, M est un point du cercle

$\mathcal{C}$ tel que $\widehat{(\vec{i}, \vec{OM})} \equiv \theta[2\pi]$, θ appartenant à $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et

T est le point de coordonnées $(1, 0)$.

La tangente au cercle $\mathcal{C}$ en M coupe l'axe des abscisses en A et la tangente au cercle $\mathcal{C}$ en T coupe la droite (AM) en D .

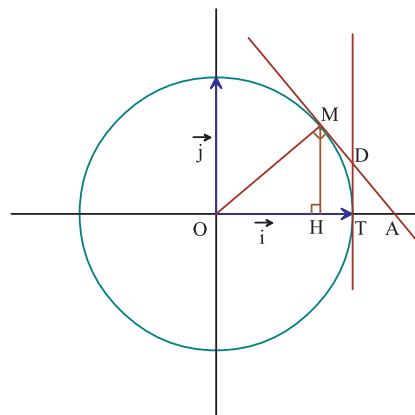
1. a. Calculer OA et OH en fonction de θ .

b. En déduire AH et AT en fonction de θ .

2. a. Montrer que $TD = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$.

b. En déduire l'aire du quadrilatère $OTDM$.

3. Pour quelle valeur de θ , cette aire est-elle maximale ?



Activité 8 (Angles associés)

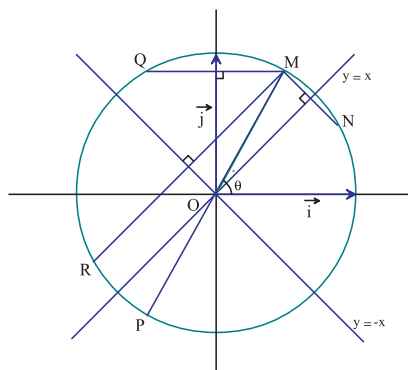
Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Dans la figure ci-contre, M est un point du cercle

trigonométrique $\mathcal{C}$ de centre O tel que $\widehat{(\vec{i}, \vec{OM})} \equiv \theta[2\pi]$.

Les points P, Q, N et R sont les symétriques respectifs de M par rapport à O , à l'axe des ordonnées, à la droite d'équation $y = x$ et à la droite d'équation $y = -x$.

Montrer chacune des formules ci-dessous.



Pour tout réel θ , on a

- $\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$; $\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$.
- $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$; $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$.
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$; $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$.
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta$; $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta$.

Activité 9

Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(2\pi - x) + \sin(x - \pi) + \cos(\pi - x) ;$$

$$B = \cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) + \sin(3\pi - x) + \sin(\pi + x).$$

2. Tangente d'un réel

Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct et M est le point du cercle trigonométrique de centre O tel que $\widehat{(\vec{i}, \overrightarrow{OM})} \equiv \theta[2\pi]$.

1. Déterminer les réels θ de l'intervalle $]-\pi, \pi]$ tels que $\cos\theta = 0$.
2. En déduire tous les réels θ tels que $\cos\theta = 0$.

Définition

On appelle tangente de θ , le réel noté $\tan\theta$ et défini par $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, pour tout réel θ tel que $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ et $\mathcal{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O et θ est un réel tel que $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Soit M un point du cercle $\mathcal{C}$ n'appartenant pas à l'axe des ordonnées tel que $\widehat{(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})} \equiv \theta[2\pi]$ et T le point d'intersection de la droite (OM) avec la tangente au cercle $\mathcal{C}$ en I .

1. Calculer $\det(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OT})$.
2. En déduire l'ordonnée de T à l'aide de θ .

Activité 3

Montrer les propriétés suivantes :

Pour tout réel θ tel que $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, on a

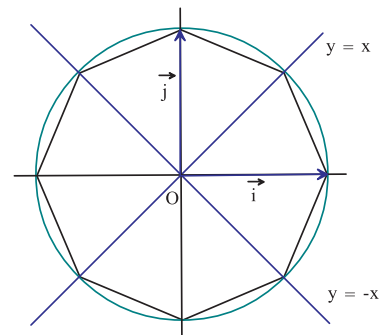
- $\tan(\theta + \pi) = \tan\theta$.
- $\tan(-\theta) = -\tan\theta$.

Activité 4

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère l'octogone régulier, inscrit dans le cercle trigonométrique de centre O .

Calculer la tangente de chacun des réels

$$-\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}; -\frac{5\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}; -\frac{13\pi}{4}.$$



Activité 5

Utiliser la calculatrice en mode radians pour résoudre dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ les équations suivantes :
 $\tan \theta = 5$; $\tan \theta = -1.8$; $\tan \theta = 8$; $\tan \theta = -10$.

Activité 6

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $\mathcal{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O.

1. a. Représenter l'ensemble des points M de $\mathcal{C}$ tel que $\widehat{(\vec{i}, \overrightarrow{OM})} \equiv \theta[2\pi]$ et $\tan \theta = 0$.
b. Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\tan \theta = 0$.
2. a. Représenter l'ensemble des points M de $\mathcal{C}$ tel que $\widehat{(\vec{i}, \overrightarrow{OM})} \equiv \theta[2\pi]$ et $\tan \theta = 1$.
b. Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\tan \theta = 1$.
3. a. Représenter l'ensemble des points M de $\mathcal{C}$ tel que $\widehat{(\vec{i}, \overrightarrow{OM})} \equiv \theta[2\pi]$ et $\tan \theta = -1$.
b. Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\tan \theta = -1$.
4. a. Représenter l'ensemble des points M de $\mathcal{C}$ tel que $\widehat{(\vec{i}, \overrightarrow{OM})} \equiv \theta[2\pi]$ et $\tan \theta \geq 0$.
b. Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\tan \theta \geq 0$.

3. Coordonnées polaires

Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la droite $\Delta : y = x$.

On désigne par E le point de Δ , d'abscisse positive et tel que $OE = 2$.

On désigne par F le point de Δ , d'abscisse négative et tel que $OF = 2$.

1. Montrer que $\overrightarrow{OE} = 2\cos\frac{\pi}{4}\vec{i} + 2\sin\frac{\pi}{4}\vec{j}$.
2. Montrer que $\overrightarrow{OF} = 2\cos\left(3\frac{\pi}{4}\right)\vec{i} + 2\sin\left(-3\frac{\pi}{4}\right)\vec{j}$.
3. On considère le point K(2, 1) et on note $\widehat{(\vec{i}, \overrightarrow{OK})} \equiv \theta[2\pi]$.
a. Calculer OK et montrer que $\overrightarrow{OK} = \sqrt{5}(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j})$.
b. Donner les valeurs de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$,

Soit M un point du plan distinct de O. On désigne par m le point de la demi-droite $[OM)$ tel que $Om = 1$ et θ une mesure de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{Om})$.

1. Montrer que $\overrightarrow{OM} = OM\overrightarrow{Om}$.
2. En déduire que $\overrightarrow{OM} = OM(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j})$.
3. Soit un réel $r > 0$ et θ appartenant à $]-\pi, \pi]$.

Montrer qu'il existe un unique point M du plan tel que $\overrightarrow{OM} = r(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j})$.

Théorème

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Pour tout point M du plan distinct de O, il existe un unique couple (r, θ) tel que $r > 0$, θ appartient à $]-\pi, \pi]$ et $\overrightarrow{OM} = r(\cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j})$.

Le couple (r, θ) appelé coordonnées polaires de M, est tel que $r = OM$ et θ est la mesure principale de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.

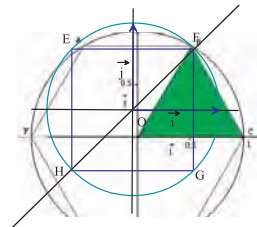
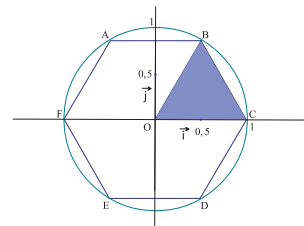
Réciproquement, pour tout couple (r, θ) tel que $r > 0$ et θ appartient à $]-\pi, \pi]$, il existe un unique point M du plan tel que $\overrightarrow{OM} = r(\cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j})$.

M est le point d'intersection du cercle de centre O et de rayon r et de la demi-droite $[OA)$ telle que $(\vec{i}, \overrightarrow{OA}) \equiv \theta[2\pi]$.

Activité 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Dans la figure ci-contre ABCDEF est un hexagone régulier. Donner les coordonnées polaires de chacun des points A, B, C, D, E et F.
2. Dans la figure ci-contre EFGH est un carré et K est le milieu de [FG]. Donner les coordonnées polaires des points F, G et K.



Activité 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit H le point défini par $(\vec{i}, \overrightarrow{OH}) \equiv \theta[2\pi]$ et $OH = 2$.

Donner une équation cartésienne de la droite perpendiculaire à (OH) en H.

Activité 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Représenter l'ensemble des points M de coordonnées polaires $(r, \frac{\pi}{4})$, $r > 0$.

Représenter l'ensemble des points M de coordonnées polaire $(2, \theta)$, θ appartenant à $]-\pi, \pi]$.

Activité 6

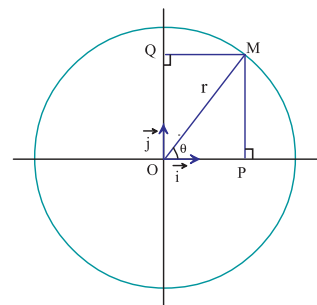
Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère un point $M(x, y)$ distinct de O et on note

$(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) \equiv \theta[2\pi]$.

On désigne par (r, θ) , les coordonnées polaires du point M.

Montrer $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ et $\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.



Propriété

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit M un point du plan distinct de O, de coordonnées cartésiennes (x, y) et de coordonnées polaires (r, θ) . Alors

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Activité 7

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit A un point du plan n'appartenant pas à l'axe des ordonnées. On suppose que $OA=1$ et on note $(\vec{i}, \widehat{OA}) \equiv \theta[2\pi]$.

1. Montrer qu'un point M de coordonnées cartésiennes (x, y) appartient à la droite (OA) si et seulement si $y = x \tan \theta$.

2. Soit C le point de coordonnées cartésiennes $(2, 0)$.

Donner, en fonction de θ , une équation de la droite parallèle à (OA) passant par C.

4. Cosinus et sinus d'un angle orienté

Définition

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. On désigne par $\cos(\vec{u}, \vec{v})$ et $\sin(\vec{u}, \vec{v})$ respectivement le cosinus et le sinus d'une mesure quelconque de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$.

Activité 1

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct, $\vec{u}$ un vecteur non nul de composantes (a, b) dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ et M tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$.

1. Soit $\vec{u}'$ le vecteur vérifiant $\|\vec{u}\| = \|\vec{u}'\|$ et $(\vec{u}, \vec{u}') \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On se propose de déterminer les composantes (x, y) du vecteur $\vec{u}'$. Soit N tel que $\vec{u}' = \overrightarrow{ON}$.

a. Montrer que $(\vec{i}, \vec{u}') \equiv \frac{\pi}{2} + (\vec{i}, \vec{u})[2\pi]$.

b. Montrer $\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et que $\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

c. En déduire que $x = -b$ et $y = a$.

2. Soit $\vec{v}$ un vecteur de composantes (a', b') dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Montrer que $\det(\vec{u}, \vec{v}) = ab' - a'b'$.

Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

1. Montrer que $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \cos(\widehat{\vec{v}, \vec{u}})$ et $\sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = -\sin(\widehat{\vec{v}, \vec{u}})$.
2. Montrer que $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$.
3. Soit $\vec{w}$ un vecteur non nul tel que $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\|$ et $(\widehat{\vec{u}, \vec{w}}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.
 - a. Montrer que $(\widehat{\vec{v}, \vec{w}}) \equiv \frac{\pi}{2} - (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) [2\pi]$.
 - b. En déduire que $\sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\det(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$.
4. On désigne par (x, y) et (x', y') les composantes respectives des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j})$.

Donner les expressions de $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ et $\sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ en fonction de x, y, x' et y' .

Propriétés

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, de composantes (x, y) et (x', y') dans une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j})$. Alors

$$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x'^2 + y'^2}} \quad \text{et} \quad \sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{xy' - yx'}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x'^2 + y'^2}}.$$

Activité 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère les points $A(1, -2)$; $B(4, 1)$; $C(-6, 5)$.

1. Donner une valeur approchée à 10^{-1} radians près de la mesure principale de chacun des angles $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$; $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AC})$; $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC})$; $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$.
2. Montrer que l'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|$.
3. Soit D le point du plan tel que ABCD soit un parallélogramme.

Montrer que l'aire du parallélogramme ABCD est égale à $|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})|$.

Activité 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On se propose de montrer qu'il n'existe pas de triangle équilatéral dont les coordonnées des sommets sont toutes entières.

On désigne par ABC un triangle équilatéral de côté a .

1. a. Montrer que l'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|$.
- b. Montrer que l'aire du triangle ABC est égale à $\frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$.
2. On suppose que les coordonnées de chacun des points A, B et C sont entières.
 - a. Montrer que $|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|$ est entier.
 - b. Conclure.

5. Formules de transformation

Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère les points A et B tels que $OA = OB = 1$.

On désigne par a et b des mesures respectives des angles orientés $(\vec{i}, \overrightarrow{OA})$ et $(\vec{i}, \overrightarrow{OB})$.

1. Donner les composantes des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.
2. Montrer que $b - a$ est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.
3. En déduire les formules suivantes :

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b ; \sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

4. En remplaçant b par $-b$ dans les formules précédentes, montrer que

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b ; \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

5. En prenant $b = a$ dans les formules précédentes, montrer que

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a ; \sin(2a) = 2 \sin a \cos a$$

Activité 2

1. En remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, calculer $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.
2. En déduire $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$, ainsi que $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$.
3. Calculer $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$; $\cos \frac{3\pi}{8}$ et $\sin \frac{3\pi}{8}$; $\cos \frac{5\pi}{8}$ et $\sin \frac{5\pi}{8}$.

Activité 3

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Soit (a, b) un couple de réels tels que $a^2 + b^2 = 1$ et A le point du plan de coordonnées (a, b) . On désigne par φ une mesure de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OA})$.

Montrer que pour tout réel x, $a \cos x + b \sin x = \cos(x - \varphi)$.

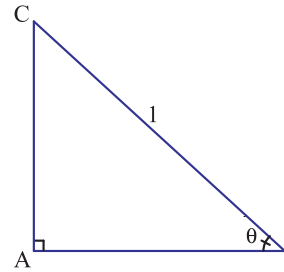
2. En déduire que pour tout couple de réels $(c, d) \neq (0, 0)$ et tout réel x,

$$c \cos x + d \sin x = \sqrt{c^2 + d^2} \cos(x - \varphi), \text{ avec } \cos \varphi = \frac{c}{\sqrt{c^2 + d^2}} \text{ et } \sin \varphi = \frac{d}{\sqrt{c^2 + d^2}}.$$

Activité 4

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $BC = 1$ et

$$\widehat{ABC} = \theta, \theta \text{ appartenant à } \left]0, \frac{\pi}{2}\right[.$$



1. a. Calculer en fonction de θ , le périmètre du triangle ABC.
b. En déduire la valeur de θ pour laquelle le périmètre du triangle ABC est maximal.
2. a. Calculer en fonction de θ , l'aire du triangle ABC.
b. En déduire la valeur de θ pour laquelle l'aire du triangle ABC est maximale.

6. Lignes trigonométriques

Activité 1

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on désigne par $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique de centre O.

Soit a et b deux réels de $]-\pi, \pi]$. On se propose de trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que $\sin a = \sin b$.

1. a. On suppose que $\sin a = 1$.

Enoncer une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que $\sin a = \sin b$.

- b. On suppose que $\sin a = -1$.

Enoncer une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que $\sin a = \sin b$.

2. On suppose que $\sin a$ est un réel de $] -1, 1[$.

On désigne par M et N les points du cercle $\mathcal{C}$ tels que $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) \equiv a[2\pi]$ et

$$(\vec{i}, \overrightarrow{ON}) \equiv b[2\pi].$$

Montrer que $\sin a = \sin b$, si et seulement si, M et N sont soit confondus soit symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Propriété

Soit a et b deux réels.

$\sin a = \sin b$, si et seulement si, $a = b + 2k\pi$ ou $a = \pi - b + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Activité 2

Soit c et d deux réels.

En utilisant l'égalité $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, montrer que $\cos c = \cos d$, si et seulement si, $c = d + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Propriété

Soit a et b deux réels.

$\cos a = \cos b$, si et seulement si, $a = b + 2k\pi$, ou $a = -b + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$.

Activité 3

Soit a et b deux réels de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

On se propose de trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que $\tan a = \tan b$.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on désigne par $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique de centre O et on note M et N deux points de $\mathcal{C}$ tels que

$$(\vec{i}, \widehat{OM}) \equiv a[2\pi] \text{ et } (\vec{i}, \widehat{ON}) \equiv b[2\pi].$$

Montrer que $\tan a = \tan b$, si et seulement si, M et N sont confondus.

Propriété

Soit a et b deux réels de $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \text{ entier} \right\}$.

$\tan a = \tan b$, si et seulement si, $a = b + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

7. Equations $\sin(x + a) = \alpha$. Inéquations $\sin(x + a) \leq \alpha$.

Activité 1

Dans les équations suivantes, x est l'inconnue réelle.

$$(E_0) : \sin x = \frac{1}{2}.$$

$$(E_1) : \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

- Déterminer les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation (E_0) .
- a. Montrer que a est solution de (E_0) si et seulement si $a + \frac{\pi}{3}$ est solution de (E_1) .
b. En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de (E_1) .

Propriété

Soit α un réel de $[-1, 1]$.

x_0 est solution de l'équation $\sin x = \alpha$, si et seulement si, $x_0 - a$ est solution de l'équation $\sin(x + a) = \alpha$.

Activité 2

Dans les équations suivantes, x est l'inconnue réelle.

$$(E_0) : \cos x = -\frac{1}{2}.$$

$$(E_1) : \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}.$$

1. Déterminer les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation (E_0) .
2. a. Montrer que a est solution de (E_0) si et seulement si $a - \frac{\pi}{4}$ est solution de (E_1) .
 b. En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de (E_1) .

Propriété

Soit α un réel de $[-1, 1]$.

x_0 est solution de l'équation $\sin x = \alpha$, si et seulement si, $x_0 - a$ est solution de l'équation $\cos(x + a) = \alpha$.

Activité 3

Dans les inéquations suivantes, x est l'inconnue réelle.

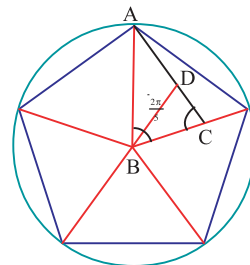
$$(E_0) : \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$(E_1) : \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (E_1) .
2. a. Montrer que a est solution de (E_0) si et seulement si $a - \frac{\pi}{4}$ est solution de (E_1) .
 b. En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de (E_1) .

Situation 1

On considère un triangle ABC isocèle en A tel que $BC = a$ et $\widehat{ABC} = \frac{2\pi}{5}$.
La bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ coupe $[AC]$ en D .



1. Montrer que les triangles ABD et BCD sont isocèles.

En déduire que $AD = BC = a$.

2. a. Montrer que $AB = 2a \cos \frac{\pi}{5}$ et $CD = 2a \cos \frac{2\pi}{5}$.

b. En déduire que $\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}$.

3. Montrer que $BC = BD \cdot \cos \frac{\pi}{5} + CD \cdot \cos \frac{2\pi}{5}$. En déduire que $\cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}$.

4. Calculer $\cos \frac{\pi}{5}$ et $\cos \frac{2\pi}{5}$.

5. Calculer les longueurs des côtés du pentagone régulier et du décagone régulier inscrits dans un cercle de rayon 2.

Situation 2

Soit un réel α .

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$,
on désigne par $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique de centre O .

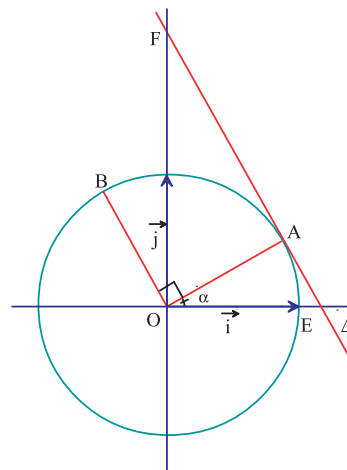
On désigne par A et B les points de $\mathcal{C}$ tels que

$$(\vec{i}, \overrightarrow{OA}) \equiv \alpha [2\pi] \quad (\vec{i}, \overrightarrow{OB}) \equiv \alpha + \frac{\pi}{2} [2\pi].$$

Déterminer les coordonnées polaires du point A .

2. Montrer qu'une équation de Δ est $(\cos \alpha)x + (\sin \alpha)y = 1$.

3. On suppose que α est un réel de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.



a. Calculer les coordonnées des points d'intersection E et F de Δ respectivement avec l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

b. Montrer que l'aire du triangle OEF est égale à 1, si et seulement si, $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

QCM

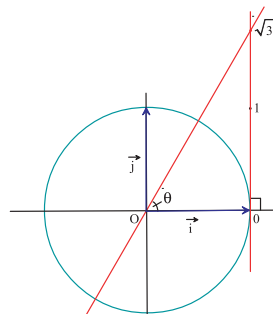
Cocher la réponse exacte.

1. Soit a un réel. $\cos(-\frac{3\pi}{2} - a) =$

- ☐ $\sin a$ ☐ $\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right)$ ☐ 0 .

2. Dans la figure ci-contre, on a représenté dans un repère orthonormé direct le cercle trigonométrique de centre O . Alors θ est congru modulo 2π à

- ☐ $\frac{\pi}{6}$ ☐ $\frac{\pi}{3}$ ☐ π .

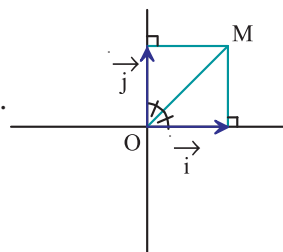


3. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on considère des points A , B et C tels que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv 3\frac{\pi}{4} [2\pi]$ et $AB = AC = 1$.

- ☐ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ☐ $3\sqrt{2}$ ☐ 6 .

4. Dans la figure ci-contre, $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé direct. Les coordonnées polaires de M sont

- ☐ $\left(-\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$ ☐ $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ ☐ $\left(-\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$.



5. Soit x un réel. $\sqrt{3} \cos x - \sin x =$

- ☐ $2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ ☐ $2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ ☐ $2\cos x + 2\cos\frac{\pi}{6}$.

VRAI - FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Pour que x soit une solution de l'équation $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$ il suffit que $x - \frac{\pi}{6}$ soit une solution de l'équation $\cos x = 1$.

2. Si $\cos x = \frac{1}{2}$ alors $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Pour que les coordonnées cartésiennes de M soient $(1, 1)$ il faut que les coordonnées polaires de M soient $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$.

4. Si $x \neq -\frac{\pi}{3}$ alors $\tan x \neq -\sqrt{3}$.

5. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on considère un point A n'appartenant pas à la droite (OJ) .

Si $\widehat{IOA} = \theta$ (en radians), alors la droite (OA) a pour équation $y = (\tan\theta) x$.

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Représenter sur le cercle trigonométrique, l'ensemble des points M tels que

$$(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) \equiv \theta[2\pi] \text{ et } -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin \theta \leq \frac{\sqrt{3}}{2}, \theta \in]-\pi, \pi].$$

2. Résoudre dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$, puis dans

$$\text{l'intervalle }]0, 2\pi], -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin \theta \leq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Exercice 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Représenter sur le cercle trigonométrique, l'ensemble des points M tels que

$$(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) \equiv \theta[2\pi] \text{ et } -\frac{1}{2} \leq \cos \theta \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, \theta \in]-\pi, \pi].$$

2. Résoudre dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$, puis dans

$$\text{l'intervalle }]0, 2\pi], -\frac{1}{2} \leq \cos \theta \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Exercice 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Représenter sur le cercle trigonométrique, l'ensemble des points M tels que

$$(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) \equiv \theta[2\pi] \text{ et } \tan \theta < \sqrt{3}.$$

2. Résoudre dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$, puis dans

$$\text{l'intervalle }]0, 2\pi], \tan \theta < \sqrt{3}.$$

Exercice 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Représenter l'ensemble des points M de coordonnées polaires (r, θ) .

$$\text{a. } \begin{cases} \theta = \frac{3\pi}{4}, \\ r \in [2, 5]. \end{cases} \quad \text{b. } \begin{cases} \theta = -\frac{\pi}{6}, \\ r \in [\sqrt{2}, 4]. \end{cases}$$

$$\text{c. } \begin{cases} \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right], \\ r = 4. \end{cases} \quad \text{d. } \begin{cases} \theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right], \\ r = \sqrt{3}. \end{cases}$$

Exercice 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Déterminer et représenter l'ensemble des points M de coordonnées polaires $\left(r, -\frac{\pi}{3}\right)$, $r > 0$.

2. Déterminer et représenter l'ensemble des points M de coordonnées polaires $(4, \theta)$, $\theta \in]-\pi, \pi]$.

Exercice 6

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Déterminer les coordonnées polaires du point M défini par ses coordonnées cartésiennes.

- a. $M(1, -\sqrt{3})$ b. $M(4, -4)$ c. $M(3, 0)$
d. $M(0, \sqrt{2})$ e. $M(\sqrt{3}, 1)$.

Exercice 7

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère le carré OABC de centre S tel que les coordonnées cartésiennes respectives de A et C sont $(1, \sqrt{3})$ et $(-\sqrt{3}, 1)$.

1. Faire une figure.
2. Déterminer les coordonnées polaires de chacun des points A, C, B et S.

Exercice 8

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère les points A, B, C, D, E, F et G de coordonnées polaires respectives

$$\left(2, \frac{\pi}{6}\right), \left(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right), \left(2\sqrt{3}, \frac{\pi}{3}\right),$$

$$\left(4, \frac{\pi}{2}\right), \left(2\sqrt{3}, \frac{2\pi}{3}\right), \left(2\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right) \text{ et } \left(2, \frac{5\pi}{6}\right).$$

1. Placer les points A, B, C, D, E, F et G.
2. Déterminer les coordonnées cartésiennes des points A, B, C, D, E, F et G.
3. Montrer que ces points se trouvent sur un même cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

Exercice 9

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit A le point de coordonnées polaires $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ et les points B et C tels que $\overrightarrow{OB} = -2\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OA}$.

1. Placer les points A, B et C dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
2. Déterminer les coordonnées polaires de chacun des points B et C.

Exercice 10

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit M le point de coordonnées polaires $\left(4, -\frac{\pi}{5}\right)$.

Déterminer les coordonnées polaires de chacun des points ci-dessous.

- a. E le symétrique de M par rapport à l'axe $(O, \vec{i})$.
- b. F le symétrique de M par rapport à l'axe $(O, \vec{j})$.
- c. G le symétrique de M par rapport au point O.

Exercice 11

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit S et T les points de coordonnées polaires respectives $(3, 0)$ et $\left(3, \frac{4\pi}{7}\right)$.

Soit E le point tel que OSET est un losange.

1. Déterminer les coordonnées polaires du point E.
2. Calculer l'aire du losange OSET.

Exercice 12

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Placer les points A et B de coordonnées polaires respectives $\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$ et $\left(5, -\frac{3\pi}{2}\right)$.
2. Déterminer une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.
3. Déterminer les coordonnées cartésiennes des points A et B.
4. Calculer la distance AB.

Exercice 13

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère les points A, B et C de coordonnées

polaires respectives $\left(2, -\frac{\pi}{6}\right)$, $\left(5, \frac{3\pi}{4}\right)$ et $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$.

1. a. Déterminer les coordonnées cartésiennes de chacun des points A, B et C.

b. En déduire une valeur approchée à 10^{-2} près de la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

2. Calculer l'aire du triangle ABC.

Exercice 14

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$,

on désigne par ABCD un losange tel que la mesure principale de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est négative ; $\widehat{BAD}$ est obtus

et $\sin \widehat{BAD} = \frac{3}{5}$.

1. Calculer $\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ et $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

2. En déduire $\sin(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ et $\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$.

Exercice 15

L'ensemble des vecteurs du plan est muni d'une base orthonormée directe. On considère trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ et $(\vec{u}, \vec{w}) \equiv \frac{\pi}{12}[2\pi]$.

Calculer le cosinus et le sinus de chacun des angles orientés ci-dessous.

$(\vec{u}, -\vec{v})$; $(\vec{u}, 3\vec{u})$; $(\vec{v}, \vec{w})$; $(-2\vec{w}, -5\vec{v})$.

Exercice 16

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on considère le triangle ABC tel que $AB = 5$, $AC = 4$ et

$$\widehat{BAC} = \frac{2\pi}{3}.$$

Calculer $|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|$.

Exercice 17

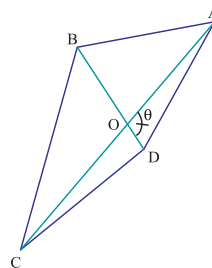
Dans la figure ci-contre ABCD est un quadrilatère dont les diagonales (AC) et (BD) se coupent en O.

On désigne par θ la mesure en radians d'un des angles formé par les deux diagonales.

1. Montrer que l'aire S du quadrilatère ABCD est donnée par,

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \theta.$$

2. Déterminer les mesures à 10^{-1} radians près, des angles formés par les diagonales d'un rectangle de longueur 8 et de largeur 6.



Exercice 18

Soit x un réel.

1. Montrer que $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{2}$.

Exercice 19

1. Vérifier que pour tout réel x , $(\cos x - \sin x)^2 = 1 - \sin 2x$.
2. Soit x un réel appartenant à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ vérifiant $\cos x - \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
 - a. Calculer $\sin 2x$.
 - b. En déduire x .

Exercice 20

Soit x un réel appartenant à $]-\pi, \pi]$.

1. Déterminer x sachant que $\sin x = \sin \frac{2\pi}{7}$ et $\cos x < 0$.
2. Déterminer x sachant que $\cos x = \cos \frac{4\pi}{9}$ et $\sin x > 0$.

Exercice 21

Résoudre dans $[0, 2\pi[$, chacune des équations ci-dessous.

- a. $\cos x = -\frac{1}{2}$
- b. $\cos x = -\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$
- c. $\cos x = \cos 3x$
- d. $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$.

Exercice 22

Résoudre dans $]-\pi, \pi]$, chacune des équations ci-dessous.

- a. $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
- b. $\sin 2x = -1$
- c. $\sin 2x = -\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$
- d. $\sin 3x = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$.

Exercice 23

Résoudre dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ puis dans $\mathbb{R}$, chacune des équations ci-dessous.

- a. $\tan x = -\sqrt{3}$
- b. $\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 1$
- c. $\tan x = -\tan(x + \pi) - 2$.

Exercice 24

Résoudre dans $[0, 2\pi[$ puis dans $\mathbb{R}$, chacune des inéquations ci-dessous.

- a. $\cos x < \frac{1}{2}$
- b. $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 25

Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ puis dans $\mathbb{R}$, chacune des inéquations ci-dessous.

- a. $\sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$
- b. $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) < 0$
- c. $-\frac{1}{2} < \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 26

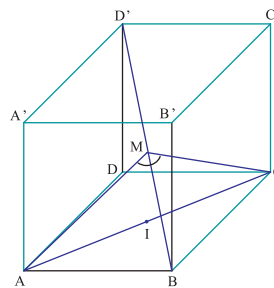
On considère $A(x) = \cos^2 x + \cos^2\left(x + \frac{2\pi}{6}\right) + \cos^2\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$

et $B(x) = \sin^2 x + \sin^2\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin^2\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$.

1. Calculer $A(x) + B(x)$ et $A(x) - B(x)$.
2. En déduire $A(x)$ et $B(x)$.

Exercice 27

Dans la figure ci-contre ABCDA'B'C'D' est un cube d'arête 1, et M est un point de la diagonale [BD'].



On note $\widehat{AMC} = \alpha$.

1. Montrer que le triangle AMC est isocèle en M et en déduire que $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2AM}$.
2. Montrer qu α est maximale lorsque M est le projeté orthogonal de A sur (BD').
3. En déduire que la valeur maximale de α vérifie $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Trouver cette valeur.

Avec l'ordinateur

On considère l'équation $\sin x + \cos x = k$, où k est un réel donné.

On se propose dans cette séquence, d'illustrer et de prouver une résolution géométrique de cette équation à l'aide du logiciel cabri.

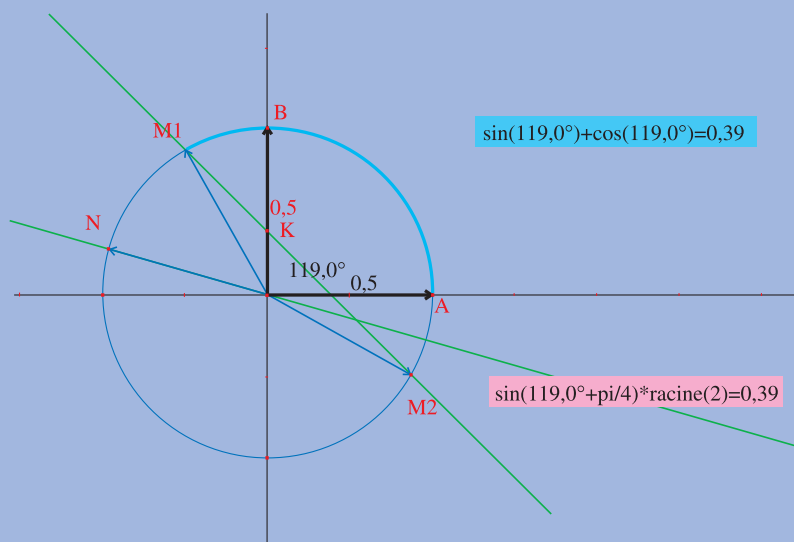
Partie A

1. Après avoir montré les axes, tracer le cercle trigonométrique C et placer un point variable K sur l'axe des ordonnées (on notera k son ordonnée).
2. Tracer la droite D_k parallèle à (AB) et passant par K où $A(1, 0)$ et $B(0, 1)$.
 D_k coupe éventuellement C en deux points M_1 et M_2 .
3. Mesurer $\widehat{AOM_1}$ ou $\widehat{AOM_2}$.
4. Déterminer les coordonnées de chacun des points K , M_1 et M_2 puis à l'aide de la calculatrice, calculer $\sin(\widehat{AOM_1}) + \cos(\widehat{AOM_1})$ et comparer le résultat à l'ordonnée de K , en faisant varier K sur l'axe des ordonnées.
5. Justifier qu'un réel x_0 est solution de l'équation $\sin x + \cos x = k$, si et seulement si, le point M_0 du cercle trigonométrique associé à x_0 est un point de la droite D_k .

Partie B

On se propose de vérifier dans cette partie que l'équation $\sin x + \cos x = k$ est équivalente à $\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = k$.

1. Placer le point N sur C tel que $(\widehat{OM_1}, \widehat{ON}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$ (N est l'image de M_1 par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$).
2. Déterminer les coordonnées (x_N, y_N) de N , puis à l'aide de la calculatrice, calculer $\sqrt{2}y_N$ et comparer le résultat à l'ordonnée de K , en faisant varier K sur l'axe des ordonnées.



L'une des tâches de la trigonométrie fut donc l'établissement de tables permettant le passage de la mesure des angles à celle des arcs et des cordes de cercles.

Al Khawarizmi (IX^{ème} – X^{ème} siècle) fut le premier mathématicien arabe à fournir les tables des sinus, améliorées plus tard par Nasreddine Al Tusi.

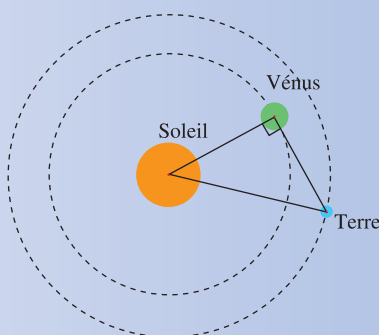
Juste après, Habash Al-Hassib, inventa la tangente.



Pour calculer les distances entre le Soleil et les planètes (en particulier la planète Vénus), il faut mesurer l'angle sous lequel on les voit. Quand les trois planètes forment un triangle rectangle en V, Copernic a mesuré l'angle $\widehat{STV}$ et l'a trouvé égal à 48° .

Ainsi $SV = ST \sin 48^\circ$.

La distance de Vénus au Soleil est environ égale à 0,74 fois celle de la Terre au Soleil.



Chapitre 4

Nombres complexes

*" Les mathématiques, science
de l'éternel et de l'immuable,
sont la science de l'irréel. "*

Renan

Pour commencer

Activité 1

Soit $\mathbb{F}$ l'ensemble des nombres de la forme $a + b\sqrt{2}$, où a et b sont deux entiers relatifs.

Soit $x = a + b\sqrt{2}$ et $x' = a' + b'\sqrt{2}$ deux éléments de $\mathbb{F}$.

1. Montrer que $x = x'$, si et seulement si, $a = a'$ et $b = b'$.
2. Peut-on affirmer que $x + x'$ et $x.x'$ appartiennent à $\mathbb{F}$?

Activité 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on désigne par $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique de centre O .

1. Placer les points A , B et C de $\mathcal{C}$ tels que

$$(\vec{u}, \overrightarrow{OA}) \equiv \frac{5\pi}{6} [2\pi], \quad (\vec{u}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{-\pi}{3} [2\pi] \text{ et } (\vec{u}, \overrightarrow{OC}) \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi].$$

2. Déterminer les coordonnées cartésiennes des points A , B et C .

Activité 3

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points

$$A(\sqrt{3}, 1); B(0, -1); C(2, -2) \text{ et } D(-2, 2\sqrt{3}).$$

1. Déterminer les coordonnées polaires de chacun de ces points.
2. Placer ces points.

1. Définition et propriétés

1.1 Définition et opérations sur les nombres complexes

Activité 1

On considère les équations

$$(E_1): x + 2 = 0 \quad ; \quad (E_2): x^2 - 2 = 0 \quad ; \quad (E_3): 2x^2 - 3x - 2 = 0 \quad ; \quad (E_4): x^2 + 1 = 0.$$

Résoudre chacune de ces équations dans $\mathbb{N}$, dans $\mathbb{Z}$, dans $\mathbb{Q}$ et dans $\mathbb{R}$.

Soit a un réel strictement négatif. L'équation $x^2 = a$ n'admet pas de solutions réelles. Par contre, elle admet des solutions dans un ensemble contenant $\mathbb{R}$, appelé ensemble des nombres complexes et noté $\mathbb{C}$.

Théorème et définition

Il existe un ensemble appelé ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, vérifiant les propriétés suivantes :

1. L'ensemble $\mathbb{C}$ contient l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.
2. Il existe dans $\mathbb{C}$ un élément noté i tel que $i^2 = -1$.
3. L'ensemble $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication, qui vérifient les mêmes propriétés que l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$.
4. Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit de façon unique sous la forme $a + ib$, où a et b sont deux réels.

Vocabulaire et notation

L'écriture $z = a + ib$ est appelée écriture cartésienne ou algébrique du nombre complexe z .

Le réel a est appelé la partie réelle de z et est noté $\Re(z)$.

Le réel b est appelé la partie imaginaire de z et est noté $\Im(z)$.

Le nombre complexe z est appelé imaginaire pur si $\Re(z) = 0$ et $\Im(z) \neq 0$.

Conséquences

Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes tels que a, b, a', b' appartiennent à $\mathbb{R}$. Alors

- $z = z'$, si et seulement si, $a = a'$ et $b = b'$.
- $z = 0$, si et seulement si, $a = 0$ et $b = 0$.
- $b = 0$, si et seulement si, z appartient à $\mathbb{R}$.

Activité 2

- On donne les nombres complexes $z = 1 + 2i$ et $z' = -3 + i$.
Déterminer l'écriture cartésienne de chacun des nombres complexes ci-dessous.
 $z + z'$; $z - z'$; $z \times z'$; $z + iz'$; $z^2 - z'^2$; $-z^3$; $(-z')^2$.
- Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes tels que a, b, a', b' appartiennent à $\mathbb{R}$.
 - Vérifier que $zz' = aa' + i(ab' + a'b) - bb'$.
 - En déduire $\Re(z \times z')$ et $\Im(z \times z')$.

Propriété

Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes tels que a, b, a', b' appartiennent à $\mathbb{R}$.

- $\Re(z + z') = \Re(z) + \Re(z')$ et $\Im(z + z') = \Im(z) + \Im(z')$.
- $\Re(-z) = -\Re(z)$ et $\Im(-z) = -\Im(z)$.
- $\Re(z \times z') = aa' - bb'$ et $\Im(z \times z') = ab' + a'b$.

Activité 3

- Calculer $(1 + i)(1 - i)$, $(1 + i)^2$, $(-1 + i)^3$.
- a. Calculer i^3, i^4, i^5, i^6, i^7 et i^8 .
b. Calculer i^n , $n \in \mathbb{N}$.
- Déterminer l'écriture cartésienne de chacun des nombres complexes $-3 \times i^{58}$ et $6 \times i^{2006}$.
- Déterminer l'écriture cartésienne de chacun des nombres complexes $(i - \sqrt{3})^3$ et $(-1 + i)^4$.

Activité 4

On donne les nombres complexes $z = 1 - i$ et $z' = -2 + i$.

- Calculer $(1 - i)(1 + i)$ et en déduire que $\frac{1}{1 - i} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$.
- Utiliser le même procédé que la question 1, pour déterminer l'écriture cartésienne de chacun des nombres complexes ci-dessous.

$$\frac{1}{z'} \quad ; \quad \frac{1}{z \times z'} \quad ; \quad \frac{1}{z^2} \quad ; \quad \frac{1}{z'^2}.$$

- Soit z un nombre complexe non nul tel que $z = a + ib$, a, b appartenant à $\mathbb{R}$.
 - Vérifier que $\frac{1}{z} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$.

- En déduire $\Re\left(\frac{1}{z}\right)$ et $\Im\left(\frac{1}{z}\right)$.

Propriété

Soit z un nombre complexe non nul tel que $z = a + ib$, a, b appartenant à $\mathbb{R}^*$. Alors

$$\Re\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad \text{et} \quad \Im\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Activité 5

1. Calculer $(1+i)(1-i)^{-1}$, $(1+i)^{-2}$, $(-1+i)^{-3}$ et en déduire leur écriture cartésienne.
2. a. Déterminer l'écriture cartésienne de i^{-3} , i^{-4} , i^{-5} , i^{-6} , i^{-7} et i^{-8} .
b. Calculer i^{-n} , $n \in \mathbb{N}$.
3. Déterminer l'écriture cartésienne de chacun des nombres complexes $-3 \times i^{-52}$ et $6 \times i^{-3000}$.
4. Déterminer l'écriture cartésienne de chacun des nombres complexes $(i - \sqrt{3})^{-3}$ et $(-1+i)^{-4}$.

1. 2 Conjugué d'un nombre complexe

Définition

Soit z un nombre complexe tel que $z = a + ib$, a, b appartenant à $\mathbb{R}$.

On appelle conjugué de z et on note $\bar{z}$ le nombre complexe $\bar{z} = a - ib$.

Activité 1

Déterminer les conjugués des nombres complexes ci-dessous.

$$1 + 2i \quad ; \quad -\sqrt{2} + 3i \quad ; \quad i \quad ; \quad i^3.$$

On établit facilement les propriétés ci-dessous.

Propriétés

- Pour tous nombres complexes z et z' et tout entier naturel non nul n , on a

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'} \quad ; \quad \overline{zz'} = \bar{z} \times \bar{z'} \quad ; \quad \overline{z^n} = \bar{z}^n.$$

- Pour tout nombre complexe non nul z et tout entier naturel n , on a

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}} \quad ; \quad \overline{\left(\frac{1}{z^n}\right)} = \frac{1}{\bar{z}^n}.$$

- $z = -\bar{z}$, si et seulement si, z est réel.
- $z = -\bar{z}$, si et seulement si, z est imaginaire.

Activité 2

Déterminer les conjugués des nombres complexes ci-dessous.

$$(1+i)^2(-3+2i) \quad ; \quad \frac{1}{2-i} \quad ; \quad \frac{2i}{1+i} \quad ; \quad \frac{5-i}{5+i}.$$

1. 3 Equation $z^2 = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Activité 1

- a. Soit z un nombre complexe. Factoriser l'expression $z^2 + 1$.
b. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = -1$.
- Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $z^2 = 2$ et $z^2 = -2$.

Théorème

Pour tout réel α non nul, l'équation $z^2 = \alpha$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{C}$.

Si $\alpha > 0$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = \alpha$ sont $\sqrt{\alpha}$ et $-\sqrt{\alpha}$.

Si $\alpha < 0$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = \alpha$ sont $i\sqrt{|\alpha|}$ et $-i\sqrt{|\alpha|}$.

2. Interprétation géométrique

2. 1 Affixe d'un point – Affixe d'un vecteur

Activité 1

Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

- Pour chacun des cas ci-dessous, placer le point M de coordonnées $(\Re(z), \Im(z))$.
 $z = 2$, $z = -3i$, $z = 1 - 2i$, $z = 3 + i$ et $z = -1 + 3i$.

- Déterminer chacun des ensembles

$$E_1 = \{M(\Re(z), \Im(z)) \text{ tels que } \Im(z) = 0\} \text{ et } E_2 = \{M(\Re(z), \Im(z)) \text{ tels que } \Re(z) = 0\}.$$

Théorème

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

A tout nombre complexe $z = a + ib$ tel que a et b appartiennent à $\mathbb{R}$, on associe un unique point $M(a, b)$ du plan P .

A tout point $M(a, b)$ du plan P , on associe un unique nombre complexe $z = a + ib$ tel que a et b appartiennent à $\mathbb{R}$.

Vocabulaire et notation

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct.

- Le nombre complexe $z = a + ib$ tel que a et b appartiennent à $\mathbb{R}$ est appelé l'affixe du point $M(a, b)$ et est noté $\text{Aff}(M)$.

Le point M de coordonnées (a, b) est appelé l'image du nombre complexe $z = a + ib$ et est noté $M(z)$.

- Le plan muni d'un repère orthonormé direct est appelé plan complexe.

Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. Placer les points A, B, C, D et E d'affixes respectives

$$z_A = 2, z_B = -3i, z_C = 1 - 2i, z_D = 3 + i \text{ et } z_E = -1 + 3i.$$

2. Placer alors les points A', B', C', D' et E', symétriques respectifs de A, B, C, D et E, par rapport à $(O, \vec{u})$.

3. Déterminer les affixes de A', B', C', D' et E'. Que remarque-t-on ?

Propriété

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit z un nombre complexe d'image M. Alors l'image de $\bar{z}$ est le symétrique de M par rapport à l'axe $(O, \vec{u})$.

Activité 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

A tout point M d'affixe $z = x + iy$ tel que x et y appartiennent à $\mathbb{R}$, on associe le point M' d'affixe $z' = x^2 + y^2 - x + 2y + i(-2x + y + 1)$.

1. Déterminer l'ensemble des points M tels que $z' = \bar{z}'$.

2. Déterminer l'ensemble des points M tels que $z' = -\bar{z}'$.

Activité 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

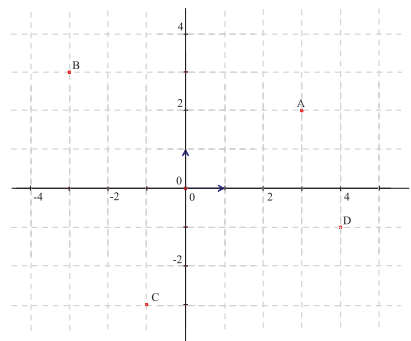
On a représenté ci-contre les points A, B, C et D.

1. Déterminer z_A, z_B, z_C et z_D les affixes respectives des points A, B, C et D.

2. Soit M le point tel que $\vec{OM} = \vec{AD}$. On note z_M l'affixe de M. Exprimer z_M à l'aide de z_A et z_D .

3. a. Montrer que $\vec{BC} = 2\vec{AD}$.

b. Vérifier que $z_C - z_B = 2(z_D - z_A)$.



Définition

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit M et N deux points d'affixes respectives z_M et z_N .

Le nombre complexe $z_N - z_M$ est appelé l'affixe du vecteur $\vec{MN}$ et est noté $\text{Aff}(\vec{MN})$.

Propriété

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tous réels α et β ,

$$\text{Aff}(\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}) = \alpha \times \text{Aff}(\vec{u}) + \beta \times \text{Aff}(\vec{v}).$$

2. 2 Module d'un nombre complexe

Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit M un point d'affixe $z = a + ib$.

Exprimer la distance OM en fonction de a et b.

Définition

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit z un nombre complexe d'image M.

On appelle module de z, le réel positif noté $|z|$ et défini par $|z| = OM$.

Propriétés

- Pour tout nombre complexe z, $|z| = 0$, si et seulement si, $z = 0$.
- Pour tous points M et N du plan complexe d'affixes respectives z_M et z_N , $|z_N - z_M| = MN$.

Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $-2-i$; $2i$; $-2i$; $2+i$.

1. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?
2. Déterminer BD, 2AC, AO.

Activité 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On désigne par A, B, C et Ω les points du plan ayant pour affixes respectives

$$z_A = 1 ; z_B = 3 + 2i ; z_C = 4 - i\sqrt{3} \text{ et } z_\Omega = 3.$$

1. On désigne par E l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie la relation $|z - 3| = 2$.
 - a. Les points A, B et C sont-ils des points de E ?
 - b. Déterminer E puis le tracer.

2. On désigne par F l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie la relation $|z - 1| = |z - 3 - 2i|$. Déterminer F puis le tracer.

Activité 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On désigne par E l'ensemble des points M du plan d'affixes z telles que $|z| = 3$.

1. Déterminer E puis le tracer.
2. On considère le point $A(-3, -4)$.
Déterminer les coordonnées du point M de l'ensemble E tel que la distance AM soit maximale.

2. 3 Propriétés du module d'un nombre complexe

Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit M et N deux points d'affixes respectives z_M et z_N .

On désigne par S le point tel que $\vec{OS} = \vec{OM} + \vec{ON}$.

1. Déterminer une condition suffisante portant sur les points O , M et N pour que $\|\vec{OS}\| = \|\vec{OM}\| + \|\vec{ON}\|$.
2. Montrer que pour tous nombres complexes z et z' , on a $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

Propriété

Pour tous nombres complexes z et z' et tout réel λ , $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ et $|\lambda z| = |\lambda| |z|$.

Activité 2

Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ tels que a, b, a', b' appartiennent à $\mathbb{R}$.

1. Calculer le module de λz , $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Calculer le module de zz' et z^n , pour tout entier naturel non nul n .
2. On suppose que z est non nul. Calculer le module de $\frac{1}{z}$.

Propriétés

- Pour tous nombres complexes z et z' et tout entier naturel non nul n , on a $|zz'| = |z||z'|$; $|z^n| = |z|^n$ et $\mathbb{R}$
- Pour tout nombre complexe non nul z et tout entier naturel n , on a $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$; $\left|\frac{1}{z^n}\right| = \frac{1}{|z|^n}$.

Activité 3

Calculer les modules des nombres complexes ci-dessous.

$$2(1+i)^2 ; (-2+3i)(2-i) ; i^6 ; \frac{(-\sqrt{2}+i)^3}{(\sqrt{2}-i)^4}.$$

3. Argument d'un nombre complexe non nul

3.1 Définition

Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives

$$z_A = -2, z_B = 3i, z_C = 1+i \text{ et } z_D = \sqrt{3}-i.$$

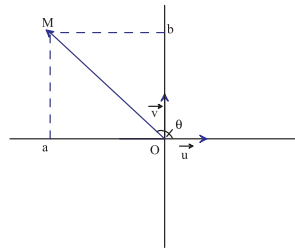
Déterminer les coordonnées polaires de chacun des points A, B, C et D.

b. En déduire une nouvelle écriture des nombres complexes z_A, z_B, z_C et z_D .

2. Soit M un point d'affixe non nulle $z_M = a + ib$.

On note (r, θ) les coordonnées polaires de M.

Montrer que $z_M = r(\cos \theta + i \sin \theta)$.



Définition

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit z un nombre complexe non nul et M son image.

On appelle argument de z et on note $\arg(z)$, toute mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.

Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe non nul z , dans chacun des cas suivants.

$$\arg(z) \equiv 0[2\pi] ; \quad \arg(z) \equiv \pi[2\pi] ; \quad \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] ; \quad \arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi].$$

2. Représenter les ensembles

$$E = \left\{ M(z) \in P / \arg(z) \equiv \frac{3\pi}{4}[2\pi] \right\} ; \quad F = \left\{ M(z) \in P / \arg(z) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi] \right\}.$$

3.2 Ecriture trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Le théorème ci-dessous découle de la définition d'un argument et du module d'un nombre complexe, ainsi que des coordonnées polaires d'un point du plan orienté.

Théorème

Soit z un nombre complexe non nul et θ appartient à $\mathbb{R}$.

Si $\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$, alors $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$.

Réciproquement, si $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, $r > 0$, alors $r = |z|$ et $\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$.

Vocabulaire

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

L'écriture $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ est appelée écriture trigonométrique de z .

La forme polaire de z est la donnée des coordonnées polaires de son image M , c'est à dire la donnée de $|z|$ et de la mesure principale de $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.

Activité 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct.

1. Déterminer une écriture trigonométrique de chacun des nombres complexes suivants.

$$z_1 = -1 + i ; z_2 = \sqrt{3} - i ; z_3 = 1 + i\sqrt{3} ; z_4 = 2 + 2i.$$

2. En déduire les coordonnées polaires de leurs images.

3. 3 Propriétés de l'argument d'un nombre complexe non nul

Activité 1

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls d'écritures trigonométriques

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \text{ et } z' = r'(\cos \theta' + i \sin \theta').$$

1. a. Déterminer l'écriture cartésienne de $z \times z'$.

b. Montrer que $z \times z' = rr'(\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta'))$.

c. En déduire une écriture trigonométrique de z^2 .

2. Déterminer une écriture trigonométrique de $\frac{z}{z'}$.

Propriété

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls d'écriture trigonométriques

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \text{ et } z' = r'(\cos \theta' + i \sin \theta').$$

$$\bullet z \times z' = rr'(\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')).$$

$$\bullet z^2 = r^2(\cos(2\theta) + i \sin(2\theta)).$$

$$\bullet \frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}(\cos(\theta - \theta') + i \sin(\theta - \theta')).$$

Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$; $z_B = 1 - i$ et $z_C = \frac{z_A}{z_B}$.

1. Déterminer une écriture trigonométrique de chacun des nombres complexes z_A et z_B .
2. Déterminer une écriture trigonométrique du nombre complexe z_C .
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Activité 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On désigne par A un point d'affixe $z_A = \frac{\sqrt{3} + i}{2}$.

1. Déterminer le module et un argument de z_A .
2. On désigne par B l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
 - a. Déterminer z_B l'affixe de B.
 - b. Déterminer l'affixe du point B' symétrique de B par rapport à l'axe des abscisses.
3. On désigne par C le point d'affixe $z_C = z_A \times z_B$.

Montrer que C est l'image de A par une rotation que l'on déterminera.

Situation Entiers de Gauss

On appelle ensemble des entiers de Gauss, l'ensemble G des nombres complexes dont la partie réelle et la partie imaginaire sont deux entiers relatifs.

Pour tout α appartenant à G , on note $n(\alpha) = |\alpha|^2$.

1. Vérifier que pour tout α appartenant à G , $n(\alpha)$ appartient à $\mathbb{N}$.

2. Résoudre dans G les équations ci-dessous.

a. $n(\alpha) = 1$.

b. $n(\alpha) = 2$.

c. $n(\alpha) = 3$.



Carl Friedrich Gauss

Soit α et β deux éléments de G tels que $\beta \neq 0$. On dit que β est un diviseur de α dans G , ou que α est un multiple de β dans G , lorsque $\frac{\alpha}{\beta}$ appartient à G .

3. a. Montrer que si β divise α dans G , alors $n(\beta)$ divise $n(\alpha)$ dans $\mathbb{N}$.

b. Etudier la réciproque de la proposition ci-dessus, en considérant les nombres

$$\alpha = 5 + 3i \text{ et } \beta = 4 + i$$

4. Déterminer tous les diviseurs dans G de chacun des nombres complexes 1 , $1 + i$ et $1 - 2i$.

QCM – VRAI – FAUX

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. On considère deux nombres complexes $z = -3i + 2$ et $z' = 1 + i$. Alors $\Im\left(\frac{z}{z'}\right) =$

- ☐ -3 ☐ $-\frac{5}{2}$ ☐ 2 .

2. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit A le point d'affixe $z = \sqrt{3} - i$. Alors $OA =$

- ☐ 2 ☐ $\sqrt{3} - 1$ ☐ $\sqrt{3} + 1$.

3. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit M un point d'affixe z tel que $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$. Alors un argument de $-3z$ est

- ☐ $-\pi$ ☐ $-\frac{2\pi}{3}$ ☐ $-\frac{\pi}{3}$.

4. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit A le point d'affixe $1+i$ et

M un point de la demi droite $[AO)$ d'affixe $z_M \neq 0$. Alors

- ☐ $\arg(z_M) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ ☐ $\arg(z_M) \equiv -\frac{3\pi}{4} [2\pi]$ ☐ $\arg(z_M) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$.

5. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit A et B deux points d'affixes respectives $z_A = 1 + 2i$ et $z_B = -2 - 4i$. Alors

- ☐ $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv 0 [2\pi]$ ☐ $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ ☐ $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \pi [2\pi]$.

VRAI - FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Soit a et b deux nombres complexes. Si $z = a + i b$ alors $a = \Re(z)$ et $b = \Im(z)$.

2. Pour tous nombres complexes z et z' , $|z| = |z'|$, si et seulement si, $z = z'$ ou $z = -z'$.

3. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Si M est un point du cercle trigonométrique d'affixe z alors le point M' d'affixe z^2 appartient au cercle trigonométrique.

4. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Pour tout nombre complexe z non nul, les points d'affixes z et $\frac{1}{z}$ n'appartiennent pas à un même cercle.

5. Pour tout nombre complexe z non nul, $\arg(z^2)$ est congru à $(\arg(z))^2$ modulo 2π .

Exercice 1

Déterminer l'écriture cartésienne de chacun des nombres complexes ci-dessous.

$$(1-i)(1-2i); (2-i)^2 - (3-2i)(3+2i); \frac{5-i}{2i}; \frac{2}{3i} - \frac{3}{1-i}.$$

Exercice 2

Soit $z = 1 - 3i$ et $z' = -3 + 2i$.

Déterminer l'écriture cartésienne de chacun des nombres complexes suivants.

$$1. Z_1 = z \times z'; Z_2 = z^2 \times z'; Z_3 = \frac{z-2}{z'+i}.$$

2. Déterminer l'écriture cartésienne de chacun des nombres complexes suivants :

$$Z_4 = \bar{z} \times z'; Z_5 = z^2 \times \bar{z}'; Z_6 = \frac{z-2}{z'+i}.$$

Exercice 3

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, chacune des équations ci-dessous.

$$z^2 + 3 = 0; z^2 - 3z = 3(1-z) - 6; z^3 - 1 = z - 1.$$

2. a. Soit z un nombre complexe. Vérifier que

$$z^2 - 2z + 4 = (z-1)^2 + 3.$$

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$.

Exercice 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A et B d'affixes respectives

$$z_A = -1 + i, z_B = -\sqrt{2}i + \sqrt{2}.$$

1. Placer les points A et B.

2. Montrer que les points O, A et B sont alignés.

Exercice 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit M un point d'affixe z .

1. On désigne par M' le point d'affixe $z + 2i$.

Montrer que M' est l'image de M par une translation que l'on déterminera.

2. On désigne par M'' le point d'affixe $-3z$.

Montrer que M'' est l'image de M par une homothétie que l'on déterminera.

Exercice 6

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit A, B et C trois points d'affixes respectives

$$z_A = 1 + i, z_B = 3 + i \text{ et } z_C = 1 - 2i.$$

1. a. Calculer $|z_A - z_B|$, $|z_A - z_C|$ et $|z_B - z_C|$.

b. En déduire la nature du triangle ABC.

2. Soit I le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

On désigne par z_I l'affixe de I.

Déterminer l'écriture algébrique du nombre complexe z_I .

Exercice 7

Soit a un réel non nul et $j = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.

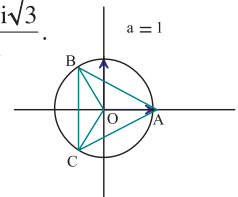
Dans le plan muni d'un repère

orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on

désigne par A, B et C les points

d'affixes respectives a, j et aj^2 .

Montrer que les points A, B et C sont les sommets d'un triangle équilatéral.



Exercice 8

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z dans

chacun des cas suivants.

$$a. |z-3| = 2; b. |z-i| = 1; c. |z-i+1| = 3;$$

$$d. |z-2+i| = |z-1|; e. |z-2i+1| = |z+i|.$$

Exercice 9

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z , tels que

$$|(1+i)z| = 3.$$

Exercice 10

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit A un point d'affixe $1 + i$ et $\vec{w}$ le vecteur d'affixe

$1 + 2i$. Soit M un point du plan d'affixe z .

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur z pour que

a. M appartienne à la droite D passant par A et de vecteur

directeur $\vec{w}$.

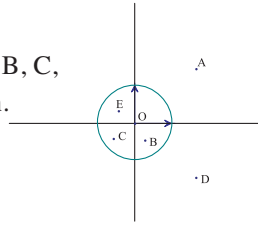
b. M appartienne à la droite D' passant par A et de vecteur normal $\vec{w}$.

c. M appartienne à l'intersection de l'axe des abscisses avec la droite D.

d. M appartienne à la tangente en A au cercle C de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.

Exercice 11

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, A, B, C, D et E sont cinq points du plan. L'affixe de l'un des points est l'inverse de celle de A. Quel est ce point ?



Exercice 12

Déterminer une écriture trigonométrique de chacun des nombres complexes suivants.

$$\frac{2i + 2\sqrt{3}}{4 + 4i}; \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^2; \left(\frac{i}{1-i} \right)^{2006}; -2(-1 + i\sqrt{3})^{100000};$$

$$\cos \frac{\pi}{21} - i \sin \frac{\pi}{21}; \sin \frac{2\pi}{11} + i \cos \frac{2\pi}{11}; 1 - i \tan \frac{\pi}{15}.$$

Exercice 13

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On désigne par C le cercle de centre O et de rayon 2. Soit A le point de C tel que $\widehat{(\vec{u}, \vec{OA})} \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi]$, on note z l'affixe de A.

1. Faire une figure et représenter les points B, C et D d'affixes respectives iz , i^2z et i^3z .
2. Déterminer une écriture trigonométrique des affixes de chacun des points A, B, C et D.
3. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

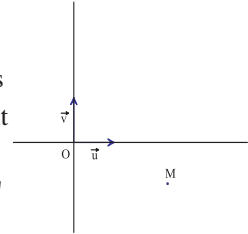
Exercice 14

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit M, N et P trois points du plan d'affixes respectives $z_M = i - \sqrt{3}$, $z_N = iz_M$ et $z_P = \frac{z_M}{z_N}$.

1. Déterminer un argument de chacun des nombres complexes z_M , z_N et z_P .
2. Déterminer et tracer dans chacun des cas suivants, l'ensemble des points H d'affixes z telles que
 - a. $\arg(z) \equiv \arg(z_M) [2\pi]$;
 - b. $\arg(z) \equiv \arg(z_N) [2\pi]$;
 - c. $\arg(z) \equiv \arg(z_P) [2\pi]$.

Exercice 15

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Dans la figure ci-contre, M est un point d'affixe z.



Construire le point M' d'affixe z' dans chacun des cas ci-dessous.

- a. $z' = z - 3i$;
- b. $z' = -2z + 1$;
- c. $z' = iz$.

Exercice 16

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives

$$z_A = 1 + i\sqrt{3}, z_B = 3 + i\sqrt{3}, z_C = 4, z_D = 3 - i\sqrt{3} \text{ et } z_E = 1 - i\sqrt{3}.$$

1. a. Déterminer une écriture trigonométrique de chacun des nombres complexes z_A , z_B , z_C , z_D et z_E .
 b. Représenter les points A, B, C, D et E.
 c. Montrer que D et E sont les images respectives de B et A par la symétrie d'axe $(O, \vec{u})$.
2. Déterminer l'aire du polygone OABCDE.

Exercice 17

Soit O, A et B trois points distincts du plan orienté dans le sens direct tels que $\widehat{(\vec{OA}, \vec{OB})} \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ et $OB = OA = 1$.

On considère les carrés OPQA et OBRS tels que

$$\widehat{(\vec{OA}, \vec{OP})} \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi], \widehat{(\vec{OB}, \vec{OS})} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi].$$

1. Faire une figure.
2. On munit le plan du repère orthonormé direct $(O, \vec{OA}, \vec{OC})$.
 Déterminer les écritures cartésiennes des affixes des points O, A, C, B, Q, P et S.
 b. Déterminer une écriture trigonométrique de l'affixe du point R.
3. Déterminer la position relative des droites (PB) et (QR).

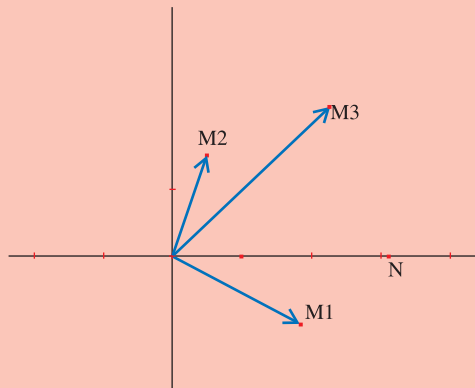
Avec l'ordinateur

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On se propose d'illustrer dans cette séquence, le produit et le quotient de deux nombres complexes, à l'aide du logiciel cabri.

On règle d'abord le système de coordonnées dans les préférences du menu Option à celui des coordonnées polaires en radian.

1. Dans un nouveau fichier, on place deux points M_1 et M_2 .
On notera z_1 et z_2 leurs affixes respectives.
2. A l'aide de l'outil "coord ou équation" on affichera les coordonnées polaires de chacun des points M_1 et M_2 .
3. On construit le point N de la demi-droite $[O, \vec{u})$ telle que $ON = OM_1 \times OM_2$ soit par un procédé géométrique ou en utilisant la calculatrice pour calculer $OM_1 \times OM_2$ puis à l'aide de l'outil "Report de mesure" on reporte $OM_1 \times OM_2$ sur l'axe des abscisses.
4. Utiliser la calculatrice pour calculer la somme $\theta_1 + \theta_2$ des arguments de z_1 et z_2 .
5. A l'aide de l'outil "Rotation", déterminer l'image M_3 de N par la rotation de centre O et d'angle $\theta_1 + \theta_2$. Le point M_3 est d'affixe $z_1 \times z_2$.



Utiliser ce procédé de construction pour donner la construction du point d'affixe $\frac{z_1}{z_2}$.

Déjà au 16ème siècle, Jérôme CARDAN, un mathématicien avant-gardiste, osait utiliser la racine carrée de $-a$, alors que a était positif !

On doit à Gauss une définition précise des nombres complexes (l'épithète est de lui en remplacement du qualificatif imaginaire qu'avait utilisé à l'origine Cardan), l'écriture sous la forme $a + bi$, leur interprétation et représentation géométriques (dont la paternité revient à Argand et l'étude des fonctions analytiques d'une variable complexe.)



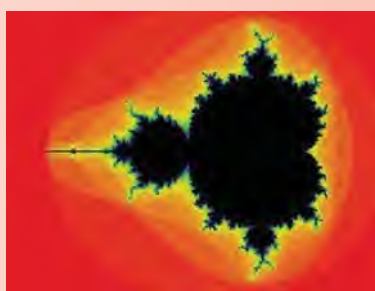
Jérôme CARDAN

Le mathématicien Gaston Julia a eu l'idée de considérer la fonction f définie de l'ensemble X dans lui-même par $f(z) = z^2 + c$, où c est une constante complexe, et de l'itérer une infinité de fois. Il construit alors, à partir d'une valeur initiale de z_0 de z , une suite de points M_n d'affixes définies par la relation $z_{n+1} = z_n^2 + c$. Pour certaines valeurs initiales, la suite converge, c'est-à-dire le point limite reste à distance finie.

L'ensemble des points de départ est appelé de Julia.



Ensemble de JULIA pour $c \approx 0,577 + 0,478i$



Ensemble de Mandelbrot

Chapitre 5

Vecteurs de l'espace

*" L'imagination est plus
importante que la
connaissance. "*

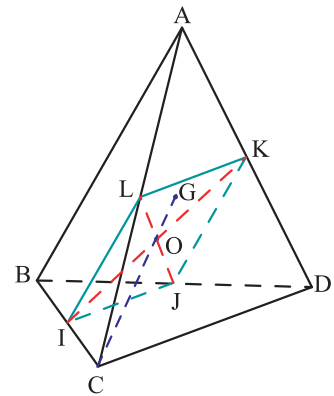
Einstein

Pour commencer

Activité 1

Soit $ABCD$ un tétraèdre. On note I le milieu de $[BC]$, J le milieu de $[BD]$, K le milieu de $[AD]$, L le milieu de $[AC]$ et G le centre de gravité du triangle ABD .

- Montrer que $IJKL$ est un parallélogramme. Soit O son centre.
- a. Montrer que les points A, C, J et G sont coplanaires.
b. Soit T le symétrique de J par rapport à G .
Montrer que la droite (LT) est parallèle aux droites (CG) et (OG) .
c. En déduire que les points C, O et G sont alignés.

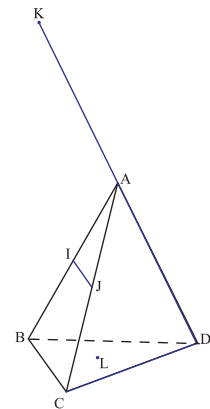


Activité 2

Soit $ABCD$ un tétraèdre. On note I le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[AC]$ et K le symétrique de D par rapport à A .

Les droites (KI) et (KJ) coupent le plan (BCD) respectivement en M et N .

- Reproduire la figure et construire les points M et N .
- Montrer que les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

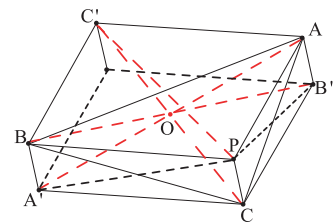


Activité 3

Soit ABC un triangle et P un point distinct de A, B et C .

On note A', B' et C' les symétriques du point P par rapport aux milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.

- On suppose que P appartient au plan (ABC) .
Montrer que les droites (AA') , (BB') et (CC') sont concourantes.
- En est-il de même lorsque P n'appartient pas au plan (ABC) ?



1. Vecteurs de l'espace

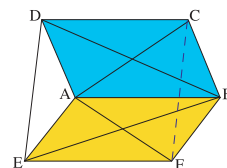
On désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble des points de l'espace.

Activité 1

Soient A, B, C, D, E et F six points de $\mathcal{E}$ tels que les segments $[AC]$ et $[BD]$ aient le même milieu et les segments $[AF]$ et $[BE]$ aient le même milieu.

On se propose de montrer que les segments $[CE]$ et $[DF]$ ont aussi le même milieu.

1. On suppose d'abord que les points A, B, C et E sont coplanaires.
 - a. Montrer que les six points A, B, C, D, E et F sont alors coplanaires.
 - b. Montrer que les segments $[CE]$ et $[DF]$ ont même milieu.
2. On suppose maintenant que les points A, B, C et E ne sont pas coplanaires.
 - a. Quelle est la position relative
 - des droites (CD) et (EF) ?
 - des plans (CBF) et (ADE) ?
 - des droites (CF) et (DE) ?
 - b. En déduire que les segments $[CE]$ et $[DF]$ ont le même milieu.



Définition

- Lorsque deux bipoints (A, B) et (C, D) sont tels que $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu, alors ces bipoints représentent un même vecteur de l'espace, noté $\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{DC}$.
- Les bipoints (M, M) où M est un point quelconque de l'espace représentent le vecteur nul, noté $\vec{0}$.
- L'ensemble des vecteurs de l'espace est noté $\mathcal{W}$.

Conséquence

Soit A, B, C et D quatre points de $\mathcal{E}$ tels que A, B et C ne soient pas alignés. Alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, si et seulement si, $ABCD$ est un parallélogramme.

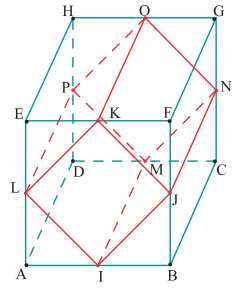
Définition

On appelle norme d'un vecteur $\vec{u}$ et on note $\|\vec{u}\|$, le réel positif défini par $\|\vec{u}\| = AB$, où A et B sont deux points quelconques tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

Activité 2

Dans la figure ci-contre, ABCDEFGH est un cube, I, J, K, L, M, N, O et P sont les milieux respectives des arêtes [AB], [BF], [EF], [AE], [CD], [CG], [GH] et [DH].

1. Nommer des vecteurs égaux à $\overrightarrow{AB}$ et des vecteurs égaux à $\overrightarrow{BC}$.
2. Quelle est la nature du solide IJKLMNOP ? Justifier.

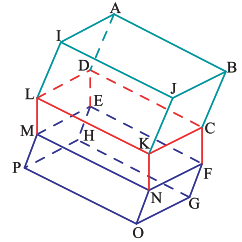


Activité 3

Dans la figure ci-contre les solides ABCDIJKL, CDEFKLMN et EFGHLMNOP sont des parallélépipèdes.

Déterminer le point R dans chacun des cas ci-dessous.

- a. $\overrightarrow{FR} = \overrightarrow{NL}$; b. $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OG}$; c. $\overrightarrow{JR} = \overrightarrow{PH}$; d. $\overrightarrow{HR} = \overrightarrow{IJ}$.



Théorème

Soit O un point de $\mathcal{E}$.

Pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathcal{W}$ il existe un unique point M de $\mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

2. Opérations sur les vecteurs de l'espace

Comme l'ensemble des vecteurs du plan, l'ensemble des vecteurs de l'espace est muni de deux opérations l'addition et la multiplication par un réel.

2.1 Addition des vecteurs

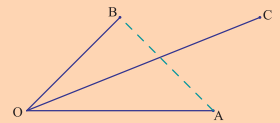
Définition

Soient O un point de $\mathcal{E}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{W}$.

Soit A, B et C les points de $\mathcal{E}$ tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ et [OC] et [AB] ont le même milieu.

On appelle vecteur somme de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le vecteur $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$.

On note $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$.



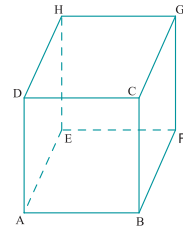
Conséquence

Pour tous points A, B et C de $\mathcal{E}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (Relation de Chasles).

Soit A, B, C et D quatre points de $\mathcal{E}$ tels que A, B et C ne sont pas alignés. Alors ABCD est un parallélogramme, si et seulement si, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Activité 1

Dans la figure ci-contre ABCDEFGH est un cube.



1. Calculer $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG}$, $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{HG}$ et $\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{CB}$.
2. Calculer $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{EH}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{DH}$.

L'addition des vecteurs de l'espace vérifie les mêmes propriétés que l'addition des vecteurs du plan.

Propriétés

- Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de $\mathcal{W}$.
 $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$, $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$, $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.
- Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe un unique vecteur $\vec{v}$ de l'espace tel que
 $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$.
 Le vecteur $\vec{v}$ tel que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$ s'appelle vecteur opposé de $\vec{u}$ et se note $-\vec{u}$.

Notation

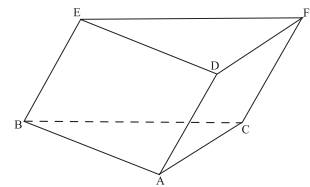
Soit A et B deux points de l'espace. L'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est noté $\overrightarrow{BA}$.

Activité 2

Dans la figure ci-contre ABCDEF est un prisme à base triangulaire.

1. a. Déterminer $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
 b. Déterminer $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC}$.
2. Soit G le point défini par $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.

Montrer que G est le symétrique de D par rapport au milieu I de l'arête [EF].



2. 2 Multiplication d'un vecteur par un réel

Soit $\mathcal{D}$ une droite de l'espace. De façon analogue au plan, la donnée de deux points distincts de $\mathcal{D}$ permet de munir la droite d'un repère affine (A, B) de sorte qu'à tout point M de $\mathcal{D}$, on associe un unique réel α , appelé abscisse de M dans le repère (A, B).

Définition

- Soient O un point de $\mathcal{E}$, $\vec{u}$ un vecteur non nul de l'espace et α un réel.
Soit A le point de $\mathcal{E}$ tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et M le point de la droite (OA) d'abscisse α dans le repère (O, A) .
On appelle vecteur produit de $\vec{u}$ par α et on note $\alpha\vec{u}$ le vecteur $\vec{w}$ tel que $\vec{w} = \overrightarrow{OM}$.
 $\alpha\vec{0} = \vec{0}$.

Conséquence

Soit A, B deux points distincts, α un réel et M un point de l'espace.
Alors $\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB}$, si et seulement si, les points A, M et B sont alignés et M a pour abscisse α dans le repère (A, B) .

Activité 1

Dessiner un tétraèdre $ABCD$, puis construire les points M, P, I et G tels que

$$\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{BP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} ; 2\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CD} = \vec{0} ; \overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{GI} = \vec{0}.$$

La multiplication des vecteurs de l'espace par un réel vérifie les mêmes propriétés que la multiplication des vecteurs du plan par un réel.

Propriétés

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace et pour tous réels α et β ,

- $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$, $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$ et $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$.
- $1\vec{u} = \vec{u}$ et $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$.
- $(-\alpha)\vec{u} = -(\alpha\vec{u})$.
- $\alpha\vec{u} = \vec{0}$, si et seulement si, $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\alpha = 0$.

Activité 2

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Simplifier les écritures ci-dessous.

$$2(\vec{u} - 3\vec{v}) + 3\vec{v} - \vec{u} ; \sqrt{3}(\vec{u} + 3\vec{v}) - 3\left(\sqrt{3}\vec{v} - \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{u}\right).$$

Activité 3

Soit $ABCD$ un tétraèdre et G_1, G_2, G_3 et G_4 les centres de gravité respectifs des faces ABC , ACD , ABD et BCD .

- a. Calculer $\overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{G_1B} + \overrightarrow{G_1C}$.
b. En déduire $\overrightarrow{DG_1}$ à l'aide de $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DC}$.
- Calculer $\overrightarrow{DG_1} + \overrightarrow{BG_2} + \overrightarrow{CG_3} + \overrightarrow{AG_4}$.
- a. Exprimer $\overrightarrow{G_1G_2}$ à l'aide de $\overrightarrow{BD}$.
b. Exprimer $\overrightarrow{G_2G_3}$ à l'aide de $\overrightarrow{BC}$.
c. Exprimer $\overrightarrow{G_3G_4}$ à l'aide de $\overrightarrow{AC}$.

3. Vecteurs colinéaires – Repère cartésien d'une droite

Définition

Deux vecteurs de l'espace sont dits colinéaires si l'un est le produit de l'autre par un réel.

Activité 1

Soit A un point de l'espace, $\vec{u}$ un vecteur non nul et B le point tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

- Déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.
- Soit $\vec{v}$ un vecteur non nul et colinéaire à $\vec{u}$ et C un point distinct de A et B.
Quel est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{CM}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ?

Théorème

Soit A un point de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur non nul.

L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ soient colinéaires est une droite, appelée droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Le couple $(A, \vec{u})$ est appelé repère cartésien de la droite $\mathcal{D}(A, \vec{u})$. De plus,

M appartient à $\mathcal{D}(A, \vec{u})$, si et seulement si, il existe un unique réel α tel que $\overrightarrow{AM} = \alpha \vec{u}$.

Conséquence

Soit A et B deux points de l'espace, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Alors

$\mathcal{D}(A, \vec{u})$ est parallèle à $\mathcal{D}(B, \vec{v})$, si et seulement si, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Activité 2

- Dessiner un cube ABCDEFGH.

Placer le point J tel que $\overrightarrow{EJ} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AC}$ et le point I tel que $\overrightarrow{JI} = \overrightarrow{EF}$.

- Soit K le point tel que $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{AC} + 4\overrightarrow{AB}$.

Montrer que la droite (EI) est parallèle à la droite (AK).

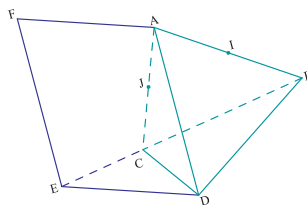
- Soient M et N les points de $\mathcal{E}$ tels que EFIJABMN soit un parallélépipède.

Montrer que les points A, C et N sont alignés.

Activité 3

Dans la figure ci-contre ABCD est un tétraèdre, I est le milieu de [AB], J est le milieu de [AC], les points E et F sont tels que $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{DE}$.

- Déterminer la droite $\mathcal{D}(C, \overrightarrow{IJ})$.
- Déterminer le point O, intersection de (IJ) et (AE).
- Déterminer les droites $\mathcal{D}_1(O, \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DE})$, $\mathcal{D}_2(O, \frac{1}{2} \overrightarrow{BC})$, $\mathcal{D}_3(E, \overrightarrow{DF} - \overrightarrow{DA})$.



4. Combinaison linéaire – Repère cartésien d'un plan

Activité 1

Dessiner un tétraèdre ABCD.

1. Placer le point M tel que $\overrightarrow{4MA} = -3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
2. Placer le point N tel que $-\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{ND} = \vec{0}$.
3. Placer le point P tel que $2\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PD} = \vec{0}$.

Activité 2

Soit ABCD un tétraèdre, I et J les milieux respectifs des arêtes [AB] et [CD].

1. Montrer que $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$.
2. Exprimer $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$.

Définition

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathcal{W}$.

On dit que $\vec{w}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, s'il existe deux réels α et β tels que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.

Lorsque l'un des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est une combinaison linéaire des deux autres, on dit que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement dépendants ou encore que la famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est liée.

Activité 3

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{W}$, $\vec{e}$, $\vec{f}$ et $\vec{g}$ les vecteurs tels que $\vec{e} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$, $\vec{f} = \vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$ et $\vec{g} = -\vec{u} + 5\vec{v}$.

1. Calculer $\vec{e} + 2\vec{g}$, puis exprimer $\vec{v}$ en fonction de $\vec{e}$ et $\vec{g}$.
2. Calculer $\vec{g} = -\vec{u} + 5\vec{v}$, puis exprimer $\vec{u}$ en fonction de $\vec{e}$ et $\vec{g}$.
3. En déduire que $\vec{f}$ est une combinaison linéaire de $\vec{e}$ et $\vec{g}$.

Activité 4

Soient A, B et C trois points non alignés de l'espace. On note $\mathcal{P}$ le plan (ABC).

1. Soit M un point de $\mathcal{P}$.

La droite Δ passant par M et parallèle à (AC) coupe (AB) en un point H.

La droite Δ' passant par M et parallèle à (AB) coupe (AC) en un point K.

Montrer qu'il existe un unique couple (x, y) de réels tel que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.

2. Soient α et β deux réels et N le point de l'espace tel que $\overrightarrow{AN} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$.

Montrer que N appartient à $\mathcal{P}$.

Théorème

Soit A un point de l'espace et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires.

L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ soit combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est un plan, appelé plan passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

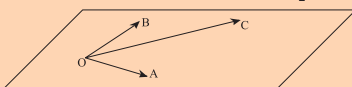
Le triplet $(A, \vec{u}, \vec{v})$ est appelé repère cartésien du plan $\mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$.

Un point M appartient au plan $\mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$, si et seulement si, il existe un unique couple de réels (x, y) tel que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

Conséquence

Soient O, A, B et C quatre points de E .

O, A, B et C sont coplanaires, si et seulement si, $\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\}$ est liée.



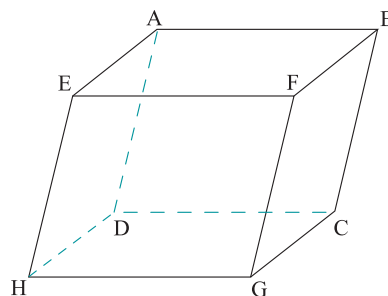
Activité 6

Dans la figure ci-contre, $ABCDEFGH$ est un parallélépipède.

1. Dire dans chacun des cas suivants si la famille de vecteurs est une famille liée.

- a. $\{\overrightarrow{GH}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{AE}\}$; b. $\{\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{FG}\}$;
c. $\{\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EH}\}$; d. $\{\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}\}$.

2. Déterminer $\mathcal{P}(E, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{HC})$, $\mathcal{P}'(D, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{GC})$.



Activité 7

Soient O, A et B trois points non alignés de $\mathcal{E}$ et soient C et D deux points distincts de $\mathcal{E}$.

1. On suppose que la droite (CD) est parallèle au plan (OAB) .

a. Montrer qu'il existe un unique point E du plan (OAB) tel que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OE}$.

b. En déduire que $\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{CD}\}$ est une famille liée.

2. On suppose que $\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{CD}\}$ est une famille liée.

Montrer que la droite (CD) est parallèle au plan (OAB) .

3. Soit A et B deux points distincts de l'espace, $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls tels que $\vec{v}$ et $\vec{w}$ soient non colinéaires.

Montrer que la droite $\mathcal{D}(A, \vec{u})$ est parallèle au plan $\mathcal{P}(B, \vec{v}, \vec{w})$, si et seulement si, la famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est liée.

Propriété

Soit A et B deux points distincts de $\mathcal{E}$ et $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls tels que $\vec{v}$ et $\vec{w}$ soient non colinéaires. Alors la droite $\mathcal{D}(A, \vec{u})$ est parallèle au plan $\mathcal{P}(B, \vec{v}, \vec{w})$, si et seulement si, la famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est liée.

Activité 8

Soit A et B deux points distincts de l'espace. On considère quatre vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}'$ et $\vec{v}'$ tels que $\vec{u}, \vec{v}$ sont non colinéaires et $\vec{u}', \vec{v}'$ sont non colinéaires.

Montrer que les plans $\mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$ et $\mathcal{P}'(B, \vec{u}', \vec{v}')$ sont parallèles, si et seulement si, les familles $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}'\}$ et $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}'\}$ sont liées.

Propriété

Soit A et B deux points distincts de $\mathcal{E}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires et $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$ deux vecteurs non colinéaires. Alors

$\mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$ et $\mathcal{P}'(B, \vec{u}', \vec{v}')$ sont parallèles, si et seulement si, $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}'\}$ et $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}'\}$ sont liées.

Activité 9

Soit ABCDEFGH un parallélépipède.

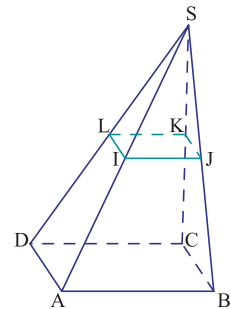
Montrer que les plans (ACF) et (DEG) sont parallèles.

Activité 10

Dans la figure ci-contre SABCD est une pyramide dont la base est un parallélogramme.

Les points I, J, K et L sont les milieux des arêtes.

1. Montrer que la droite (IK) est parallèle au plan (ABC).
2. Montrer que les plans $\mathcal{P}(L, \vec{AC}, \vec{JK})$ et (ABC) sont parallèles.
3. Donner un vecteur directeur de la droite passant par S et parallèle à l'intersection des plans (CIL) et (AJK).

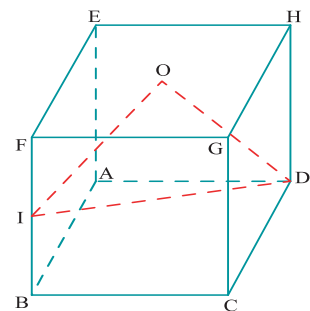


5. Bases – Repères cartésiens

Activité 1

Soit ABCDEFGH un cube. On note O le centre de la face EFGH et I le milieu de l'arête [BF].

1. La famille $\{\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE}\}$ est-elle liée ? Justifier.
2. La famille $\{\vec{OI}, \vec{OD}, \vec{OF}\}$ est-elle liée ? Justifier.
3. La famille $\{\vec{OI}, \vec{OD}, \vec{OE}\}$ est-elle liée ? Justifier.



Définition

Soient $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs de $\mathcal{W}$.

Le triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base de $\mathcal{W}$, si la famille $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ n'est pas liée.

Soit O un point de $\mathcal{E}$.

On dit que $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère cartésien de $\mathcal{E}$ si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base de $\mathcal{W}$.

Vocabulaire

Lorsque la famille de vecteurs $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ n'est pas liée, on dit que c'est une famille libre.

Conséquence

Soient A, B, C et D quatre points de $\mathcal{E}$.

Le triplet $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ est une base de $\mathcal{W}$, si et seulement si, les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

Activité 2

Soient O, I, J et K quatre points non coplanaires de $\mathcal{E}$.

Soit M un point quelconque de $\mathcal{E}$.

On mène de M la droite Δ parallèle à la droite (OK)

et le plan $\mathcal{P}$ parallèle au plan (OIJ).

Le point H est le projeté de M sur le plan (OIJ) parallèlement à la droite (OK)
Le point T est le projeté de M sur la droite (OK) parallèlement au plan (OIJ).

1. a. Montrer que Δ coupe (OIJ) en un point qu'on notera H.
b. Montrer la droite (OK) coupe le plan $\mathcal{P}$ en un point qu'on notera T.
c. En déduire l'existence d'un unique triplet (x, y, z) de réels tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.
2. Préciser le triplet de réels (x, y, z) dans chacun des cas ci-dessous.
 - a. $M = O$.
 - b. $M = I$.
 - c. $M = J$.
 - d. $M = K$.
 - e. M est le milieu de $[JK]$.
 - f. M est le symétrique de I par rapport à J.
3. Soient $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$, $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$ et $\vec{u}$ un vecteur quelconque de l'espace.
Montrer qu'il existe un unique triplet (x, y, z) de réels tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Théorème

Soit O un point de E et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base de $\mathcal{W}$.

- Pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathcal{W}$ il existe un unique triplet (x, y, z) de réels tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Le triplet (x, y, z) s'appelle le triplet de composantes du vecteur $\vec{u}$ dans la base

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et on note $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

- Pour tout point M de l'espace il existe un unique triplet (x, y, z) de réels tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Le triplet (x, y, z) s'appelle le triplet de coordonnées du point M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Vocabulaire

Si (x, y, z) est le triplet des coordonnées de M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, alors

x s'appelle l'abscisse de M dans ce repère et $(O, \vec{i})$ est l'axe des abscisses.

y s'appelle l'ordonnée de M dans ce repère et $(O, \vec{j})$ est l'axe des ordonnées.

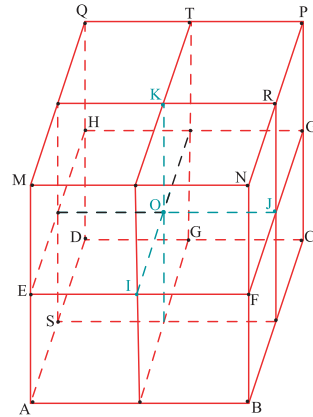
z s'appelle la cote de M dans ce repère et $(O, \vec{k})$ est l'axe des côtes.

Activité 3

Dans la figure ci-contre, $ABCDMNPQ$ est un cube formé de huit petits cubes identiques.

On considère le repère cartésien $(O, \vec{OI}, \vec{OJ}, \vec{OK})$.

- Donner les coordonnées de chacun des points A, B, Q, R, S et T .
- Déterminer les points $L(1, 1, 1), X(0, -1, 1), Y(-1, 0, -1)$ et $Z(1, -1, 0)$.



Activité 4

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de $\mathcal{W}$.

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathcal{W}$ et α un réel.

Déterminer les composantes de $\vec{u} + \vec{v}$ et de $\alpha \vec{u}$.

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de $\mathcal{W}$.

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathcal{W}$, α et β deux réels.

Les composantes de $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont $\begin{pmatrix} \alpha a + \beta a' \\ \alpha b + \beta b' \\ \alpha c + \beta c' \end{pmatrix}$.

Activité 5

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère cartésien de $\mathcal{E}$.

- a. Soient $M(x, y, z)$ et $N(x', y', z')$ deux points quelconques de $\mathcal{E}$.

Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{MN}$.

- b. Déterminer les coordonnées du milieu I du segment $[MN]$.

2. Soit le point $A\left(2, -1, \frac{1}{2}\right)$.

- Déterminer les coordonnées du point B de $\mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Placer les points A et B .

- Soit I le milieu de $[OA]$.

Déterminer les coordonnées du point J tel que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{AB}$.

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère cartésien de $\mathcal{E}$ et $M(x, y, z)$ et $N(x', y', z')$ deux points de $\mathcal{E}$.

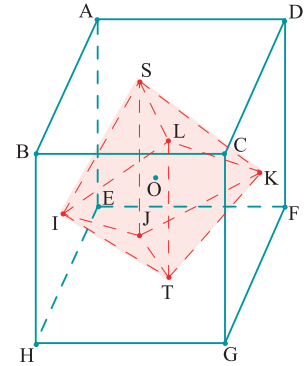
Le milieu de $[MN]$ a pour coordonnées

$$\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}, \frac{z+z'}{2} \right).$$

Activité 6

Dans la figure ci-contre, ABCDEFGH est un cube de centre O, les points I, J, K, L, S et T sont les centres des faces du cube.

- On munit l'espace du repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.
 - Déterminer les coordonnées des points O, I, J, K, L, S et T.
 - Montrer que O est le milieu de [ST].
 - Montrer que IJKL est un parallélogramme de centre O.
- On munit l'espace du repère $(I, \overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IL}, \overrightarrow{IS})$.
Déterminer les coordonnées des points K, T et O.



6. Déterminant de trois vecteurs

Définition

Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de $\mathcal{W}$ et $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ un triplet de vecteurs de $\mathcal{W}$

tels que $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix}$.

On appelle déterminant de $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ dans la base $\mathcal{B}$, et on note $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$ le réel $a(b'c'' - c'b'') - b(a'c'' - c'a'') + c(a'b'' - b'a'')$.

Activité 1

Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de $\mathcal{W}$.

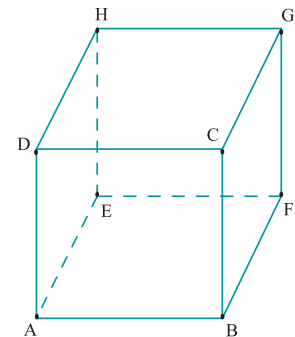
- Calculer $\det_{\mathcal{B}}(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
- On considère les vecteurs $\vec{r} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{s} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Calculer $\det_{\mathcal{B}}(\vec{r}, \vec{s}, \vec{t})$.

Activité 2

Dans la figure ci-contre ABCDEFGH est un cube.

- Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ forment-ils une base ? Justifier.
 - Déterminer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ dans la base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BF})$.
 - En déduire $\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.
- Reprendre la question précédente pour les vecteurs $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{DH}$ et $\overrightarrow{EF}$.



Théorème (admis)

Un triplet de vecteurs de $\mathcal{W}$ forme une base, si et seulement si, son déterminant relativement à une base quelconque de $\mathcal{W}$ est différent de 0.

Activité 3

Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de $\mathcal{W}$. Soit $\vec{e} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{f} = \vec{i} + \vec{k}$ et $\vec{g} = \vec{k} + \vec{j}$.

1. Montrer que $(\vec{e}, \vec{f}, \vec{k})$ est aussi une base de $\mathcal{W}$. On la notera $\mathcal{B}'$.
2. Déterminer les composantes de chacun des vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Activité 4

L'espace est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit les points $A(1, 2, 0)$, $B(0, -1, 1)$, $C(-1, 0, 2)$ et $D(1, 0, 0)$.

Montrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.

Activité 5

Soit ABCDEFGH un cube d'arête 1.

On considère les points P et Q tels que $\overrightarrow{EP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EH}$, $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

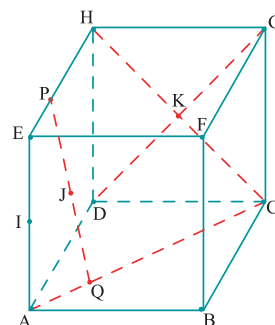
et on note I le milieu de [AE], J le milieu de [PQ] et K le centre de la face CDHG.

On munit l'espace du repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. Déterminer les coordonnées des points I, J et K.

En déduire qu'ils sont alignés.

2. Les points J, Q, K et H sont-ils coplanaires ?
3. Les points I, P, Q et K sont-ils coplanaires ?



Activité 6

On considère un tétraèdre régulier ABCD.

On désigne par E et F les points tels que $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{DE}$.

1. Soit I et J les milieux respectifs des arêtes [AB] et [AC].

Quelle est la nature des quadrilatères ECIJ et ADEF ?

2. En considérant une base adéquate, montrer que les vecteurs $\overrightarrow{DI}$, $\overrightarrow{DJ}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont linéairement dépendants.

Activité 7

On considère un tétraèdre ABCD tels que $DA = 3$, $DB = 2$ et $DC = 4$. Les points M, N et P appartiennent respectivement aux arêtes [DA], [DB] et [DC] tels que $DM = DN = DP = 1$.

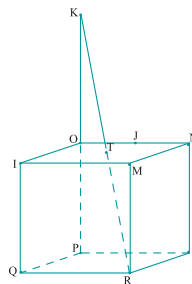
L'espace est muni du repère cartésien $(D, \overrightarrow{DM}, \overrightarrow{DN}, \overrightarrow{DP})$.

1. Déterminer les coordonnées des points A, B et C.
2. Soit I et J les milieux respectifs de [AB] et [CD] et L le point tels que $\overrightarrow{BL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.
Les points I, J, M et L sont-ils coplanaires ?

QCM – VRAI – FAUX

QCM

Dans la figure ci-contre OIQPNMRS est un parallélépipède,
J est le milieu de l'arête [ON] et O est le milieu du segment [KP].
La droite (KR) coupe le plan (IOJ) en T.
Soit $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})$ un repère cartésien de $\mathcal{E}$.
Cocher la réponse exacte.



1. ☐ $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OP}$ ☐ $\overrightarrow{KO} = \overrightarrow{MR}$ ☐ $\overrightarrow{SJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{RI}$.
2. ☐ $\{\overrightarrow{OT}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OS}\}$ est liée ☐ $\{\overrightarrow{MR}, \overrightarrow{KO}, \overrightarrow{KR}\}$ est liée ☐ $\{\overrightarrow{OT}, \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OS}\}$ est liée.
3. ☐ $M(1, 2, 0)$ ☐ $R(1, 1, -1)$ ☐ $T\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$.
4. ☐ $\overrightarrow{OS} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ☐ $\overrightarrow{NO} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ☐ $\overrightarrow{MR} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
5. ☐ $\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{IQ}, \overrightarrow{RT}) \neq 0$ ☐ $\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{TJ}, \overrightarrow{RS}, \overrightarrow{OP}) \neq 0$ ☐ $\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{IQ}, \overrightarrow{RP}) \neq 0$.

VRAI – FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Si deux droites ont deux vecteurs directeurs colinéaires alors ces deux droites sont strictement parallèles.
2. Si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement dépendants alors deux de ces vecteurs sont colinéaires.
3. Si $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathcal{W}$ alors $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$.
4. Si $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathcal{W}$ et $\vec{u}'$ est un vecteur non nul colinéaire à $\vec{u}$, alors $(\vec{u}', \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathcal{W}$.
5. Si $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathcal{W}$ alors la droite $\mathcal{D} (A, \vec{u} + \vec{v})$ est parallèle au plan $\mathcal{P}(\vec{B}, \vec{v}, \vec{w})$.

Situation 1

On considère un tétraèdre ABCD. On désigne par I, J, K, L, M et N les milieux respectifs des arêtes [AB], [AC], [AD], [BC], [BD] et [CD]. On désigne par G_1, G_2, G_3 et G_4 les centres de gravité respectifs des faces BCD, ACD, ABD et ABC.

1. Montrer qu'il existe un unique point G tel que $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$.

2. a. Montrer que les points G, I et N sont alignés.
b. Montrer que les droites (IN), (JM) et (KL) sont concourantes.
3. a. Montrer que les points G, G_1 et A sont alignés.
b. Montrer que les droites $(AG_1), (BG_2), (CG_3)$ et (DG_4) sont concourantes.

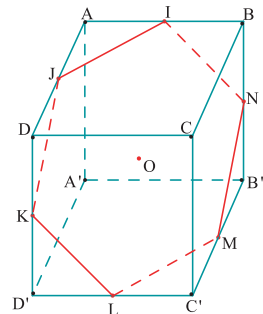
4. Montrer que $\vec{GG_1} + \vec{GG_2} + \vec{GG_3} + \vec{GG_4} = \vec{0}$.

Situation 2

Dans la figure ci-contre ABCDA'B'C'D' est un cube de centre O et d'arête 1. Les points I, J, K, L, M et N sont les milieux respectifs des segments [AB], [AD], [DD'], [C'D'], [B'C'] et [BB'].

On munit l'espace du repère $(A, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AA'})$.

1. Déterminer les coordonnées des points O, I, J, K, L, M et N.
2. Montrer que les points O, I, J, K, L, M et N sont coplanaires.
3. Montrer que les segments [IL], [JM], et [KM] se coupent en leurs milieux.
4. Montrer que IJKLMN est un hexagone régulier.
Déterminer son centre.



Exercices et problèmes

Exercice 1

Soit ABCDEFGH un parallélépipède.

- Exprimer $\overrightarrow{BH}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BF}$.
- Soit I le centre de gravité du triangle ACF. Montrer que les points I, B et H sont alignés.
- Soit J le centre de gravité du triangle DEG. Montrer que les points J, B et H sont alignés.

Exercice 2

Soit ABCD un tétraèdre. On définit les points P, Q, R et S par $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AQ} = 2\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{CR} = 2\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{CS} = 2\overrightarrow{CB}$.

Quelle est la nature du quadrilatère PQRS ?

Exercice 3

Soit ABCDEFGH un cube.

Déterminer les points P, Q et R tels que

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{CH} ; \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{BF} ; \overrightarrow{DR} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{HB}).$$

Exercice 4

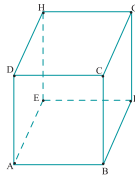
Soit ABCDEFGH un cube.

On note I le milieu de [AE],

J le milieu de [GH] et O

le milieu de [CH].

- Montrer que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AO}$.
- En déduire que la droite (IJ) est parallèle au plan (ACH).
- Exprimer $\overrightarrow{IJ}$ à l'aide de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AH}$.
- Déterminer $\mathcal{D}(O, \overrightarrow{IJ})$, $\mathcal{D}'(G, \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{OF})$.



Exercice 5

Soit SABC un tétraèdre.

- Faire une figure et placer les points E et F tels que $\overrightarrow{SE} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB}$ et $\overrightarrow{SF} = 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{SB}$.
- Montrer que la droite (EF) est parallèle au plan (SAC).

Exercice 6

Soit A, B, C et D quatre points non coplanaires et T le point tel que $2\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AD}$.

Montrer que les points A, C, D et T sont coplanaires.

Exercice 7

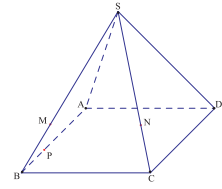
Dans la figure ci-contre,

SABCD est une pyramide dont la base ABCD est un parallélogramme.

On considère les points M, N

et P tels que $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BS}$, $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CS}$ et $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

- Montrer que la droite (MN) est parallèle au plan (SAD).
- Montrer que les plans (MNP) et (SAD) sont parallèles.



Exercice 8

Soit ABCD un tétraèdre.

On note G et G' les centres de gravité respectifs des triangles ABC et BCD.

On désigne par O, I et J les milieux respectifs des segments [BC], [AB] et [BD].

- Montrer que $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{GG'}$.
- Déterminer l'intersection des plans (OAD) et (CIJ).

Exercice 9

L'espace est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- Représenter chacun des points ci-dessous.

$$A\left(-1, \frac{1}{3}, 0\right); B\left(0, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{3}\right); C\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right); D\left(0, -\frac{2}{5}, 0\right).$$

- Déterminer les composantes des vecteurs $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF}$; $2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{CA}$; $-\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CD}$.

Exercice 10

L'ensemble des vecteurs de l'espace est muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Dans chacun des cas ci-dessous, vérifier si $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base.

$$a. \vec{u} \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{w} \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix};$$

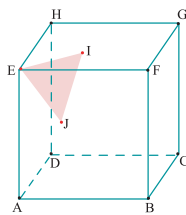
$$b. \vec{u} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \frac{3}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \vec{w} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}.$$

Exercice 11

Dans la figure ci-contre

ABCDEFGH est un cube.

Les points I et J sont les milieux respectifs des segments [EG] et [AF].



On munit l'espace du repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. Déterminer les coordonnées des points H, I et J.
2. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont colinéaires.
3. En déduire que la droite (IJ) est parallèle au plan (ADE).
4. Montrer que les plans (IJE) et (ADE) sont sécants suivant une droite $\mathcal{L}$ dont on précisera un point et un vecteur directeur.

Exercice 12

Soit ABCDEFGH un parallélépipède.

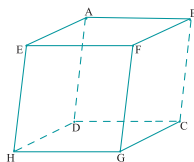
On note I, J et K les milieux respectifs de [AC], [AD] et [AH].

1. Soit G et G' les centres de gravité respectifs des triangles CDH et IJK.

Montrer que $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AG'}$.

2. Soit O le milieu de [EC].

Montrer que OIJK est un parallélogramme.



Exercice 13

Soit ABCDA'B'C'D' un cube.

On désigne par I, J, K, L, M, N et O les milieux respectifs des segments [AD], [BC], [DD'], [CC'], [A'D'] et [A'B'].

En considérant un repère cartésien convenable répondre aux questions suivantes.

1. Les points A, J, K et L sont-ils coplanaires ?
2. Les points M, D, B' et J sont-ils coplanaires ?
3. Les points N, O, I et L sont-ils coplanaires ?

Exercice 14

L'ensemble des vecteurs de l'espace est muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{w} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -18 \end{pmatrix}$

et le point $A(1, 1, 4)$.

1. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils linéairement dépendants ?
2. On considère le point $M(5, -1, -14)$.
Le point M appartient-il au plan $\mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$?

Exercice 15

Soit ABCDEFGH un cube et soit n un entier naturel non nul. On considère les points I, J et K tels que

$$\overrightarrow{BI} = \frac{1}{n+1} \overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{CJ} = \frac{1}{n+1} \overrightarrow{CD} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{GK} = \frac{1}{n} \overrightarrow{GH}.$$

1. On suppose que $n = 2$.

- a. Faire une figure et placer les points I, J et K correspondants.
 - b. Exprimer $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{FK}$ à l'aide de $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$.
 - c. Les points F, I, J et K sont-ils coplanaires ?
2. Les points F, I, J et K sont-ils coplanaires quelque soit la valeur de n ?

Exercice 16

L'espace est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(1, 3, 0)$, $B(3, 1, 0)$, $C(4, 4, 0)$ et $D(4, 4, 0)$.

On désigne par I, J et L les points tels que

$$\overrightarrow{DI} = \frac{2}{5} \overrightarrow{DA}, \quad \overrightarrow{DJ} = \frac{1}{6} \overrightarrow{DC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DL} = \frac{2}{5} \overrightarrow{DB}.$$

1. Déterminer les coordonnées des points I, J et L.
2. Représenter les points A, B, C, D, I, J et L.
3. Les points I, J, L et D sont-ils coplanaires ?

Exercice 17

Soit ABCD un tétraèdre tel que $AB = AC = AD = 1$.

On désigne par I, J, K, L, M et N les milieux respectifs des segments [AB], [CD], [AC], [BD], [AD] et [BC].

En considérant un repère cartésien convenable répondre aux questions ci-dessous.

1. Montrer que le quadrilatère INJM est un parallélogramme.
2. On désigne par O le centre du parallélogramme INJM.

$$\text{a. Montrer que } \overrightarrow{BM} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BS}, \quad \overrightarrow{CN} = \frac{1}{3} \overrightarrow{CS} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AP} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}.$$

- b. Montrer que la droite (KL) passe par O.

3. On désigne par G le centre de gravité du triangle BCD.

Montrer que la droite (AG) passe par O.

Exercice 18

L'espace est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(1, 2, -1)$, $B(-1, 3, 2)$ et $C(3, 1, 5)$.

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Soit x et y deux réels et D un point de coordonnées $(5, x, y)$.

Peut-on déterminer x et y tels que les points A, B et D soient alignés ?

3. Soit z un réel et E un point de coordonnées $(z, 4, 3)$.

Peut-on déterminer z tel que A, B, C et E soient coplanaires ?

Exercice 19

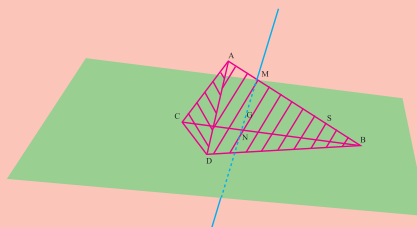
Dans la figure ci-contre ABCDA'B'C'D' est un cube d'arête 2. Les points I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[AD]$, $[CC']$ et $[AA']$. On munit l'espace du repère $(A, \vec{AI}, \vec{AJ}, \vec{AL})$.

1. Déterminer les coordonnées des sommets du cube.
2. Reproduire la figure et placer les points $M(-1, 2, 0)$ et $N(2, -1, 0)$.
3. Montrer que la droite (IJ) coupe les droites (CD) et (BC) respectivement en M et N.
4. Placer les points d'intersection respectifs E et F des droites (KM) et (KN) avec chacune des droites (DD') et (BB').
5. a. Exprimer $\vec{DE}$ et $\vec{BF}$ à l'aide de $\vec{CK}$.
b. En déduire les coordonnées des points E et F.
6. Déterminer la section du cube par le plan (IJK).

Avec l'ordinateur

Soit ABCD un tétraèdre. On note G son isobarycentre, c'est-à-dire le point vérifiant $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$ et S le point de $[AB]$ tel que $\vec{AS} = \frac{3}{4}\vec{AB}$.

Soit M un point variable sur l'arête $[AB]$ privé de S. On se propose de déterminer l'ensemble des points T intersection du plan (BCD) et de la droite (MG).



1. Créer les points A, B, C et D comme étant des points libres de l'espace, puis le tétraèdre ABCD comme polyèdre convexe défini par ses sommets.
2. Créer le milieu I du segment $[AB]$.
3. Créer le point G comme barycentre de la liste des points pondérés $(A,1)$, $(B,1)$, $(C,1)$ et $(D,1)$.
4. Créer le point S comme image de B par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{3}{4}$.
5. Créer un point libre M, sur le segment $[AB]$ puis créer la droite (MG), le plan (BCD).
6. Créer le point d'intersection N de la droite (MG) et du plan (BCD).
7. Faire varier le point M et proposer une conjecture concernant l'ensemble des points N.

Qu'est ce qu'une couleur

La sigle RGB désigne le rouge (R), le vert (G pour green) et le bleu (B).

L'éclairement simultané par du rouge et du vert donne du **jaune** (Y pour Yellow); du bleu et du vert donnent une couleur turquoise appelée **cyan** (C) et enfin le rouge et le bleu se combinent pour donner un violet appelé **magenta** (M). Ce qui donne la sigle CMY

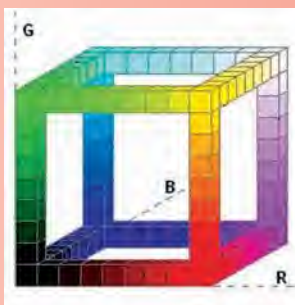
Enfin un éclaircissement simultané par les trois couleurs de base donne du **blanc** (W pour White). Au départ on avait du **noir** (K de black).

On peut régler l'intensité de chacune des trois couleurs fondamentales et obtenir ainsi toutes les couleurs possibles.

En superposant du jaune et du magenta on obtiendra du rouge (le jaune "mange" le bleu du magenta); de même du jaune et du cyan donneront du vert et la superposition du magenta et du cyan donnera du bleu. Enfin la superposition des trois couleurs fondamentales donnera du noir.

Dans la définition par **RGB**, les couleurs sont représentées par les points d'un cube, un des sommets correspond au noir (0, 0, 0) et le sommet opposé au blanc (1, 1, 1). Nous avons choisi l'unité correspondant aux 3 couleurs fondamentales dans leur intensité maximale.

Soit par exemple, les deux vecteurs d'origine (0, 0, 0) dont les extrémités sont respectivement (1, 1, 1), le vecteur dirigé selon la grande diagonale du cube, et **(R, G, B)**, le vecteur aboutissant au point représentatif de la couleur donnée.



Chapitre 6

Produit scalaire dans l'espace

*" Ce qui est affirmé sans
preuve peut être nié sans
preuve. "*

Euclide

Pour commencer**Activité 1**

1. Soit ABCD un parallélogramme d'aire S .

Montrer que $S = AB \cdot BC \cdot \sin \widehat{ABC}$.

2. Soit A' le point tel que $ABA'C$ soit un parallélogramme et S' l'aire de $ABA'C$.

Montrer que $S = S'$.

Activité 2

On considère un cube ABCDEFGH, d'arête 1 et on munit l'espace du repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. On désigne par I et J les centres de gravité respectifs des triangles AHF et BDG.

a. Calculer les coordonnées de I et J.

b. Exprimer $\overrightarrow{IJ}$ à l'aide de $\overrightarrow{EC}$.

2. a. Quelle est la position relative des deux plans (AHF) et (BDG) ?

b. Déterminer l'axe du cercle circonscrit au triangle AFH.

c. Déterminer la droite perpendiculaire aux plans (AHF) et (BDG) et passant par E.

d. En déduire la droite perpendiculaire aux plans (AHF) et (BDG) et passant par I.

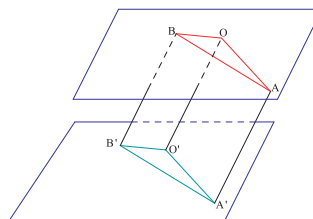
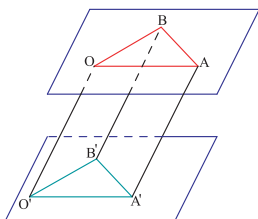
1. Définition du produit scalaire

Activité 1

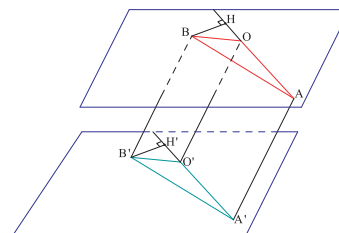
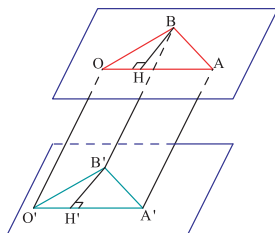
Soit O et O' deux points de l'espace et $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires.

On désigne par A, A', B et B' les points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{O'A'}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{O'B'}$.

1. Montrer que les plans (OAB) et $(O'A'B')$ sont parallèles.
2. Montrer que $O'A'.O'B'.\cos \widehat{A'O'B'} = OA.OB.\cos \widehat{AOB}$.



3. Soit H le projeté orthogonal de B sur (OA) et Δ la droite parallèle à (OO') passant par H .
 - a. Montrer que Δ et $(O'A')$ sont sécantes. Soit H' leur point d'intersection.
 - b. Montrer que $(B'H')$ est perpendiculaire à $(O'A')$.
 - c. Montrer que $OA.OH = O'A'.O'H'$.



Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et soit α la mesure en radians de l'angle géométrique déterminé par deux représentants quelconques de même origine des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ et on note $\vec{u} \cdot \vec{v}$, le réel défini par

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \alpha \text{ si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont non nuls,}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \text{ si l'un des vecteurs } \vec{u} \text{ ou } \vec{v} \text{ est nul.}$$

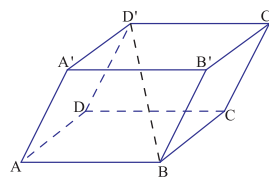
Conséquences

- Pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathcal{W}$,
 $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$. (Lorsque $\|\vec{u}\| = 1$, on dit que le vecteur $\vec{u}$ est unitaire).
 $\|\vec{u}\| = 0$, si et seulement si, $\vec{u} = \vec{0}$.
- Pour tout vecteur $\vec{u}$ non nul de $\mathcal{W}$, le vecteur $\frac{1}{\|\vec{u}\|} \vec{u}$ est unitaire.
- Pour tous points O, A et B de $\mathcal{E}$, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA.OB.\cos \widehat{AOB}$.

Activité 2

Dans la figure ci-contre, $ABCD A' B' C' D'$ est un pavé non droit tel que $AB = 2$, $AA' = 5$, et $\widehat{BAA'} = \frac{\pi}{3}$.

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CC'}$.

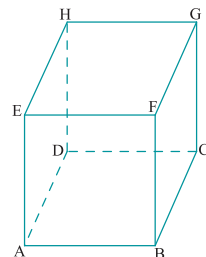


Activité 3

Soit $ABCDEFGH$ un cube d'arête a .

Exprimer à l'aide de a les produits scalaires

$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BG}$, $\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BF}$.



Activité 4

Soit A, B et C trois points non alignés tels que $AB = a$ et $AC = \sqrt{3}a$.

Soit Δ la droite perpendiculaire au plan (ABC) en A et D un point de la droite Δ tel que le triangle ABD soit isocèle en A .

1. Calculer $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD}$ à l'aide de a .
2. Donner une mesure de l'angle $\widehat{ADC}$.

2. Propriétés du produit scalaire

Les propriétés du produit scalaire dans le plan restent valables dans l'espace.

Propriétés

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{x}$ de $\mathcal{W}$ et tous réels α et β ,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}.$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \quad ; \quad (\vec{u} + \vec{x}) \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{x} \cdot \vec{v} + \vec{x} \cdot \vec{w}.$$

$$(-\vec{u}) \cdot \vec{v} = -(\vec{u} \cdot \vec{v}) \quad ; \quad (\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) \quad ; \quad (\alpha \vec{u}) \cdot (\beta \vec{v}) = \alpha\beta(\vec{u} \cdot \vec{v}).$$

Activité 1

Soit $ABCDEFGH$ un cube d'arête a .

1. Exprimer à l'aide de a les produits scalaires

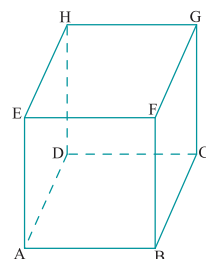
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} \quad ; \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DH} \quad ; \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF} \quad ; \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DG} \quad ;$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH} \quad ; \quad \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DF} \quad ; \quad \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{DF} \quad ; \quad \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{EC}.$$

2. Soit O le milieu de $[EC]$.

Exprimer à l'aide de a les produits scalaires

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AO}, \quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OG} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OC}.$$



Activité 2

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{W}$.

1. Montrer que $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.
2. Montrer que $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$, si et seulement si, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
3. a. Montrer que $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.
b. Dans quel cas a-t-on $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$?

Propriétés

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{W}$,

- $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ (Inégalité de Cauchy Schwarz).
- $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$, si et seulement si, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
- $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ (Inégalité de Minkowski).

3. Orthogonalité

3.1 Définition

Définition

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{W}$ sont dits orthogonaux si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ et on note $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Activité 1

Soit O, A et B trois points non alignés de l'espace et H le projeté orthogonal de B sur (OA).

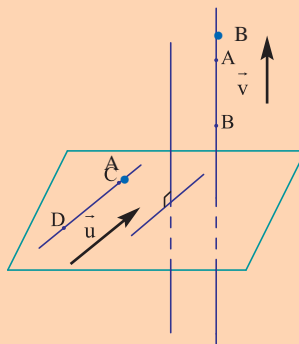
Montrer que $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$.

Propriété

Soit O, A et B trois points de l'espace et H le projeté orthogonal de B sur (OA). Alors $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$.

Théorème

Soit A et B deux points de l'espace et $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de $\mathcal{W}$. Alors les droites $\mathcal{D}(A, \vec{u})$ et $\mathcal{D}'(B, \vec{v})$ sont orthogonales, si et seulement si, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.



Activité 2

Soit ABCD un tétraèdre tel que $AB = CD = a$.

On désigne par I, J, K et L les milieux respectifs de [AD], [BC], [AC] et [BD].

1. Montrer que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{IJ}$ et que $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{KL}$.
2. Montrer que les droites (IJ) et (LK) sont orthogonales.
- 3 a. Quelle est la nature du quadrilatère IKJL ?
b. Calculer à l'aide de a la longueur des côtés du quadrilatère IKJL.
4. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que IKJL soit un carré.

3. 2 Vecteur normal à un plan

Définition

Soit A un point de l'espace, $\vec{n}$ un vecteur non nul et $\mathcal{P}$ un plan.

On dit que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan $\mathcal{P}$ si la droite $\mathcal{D}(A, \vec{n})$ est orthogonale à $\mathcal{P}$.

La conséquence ci-dessous découle de la définition précédente.

Conséquence

Soit A un point de l'espace et $\vec{n}$ un vecteur non nul.

Il existe un unique plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Activité 1

Soit $\mathcal{D}(A, \vec{n})$ une droite et $\mathcal{P}(O, \vec{u}, \vec{v})$ un plan.

Montrer que $\mathcal{D}(A, \vec{n})$ est orthogonale à $\mathcal{P}(O, \vec{u}, \vec{v})$, si et seulement si, $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$.

Propriété

Un vecteur non nul $\vec{n}$ est normal à $\mathcal{P}(O, \vec{u}, \vec{v})$, si et seulement si, $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$.

Activité 2

Soit A et B deux points de l'espace et $\vec{n}, \vec{n}'$ deux vecteurs non nuls. Montrer que les droites $\mathcal{D}(A, \vec{n})$ et $\mathcal{D}'(B, \vec{n}')$ sont orthogonales à un même plan $\mathcal{P}$, si et seulement si, les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires.

Propriété

Deux vecteurs non nuls $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont normaux à un même plan, si et seulement si, ils sont colinéaires.

Activité 3

Soit ABCD un tétraèdre régulier d'arête a et O l'isobarycentre des sommets (O est l'unique point vérifiant $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$).

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$.
2. Montrer que deux quelconques des arêtes opposées du tétraèdre sont orthogonales.

3. Soit A' le centre de gravité du triangle BCD .
 - a. Etablir que A, A' et O sont alignés.
 - b. Calculer $3\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BC}$.
 - c. En déduire que la droite (OA) est orthogonale au plan (BCD) .
4. Montrer que les droites (OB) , (OC) et (OD) sont respectivement orthogonales aux plans (ADC) , (ADB) et (ABC) .

Activité 4

Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans passant respectivement par les points A et B et de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$. On se propose de montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont perpendiculaires, si et seulement si, $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont orthogonaux.

1. On suppose que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont perpendiculaires. Soit Δ une droite contenue dans $\mathcal{P}$ et perpendiculaire à $\mathcal{P}'$.
 - a. Que représente le vecteur $\vec{n}'$ pour la droite Δ ?
 - b. En déduire que $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont orthogonaux.
2. On suppose que $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont orthogonaux.
 - a. Montrer que $\mathcal{D}(A, \vec{n}')$ est contenue dans le plan $\mathcal{P}$.
 - b. Justifier que $\mathcal{D}(A, \vec{n}')$ est perpendiculaire à $\mathcal{P}'$.
 - c. Quelle est alors la position relative de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$?

Propriété

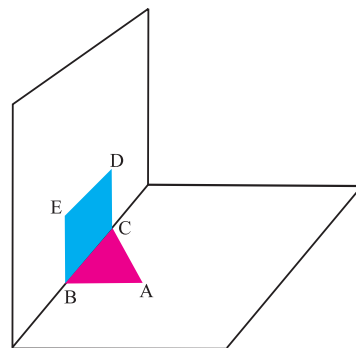
Deux droites sont orthogonales, si et seulement si, leurs vecteurs directeurs respectifs sont orthogonaux.

Deux plans sont perpendiculaires, si et seulement si, leurs vecteurs normaux respectifs sont orthogonaux.

Activité 5

Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans perpendiculaires, d'intersection (BC) .
 Soit A un point de $\mathcal{P}$ tel que le triangle ABC soit équilatéral.
 Soit D et E deux points de $\mathcal{P}'$ tels que $BCDE$ soit un carré.
 On note G le centre de gravité du triangle ABC ,
 O le centre de $BCDE$, I le milieu de $[BC]$,
 Δ l'axe du cercle circonscrit à ABC ,
 Δ' l'axe du cercle circonscrit à $BCDE$.

1. a. Donner un vecteur directeur de Δ .
- b. Donner un vecteur directeur de Δ' .
- c. Montrer que les droites Δ et Δ' sont orthogonales.



2. a. Montrer que Δ est parallèle à (OI).
- b. Montrer que Δ' est parallèle à (GI).
- c. En déduire que Δ et Δ' se coupent en un point, noté J.
3. Montrer que IOJG est un rectangle.

4. Base orthonormée – Repère orthonormé.

Définition

- Une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathcal{W}$ est dite orthogonale si les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ sont orthogonaux deux à deux.
- Un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathcal{E}$ est dit orthogonal si la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthogonale.
- Une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathcal{W}$ est dite orthonormée si les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ sont unitaires et orthogonaux deux à deux.
- Un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathcal{E}$ est dit orthonormé si la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormée.

Activité 1

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée de $\mathcal{W}$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathcal{W}$.

1. a. Montrer que $\vec{u} \cdot \vec{v} = aa' + bb' + cc'$.
 - b. Montrer que $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.
 2. Soit O un point de $\mathcal{E}$ et M, M' deux points de coordonnées respectives (x, y, z) et (x', y', z') dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
- Montrer que $MM' = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$.

Propriétés

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace.

Pour tous vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Pour tous points M(x, y, z), M'(x', y', z'), $MM' = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$.

Activité 2

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée de $\mathcal{W}$.

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer un vecteur $\vec{u}$ de $\mathcal{W}$.

$$\vec{u} \cdot \vec{i} = -1 ; \quad \vec{u} \cdot \vec{j} = 2 ; \quad \vec{u} \cdot \vec{k} = 1 ; \quad \vec{u} \cdot \vec{i} = -1 \text{ et } \vec{u} \cdot \vec{j} = 2 .$$

$$\vec{u} \cdot \vec{i} = -1 \text{ et } \vec{u} \cdot \vec{k} = 1 ; \quad \vec{u} \cdot \vec{j} = 2 \text{ et } \vec{u} \cdot \vec{k} = 1 ; \quad \vec{u} \cdot \vec{i} = -1 , \quad \vec{u} \cdot \vec{j} = 2 \text{ et } \vec{u} \cdot \vec{k} = 1 .$$

Activité 3

Dans un repère orthonormé de l'espace, on donne les points $A(3, 0, 0)$, $B(-3, 6, 1)$, $C(0, 9, 1)$ et $D(6, 3, 0)$.

1. Montrer que A, B, C et D sont coplanaires.
2. Montrer que le quadrilatère ABCD est un rectangle.

Activité 4

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit les points $A(\sqrt{5}, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ et $C(0, 0, \sqrt{6})$. On désigne par A' le milieu de $[BC]$ et par G le centre de gravité du triangle ABC.

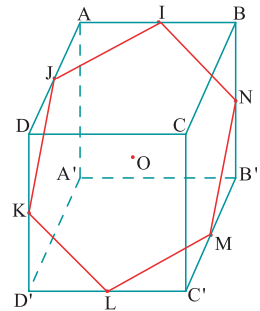
1. Déterminer les coordonnées de A' et de G . Puis calculer $\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{AA'}$.
2. Les droites (OG) et (AA') sont-elles orthogonales ?

Activité 5

Dans la figure ci-contre ABCDA'B'C'D' est un cube de centre O et d'arête 1. Les points I, J, K, L, M et N sont les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[AD]$, $[DD']$, $[C'D']$, $[B'C']$ et $[BB']$.

On munit l'espace du repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'})$.

1. Déterminer les coordonnées des points O, I, J, K, L, M et N.
2. Montrer que les points O, I, J, K, L, M et N sont coplanaires.
3. Montrer que IJKLMN est un hexagone régulier de centre O.
4. Montrer que les points I, J, K, L, M et N sont équidistants de A' .
5. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{A'O}$ est normal au plan (IJK).
6. Calculer le volume de la pyramide $A'IJKLMN$ de base l'hexagone IJKLMN.



Activité 6

Soit ABCDA'B'C'D' un cube d'arête 1.

On munit l'espace du repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'})$.

1. a. Calculer AC et AC' .
b. Donner une valeur approchée de l'angle $\widehat{BAC'}$.
2. Le point B se projette orthogonalement sur la droite (AC') en H.
a. En prenant pour plan de la figure, le plan $(ABC'D')$, dessiner le rectangle $ABC'D'$ et le point H.
b. Calculer BH puis AH .
c. Exprimer AH en fonction de AC .
d. En déduire les coordonnées de H.
3. a. Calculer $DH \cdot AC'$.
b. En déduire que (DH) est orthogonale à (AC') .
4. Montrer que $(A'H)$ est orthogonale à (AC') .
5. Montrer que les plans $(AC'B)$ et (HDA') sont orthogonaux.

QCM – VRAI – FAUX

QCM

L'ensemble des vecteurs de l'espace est muni d'une base quelconque.

Cocher la réponse exacte.

1. On considère les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{w} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$. Alors

☐ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ☐ $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires ☐ $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires

2. Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ est égal à

☐ $2\|\vec{u}\|^2$ ☐ $-2\|\vec{u}\|^2$ ☐ -6 .

3. On considère les vecteurs $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ alors $\|\vec{v} + \vec{w}\|$ est égale à

☐ $\|\vec{w}\|$ ☐ $2\|\vec{w}\|$ ☐ $3\|\vec{w}\|$

4. Si $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthogonale alors $\vec{u} \cdot (\vec{v} + 2\vec{w})$ est égal à

☐ 0 ☐ -1 ☐ 2.

5. Si $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormée alors $\vec{u} \cdot (\vec{v} + 2\vec{u})$ est égal à

☐ 0 ☐ 2 ☐ 1.

VRAI – FAUX

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls de $\mathcal{E}$ et A, B deux points distincts de l'espace.

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Si $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{w}$ et $\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{w}$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

2. Si $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{v}$ et $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{w}$, alors $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathcal{W}$.

3. Si $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{v}$ et $\vec{v}$ est normal à un plan $\mathcal{P}$, alors la droite $\mathcal{D}(A, \vec{u})$ est parallèle à $\mathcal{P}$.

4. Si $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$ et $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{w}$, alors $\mathcal{D}(A, \vec{u})$ est perpendiculaire à $\mathcal{D}(B, \vec{v} + \vec{w})$.

5. Si $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{v}$ et $\vec{v}$ est normal à un plan $\mathcal{P}$, alors la droite $\mathcal{D}(A, \vec{u})$ est perpendiculaire à $\mathcal{P}$.

Mobiliser ses compétences

Situation 1

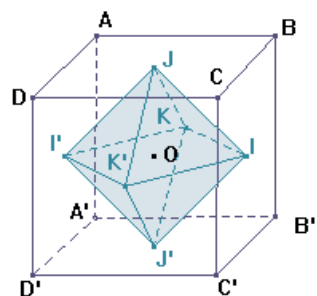
Dans la figure ci-contre $ABCD A'B'C'D'$ est un cube de centre O et d'arête 1. Les points I, J, K, I', J' et K' sont les milieux respectifs des segments $[BC']$, $[BD]$, $[AB']$, $[AD']$, $[A'C']$ et $[DC']$.

On munit l'espace du repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'})$.

1. Déterminer les coordonnées des points I, J, K, I', J' et K' .
2. Calculer les distances $I'J$, JK' et $I'K'$.

En déduire que le triangle $J'I'K'$ est équilatéral.

3. Montrer que toutes les faces de l'octaèdre $IJKI'J'K'$ sont des triangles équilatéraux.
4. Montrer que les segments $[II']$, $[JJ']$ et $[KK']$ se coupent en leur milieu O .
5. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{IK} \cdot \overrightarrow{IK'}$ et $\overrightarrow{JK} \cdot \overrightarrow{JK'}$.
6. En déduire la nature des quadrilatères $IKI'K'$ et $JKJ'K'$ et calculer leurs aires.
7. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{JJ'} \cdot \overrightarrow{II'}$ et $\overrightarrow{II'} \cdot \overrightarrow{KK'}$.
8. Calculer le volume de l'octaèdre $IJKI'J'K'$.



Situation 2

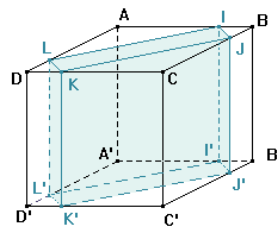
Dans la figure ci-contre $ABCD A'B'C'D'$ est un cube d'arête 1.

Soit I, J, K et L les points appartenant respectivement aux côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[AD]$ tels que $AI = AL = CJ = CK = \frac{3}{4}$.

Soit I', J', K' et L' les points appartenant respectivement aux côtés $[A'B']$, $[B'C']$, $[C'D']$ et $[A'D']$ tels que $A'I' = A'L' = C'J' = C'K' = \frac{3}{4}$.

On munit l'espace du repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'})$.

1. Déterminer les coordonnées des points I, J, K, L, I', J', K' et L' .
2. Montrer que $IJKLI'J'K'L'$ est un parallélépipède.
3. Montrer que $IJKL$ et $I'J'K'L'$ sont des rectangles.
4. a. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{II'}$ est normal au plan $(I'J'L')$.
b. En déduire que $IJKLI'J'K'L'$ est un parallélépipède rectangle.



Exercices et problèmes

Exercice 1

On considère un parallélépipédique rectangle ABCDEFGH tel que $AB = 1$, $AD = \sqrt{3}$ et $\widehat{CAG} = \frac{\pi}{4}$.

1. a. Montrer que le triangle ACG est rectangle isocèle.
- b. Calculer $\overline{AG}$.
2. Calculer $\overline{AB} \cdot \overline{AG}$ et en déduire $\widehat{CAB}$.

Exercice 2

On considère un tétraèdre régulier SABC tel que $AB=1$. On désigne par H l'orthocentre du triangle ABC.

1. Montrer que $\overline{HA} \cdot \overline{HB} = \overline{HB} \cdot \overline{HC} = \overline{HC} \cdot \overline{HA}$.
2. a. Déterminer l'axe du cercle circonscrit au triangle ABC.
- b. Calculer $\overline{SA} \cdot \overline{HA}$, $\overline{SB} \cdot \overline{HB}$ et $\overline{SC} \cdot \overline{HC}$.

Exercice 3

On considère un tétraèdre régulier ABCD.

1. a. Calculer $\overline{AB} \cdot \overline{CD}$.
- b. Quelle est la position relative des droites (AB) et (CD) ?
2. On désigne par E et F les milieux respectifs des segments [AD] et [BC].
- a. Montrer que $\overline{EF} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{DC})$.
- b. Calculer $\overline{EF} \cdot \overline{BC}$ et en déduire la position relative des droites (EF) et (BC) ?

Exercice 4

On considère un cube ABCDEFGH.

1. Calculer $\overline{AB} \cdot \overline{AH}$.
2. a. Ecrire $\overline{AF} \cdot \overline{AH}$ en fonction de AB.
- b. En déduire $\cos \widehat{FAH}$.

Exercice 5

On considère quatre points A, B, C et D de $\mathcal{E}$.

Montrer que $CA^2 - CB^2 = DA^2 - DB^2$ est une condition nécessaire et suffisante pour que (AB) et (CD) soient orthogonales.

Exercice 6

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{W}$.

Montrer que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$.

Exercice 7

On munit $\mathcal{E}$ d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Calculer AB, AC, BC, $\widehat{ABC}$, $\widehat{ACB}$ et $\widehat{BAC}$ dans chacun des cas suivants.

- a. $A(1, 1, 1)$; $B(1, 2, 3)$; $C(-1, 3, -2)$;
- b. $A(2, -3, 5)$; $B(0, 1, 0)$; $C(0, 0, -1)$;
- c. $A(1, 0, 0)$; $B(0, 2, 0)$; $C(0, 0, 3)$.

Exercice 8

On munit $\mathcal{E}$ d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(1, \sqrt{2}, 1)$, $B(\sqrt{6}, \sqrt{3}, 0)$, $C(-1, \sqrt{2}, 3)$ et $D(1, 1, 1)$.

On considère les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que

$$\vec{u} = \frac{1}{2}\overline{OA}, \quad \vec{v} = \frac{1}{3}\overline{OB} \quad \text{et} \quad \vec{w} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\overline{OC}.$$

1. Faire une figure.
2. a. Montrer que $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est un repère orthonormé de $\mathcal{E}$.
- b. Déterminer les coordonnées du point D dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Exercice 9

On munit $\mathcal{E}$ d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit x un réel tel que $0 < x < 1$.

Soit M(x, 0, 0), N(x, 0, x), P(0, x, 0) et Q(0, x, x).

1. Montrer que les points M, N, P et Q sont coplanaires.
2. Montrer que le quadrilatère MNQP est un rectangle.
3. Existe-t-il x tel que MNQP est un carré ?
4. On désigne par S(x) l'aire du rectangle MNQP.
- a. Exprimer S(x) en fonction de x.
- b. Déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire S(x) est maximale.

Exercice 10

Soit un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 2a$ et $AC = a$, ($a > 0$).

On désigne par Δ la droite passant par A et perpendiculaire au plan (ABC).

On désigne par S le point de Δ tel que $AS = a$.

1. Calculer en fonction de a les distances BC, SB et SC.

2. Soit E un point du segment $[AB]$. On désigne par $\mathcal{P}$ le plan $\mathcal{P}(E, \overline{BC}, \overline{AS})$.

On désigne par F, G et H les points d'intersection du plan $\mathcal{P}$ respectivement avec les droites (SB), (SC) et (AC).

- Montrer que les droites (EH) et (BC) sont parallèles.
- Montrer que les droites (GF) et (BC) sont parallèles.

Exercice 11

On munit $\mathcal{E}$ d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points A(1, -2, 4) et B(1, 0, 0) et le

vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On désigne par H le projeté orthogonal du point B sur la droite $\mathcal{D}(A, \vec{u})$.

- Faire une figure.
- a. Déterminer les coordonnées du point H.
b. En déduire la distance BH.

Exercice 12

On considère un cube ABCDEFGH et les points M, N et P tels que

$$\overline{GM} = \frac{1}{4}\overline{GH}, \quad \overline{EN} = \frac{1}{4}\overline{EF} \quad \text{et} \quad \overline{BP} = \frac{1}{4}\overline{BA}.$$

On désigne par I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[HG]$.

- Faire une figure.
- Montrer que $\overline{MN} = \overline{CI}$ et $\overline{NP} = \overline{JP}$.
- On désigne par Q et R les milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[GC]$.

Montrer que le plan (MNP) coupe le plan (ABC) suivant la droite (PQ).

4. Soit K le milieu de $[FC]$.

- Montrer que la droite (QR) est parallèle à la droite (FC).
- En déduire que le plan (MNP) coupe le plan (FGC) suivant la droite (QR).

5. Montrer que la section du cube ABCDEFGH par le plan (PMN) est le pentagone MNPQR.

Exercice 13

On considère quatre points A, B, C et D de $\mathcal{E}$.

On désigne par G le barycentre de (A, 2) et (B, 3) et par G' le barycentre de (C, 1) et (D, 4).

Déterminer l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tel que

$$\|2\overline{MA} + 3\overline{MB}\| = \|\overline{MC} + 4\overline{MD}\|.$$

Exercice 14

On considère un tétraèdre ABCD.

On désigne par E, F, G et H les milieux respectifs des segments $[AD]$, $[BC]$, $[AB]$ et $[CD]$.

- a. Montrer que $2\overline{EF} = \overline{AC} + \overline{DB}$.
b. Montrer que $2\overline{GH} = \overline{AC} + \overline{BD}$.
- Calculer $\overline{EF} \cdot \overline{GH}$ en fonction de AC et BD.

Exercice 15

Sur trois droites deux à deux orthogonales concourantes en un point O, on place les points A, B et C tels que $OA = OB = 1$ et $OC = 2$.

1. Faire une figure.

En considérant le repère $(O, \overline{OA}, \overline{OB}, \frac{1}{2}\overline{OC})$ répondre aux questions suivantes.

- a. Calculer $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$.
b. En déduire $\widehat{BAC}$.
- On désigne par K le projeté orthogonal du point O sur le plan ABC, et on note (x, y, z) les coordonnées de K.
a. Montrer que $x = y = 2z$.
b. Calculer le déterminant de $(\overline{KA}, \overline{KB}, \overline{KC})$.
c. En déduire les coordonnées du point K.
- Montrer que le point K est l'orthocentre du triangle ABC.

Exercice 16

Soit $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ une base de $\mathcal{W}$ et $\vec{i} = \frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$.

1. Soit λ un réel et $\vec{v}'$ le vecteur tel que $\vec{v}' = \lambda\vec{i} + \vec{v}$.

- Pour quelle valeur de λ , $\vec{v}'$ est-il orthogonal à $\vec{i}$?
- En déduire un vecteur unitaire $\vec{j}$ orthogonal à $\vec{i}$.

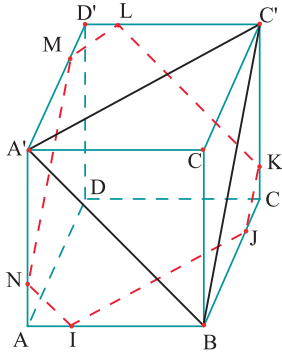
2. Soit $\vec{w}'$ le vecteur tel que

$$\vec{w}' = \vec{w} - (\vec{i} \cdot \vec{w})\vec{i} - (\vec{j} \cdot \vec{w})\vec{j}.$$

- Montrer que $\vec{w}'$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
- En déduire un vecteur $\vec{k}$ tel que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée de $\mathcal{W}$.

Exercice 17

Dans la figure ci-dessous $ABCD A'B'C'D'$ est un cube d'arête 1. On munit l'espace du repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'})$.



Soit x un réel tel que $0 < x < 1$.

On considère les points I, J, K, L, M et N appartenant respectivement aux arêtes $[AB], [BC], [CC'], [C'D'], [D'A']$ et $[AA']$ tels que $AI = AN = CJ = CK = D'L = D'M = x$.

- Déterminer les coordonnées des points I, J, K, L, M et N .
- Montrer que les points I, J, K, L, M et N sont coplanaires.
- Montrer que l'hexagone $IJKLMN$ est la section du cube par le plan passant par I et parallèle au plan $(BA'C')$.
- Calculer IJ, JK, KL, LM, MN et NI en fonction de x .
 - En déduire que le périmètre de l'hexagone $IJKLMN$ est indépendant de x .
- Montrer que les quadrilatères $MLKJ$ et $MJIN$ sont deux trapèzes isocèles.
 - On désigne par h et h' les longueurs des hauteurs respectives des trapèzes $MLKJ$ et $MJIN$.
Exprimer h et h' en fonction de x .
 - En déduire que l'aire $S(x)$ de l'hexagone $IJKLMN$ est $S(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} (-2x^2 + 2x + 1)$.
 - Déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire $S(x)$ est maximale.

Avec l'ordinateur

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. On fixe un point A de l'axe $(O, \vec{i})$ et un point B de l'axe $(O, \vec{j})$ distincts tous de O.

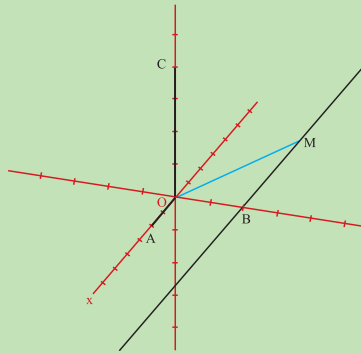
Soit D la droite passant par B et parallèle à $(O, \vec{i})$ et M un point variable sur D.

Soit D' la perpendiculaire à D et à (OA) en O. Soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire de D'.

On désigne par N et C les points vérifiant respectivement

$$\overrightarrow{ON} = OA \cdot OM \sin(\widehat{OA, OM}) \vec{k} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OC} = OA \cdot OB \sin(\widehat{OA, OB}) \vec{k}.$$

On vérifie à l'aide du logiciel Géospace que le vecteur $\overrightarrow{ON}$ ne varie pas lorsque le point M se déplace sur D.

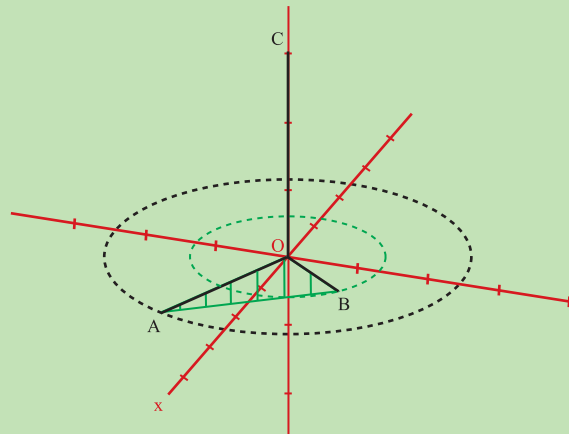


2. On crée dans cette partie deux cercles C_1 et C_2 de centre O, situés dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère un point variable A sur C_1 et un point variable B sur C_2 .

On affiche l'aire A' du triangle OAB et les composantes du vecteur $\overrightarrow{OC}$.

A l'aide des flèches de direction $\uparrow \downarrow \rightarrow \leftarrow$, observer le résultat $A' = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{OC}\|$ lorsque les points A et B se déplacent respectivement sur C_1 et C_2 .



Histoire des déterminants

Les déterminants furent introduits en Occident à partir du XVI^e siècle, soit bien avant les matrices, qui n'apparaissent qu'au XIX^e siècle. Il convient de rappeler que les Chinois furent les premiers à utiliser des tableaux de nombres et à appliquer un algorithme maintenant connu sous le nom de procédé d'élimination de Gauss-Jordan.

Premiers calculs de déterminants

Dans son sens original, le déterminant *détermine* l'unicité de la solution d'un système d'équations linéaires. Il fut introduit dans le cas de la taille 2 par Cardan en 1545 dans son *Ars Magna*, sous forme d'une *règle* pour la résolution de systèmes de deux équations à deux inconnues. Cette première formule porte le nom de *regula de modo*.

Le japonais Kowa Seki introduit les premiers déterminants de taille 3 et 4, à la même époque que l'allemand Leibniz. L'apparition des déterminants de taille supérieure demande encore plus de cent ans. Curieusement le japonais Kowa Seki et l'allemand Leibniz en donnèrent les premiers exemples presque simultanément.

Leibniz étudia de nombreux systèmes d'équations linéaires. En l'absence de notation matricielle, il représente les coefficients inconnus par un couple d'indices : il note ainsi ij pour $a_{i,j}$. En 1678, il s'intéresse à un système de trois équations et trois inconnues et donne, sur cet exemple, la formule de développement suivant une colonne. La même année, il écrit un déterminant de taille 4, correct aux signes près[1]. Leibniz ne publie pas ces travaux, qui semblent avoir été oubliés avant que les résultats soient redécouverts indépendamment une cinquantaine d'années plus tard.

À la même période, Kowa Seki publie un manuscrit sur les déterminants, où il trouve une formulation générale difficile à interpréter. Elle semble donner des formules correctes pour des déterminants de taille 3 et 4, et de nouveau des signes erronés pour les déterminants de taille supérieure[2]. La découverte restera sans lendemain, à cause de la coupure du Japon avec le monde extérieur.



Chapitre 7

**Equations de
droites et de plans**

*" L'essence des
mathématiques, c'est la
liberté. "*

Cantor

Pour commencer

Activité 1

L'espace est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit le point $A(1, 1, 2)$ et le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Tracer la droite $\mathcal{D}$ passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.
2. a. Placer le point $B(-1, 2, 0)$. Ce point appartient-il à la droite $\mathcal{D}$?
b. Déterminer le point C de la droite $\mathcal{D}$ dont la cote est nulle.

Activité 2

Soit ABCDEFGH un cube de côté 1 et soit I le milieu de l'arête [BC].

On munit l'espace du repère cartésien $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. a. Donner les composantes des vecteurs $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{CI}$.
b. Le point I appartient-il au plan (CFH) ? Justifier.
2. La droite (IG) coupe le plan (CFH) en un point M.
a. Placer M.
b. Déterminer les coordonnées de M.

Activité 3

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On donne les points $A(1, 1, 0)$, $B(1, 0, 1)$, $C(0, 1, 1)$ et $G\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

1. Montrer que la droite (OG) est perpendiculaire au plan (ABC).
2. Le point G appartient-il au plan (ABC) ?

1. Représentation paramétrique d'une droite de l'espace

Activité 1

Soit A, B et C trois points distincts de l'espace.

1. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB}$; $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$; $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{CM} = \alpha \overrightarrow{CB}$; $\alpha \geq 0$.

Activité 2

L'espace est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par A(3, -1, 0) et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que M(x, y, z) appartient à la droite $\mathcal{D}$, si et seulement si, il existe un réel α tel que
$$\begin{cases} x - 3 = \alpha, \\ y + 1 = -2\alpha, \\ z = \alpha. \end{cases}$$
2. a. Le point S(2, 2, 5) appartient-il à la droite $\mathcal{D}$?
b. Le point T(1, 3, 2) appartient-il à la droite $\mathcal{D}$?
3. Soit A(x₀, y₀, z₀) un point de l'espace, $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur tel que (a, b, c) $\neq$ (0, 0, 0).

On considère un point M(x, y, z) de l'espace. Donner une condition nécessaire et suffisante sur x, y et z pour que le point M appartienne à la droite $\mathcal{D}(A, \vec{u})$.

Théorème

L'espace est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit le point A(x₀, y₀, z₀) et le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ tel que (a, b, c) $\neq$ (0, 0, 0).

L'ensemble des points M(x, y, z) vérifiant
$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha a \\ y = y_0 + \alpha b \\ z = z_0 + \alpha c \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R},$$
 est la droite $\mathcal{D}(A, \vec{u})$.

Le système précédent est appelé représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}(A, \vec{u})$.

Activité 4

L'espace est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère la droite $\mathcal{D} : \begin{cases} x = -1 + 2\alpha \\ y = 4 + 2\alpha \\ z = 3 + 6\alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$.

- Déterminer un point de $\mathcal{D}$ d'abscisse supérieure à 100.
 - Déterminer un point de $\mathcal{D}$ d'ordonnée négative.
 - Donner un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ dont la composante suivant $\vec{i}$ est égale à 10.
- Le système $\begin{cases} x = -1 + 30t \\ y = 2 + 30t \\ z = -3 + 90t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$, est-il une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$.
- Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}'$ parallèle à $\mathcal{D}$ et passant par le point E $(-1, -2, -4)$.

Activité 5

Soit ABCDEFGH un cube, I et J les centres des faces ABCD et BCGF et O le centre de gravité du triangle BEG.

On munit l'espace du repère cartésien $(E, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EH}, \overrightarrow{EA})$.

- Calculer les coordonnées de chacun des points A, F, D, I et J.
 - Donner la position relative des droites (IJ) et (AF).
- Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ $(D, \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{AD})$.

2. Représentation paramétrique d'un plan de l'espace

Activité 1

Soit A, B et C trois points non alignés de l'espace.

Déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{BC} ; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Activité 2

L'espace est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit le point A $(2, 0, 1)$ et les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

- Vérifier que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
- Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
 - Montrer que M (x, y, z) appartient à $\mathcal{P}$, si et seulement si, il existe deux réels α et β tels que $\begin{cases} x-2 = \alpha+\beta, \\ y = -2\alpha-\beta, \\ z-1 = \alpha+3\beta. \end{cases}$
 - Le point L $(2, 1, 5)$ appartient-il à $\mathcal{P}$?
 - Le point E $(7, -3, 5)$ appartient-il à $\mathcal{P}$?

Activité 3

L'espace est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère le point $A(x_0, y_0, z_0)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ deux vecteurs non colinéaires.

Soit M un point de coordonnées (x, y, z) .

Montrer que le point M appartient au plan $\mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$ si et seulement si, il existe deux réels

$$\alpha \text{ et } \beta \text{ tels que } \begin{cases} x - x_0 = \alpha a + \beta a' \\ y - y_0 = \alpha b + \beta b' \\ z - z_0 = \alpha c + \beta c' \end{cases}$$

Théorème

L'espace est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Soit le point $A(x_0, y_0, z_0)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ deux vecteurs non colinéaires.

L'ensemble des points $M(x, y, z)$ vérifiant le système $\begin{cases} x - x_0 = \alpha a + \beta a' \\ y - y_0 = \alpha b + \beta b' \\ z - z_0 = \alpha c + \beta c' \end{cases}$; α et β deux réels est le plan $\mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$

Le système précédent est appelé représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$

Activité 4

L'espace est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère le plan $\mathcal{P}$: $\begin{cases} x = 1 + \alpha - \beta \\ y = -1 + 2\alpha + \beta \\ z = 2 - 2\alpha \end{cases}$; α et $\beta \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer trois points non alignés A, B et C appartenant au plan $\mathcal{P}$.
2. Donner une autre représentation paramétrique de $\mathcal{P}$.

Activité 5

L'espace est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère la droite $\mathcal{D}$: $\begin{cases} x = -1 + 2\alpha \\ y = 4 + 2\alpha \\ z = 3 - 6\alpha \end{cases}$; $\alpha \in \mathbb{R}$ et le point $T(2, 2, 1)$.

1. Vérifier que T n'appartient pas à $\mathcal{D}$.
2. Soit $\mathcal{P}$ le plan défini par la droite $\mathcal{D}$ et le point T .
 - a. Déterminer un couple de vecteurs directeurs de $\mathcal{P}$.
 - b. Donner alors une représentation paramétrique de $\mathcal{P}$.

3. Equation cartésienne d'un plan de l'espace

Activité 1

L'espace est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit le point $A(x_0, y_0, z_0)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$ deux vecteurs non colinéaires.

Soit $M(x, y, z)$ un point quelconque de l'espace.

1. Calculer $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v})$.

2. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur x, y, z pour que le point M appartienne au plan $\mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$.

Théorème

L'espace est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Pour tout plan $\mathcal{P}$, il existe quatre réels a, b, c et d vérifiant $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et tels que

$M(x, y, z)$ appartient à $\mathcal{P}$, si et seulement si, $ax + by + cz + d = 0$.

L'équation $ax + by + cz + d = 0$ est appelée équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

Activité 2

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère cartésien de l'espace.

1. Déterminer une équation cartésienne du plan passant par O et de vecteurs directeurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan passant par O et de vecteurs directeurs $\vec{i}$ et $\vec{k}$.
3. Déterminer une équation cartésienne du plan passant par O et de vecteurs directeurs $\vec{k}$ et $\vec{j}$.

Activité 3

L'espace est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit a, b, c et d quatre réels.

On se propose de déterminer l'ensemble $\mathcal{P}$ des points $M(x, y, z)$ vérifiant l'équation $ax + by + cz + d = 0$.

1. Déterminer l'ensemble $\mathcal{P}$ lorsque que $a = b = c = 0$.

On suppose dans la suite que $a \neq 0$.

2. Montrer que $\mathcal{P}$ n'est pas vide.

3. Soit $A(x_0, y_0, z_0)$ un point de $\mathcal{P}$ et soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

a. Vérifier que, M appartient à $\mathcal{P}$, si et seulement si, $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$.

b. On pose $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$

Vérifier que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et calculer $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v})$.

4. Quel est alors l'ensemble $\mathcal{P}$?

Théorème

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère cartésien de l'espace et a, b, c et d quatre réels tels que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

L'ensemble des points $M(x, y, z)$ vérifiant $ax + by + cz + d = 0$ est un plan.

Activité 4

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x + y - z = 0$.

1. Déterminer trois points non alignés de $\mathcal{P}$.
2. En déduire deux vecteurs directeurs de $\mathcal{P}$.

4. Positions relatives de droites et plans

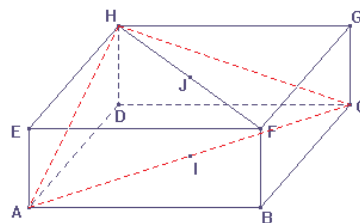
Activité 1

Dans la figure ci-contre, ABCDEFGH est un parallélépipède et J est le milieu de [FH].

On se propose de montrer que la droite (DJ) coupe le plan (ACH) au point O milieu de [DJ].

On munit l'espace du repère cartésien $(A, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (DJ).
2. Déterminer une équation cartésienne du plan (ACH).
3. Montrer alors que la droite (DJ) coupe le plan (ACH) au point O milieu de [DJ].



Activité 2

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère cartésien de l'espace.

1. Déterminer une équation cartésienne du plan passant par le point $A(2, -1, 2)$ et parallèle au plan $\mathcal{P}(O, \vec{k}, \vec{j})$.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan passant par O et parallèle au plan $\mathcal{P}(A, \vec{i}, \vec{k})$.
3. Déterminer une équation cartésienne du plan passant par le milieu I de [OA] et parallèle au plan $\mathcal{P}(O, \vec{k}, \vec{j})$.

Activité 3

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère cartésien de l'espace.

On considère les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et les points $A(0, 0, -1)$ et $B(1, 2, 0)$.

1. a. Montrer que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{AB}$ sont linéairement dépendants.
b. En déduire que les droites $\mathcal{D}(A, \vec{u})$ et $\mathcal{D}(B, \vec{v})$ sont coplanaires.
2. a. Vérifier que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
b. En déduire que les droites $\mathcal{D}(A, \vec{u})$ et $\mathcal{D}(B, \vec{v})$ sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

Activité 4

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère cartésien de l'espace.

On considère les droites

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = -1 - \alpha \\ y = 2 + \alpha \\ z = 1 - 2\alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}' : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 - 3t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas coplanaires.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ contenant $\mathcal{D}$ et parallèle à $\mathcal{D}'$.
3. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{F}$ contenant $\mathcal{D}'$ et parallèle à $\mathcal{D}$.
4. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{R}$ passant par le point $A(1, -1, -2)$ et parallèle à $\mathcal{D}$ et à $\mathcal{D}'$.

Activité 5

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère cartésien de l'espace.

On considère les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ d'équations respectives

$$x + 2y - z + 2 = 0 \quad \text{et} \quad x - y + 3z + 1 = 0.$$

1. Montrer que le point $I(-3, 1, 1)$ appartient à chacun des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.
2. Montrer que le système
$$\begin{cases} x + 2y - z + 2 = 0 \\ x - y + 3z + 1 = 0 \end{cases}$$
 est équivalent au système
$$\begin{cases} x = -\frac{4}{3} - \frac{5}{3}z \\ y = -\frac{1}{3} + \frac{4}{3}z \end{cases} ; z \in \mathbb{R}.$$

3. En déduire une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$, intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.

Théorème

L'espace est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

L'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ est une droite, si et

seulement si, les triplets (a, b, c) et (a', b', c') ne sont pas proportionnels.

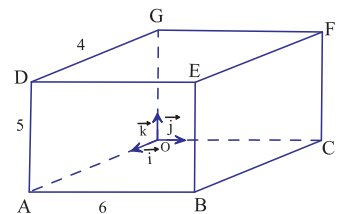
Activité 6

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère cartésien de l'espace.

OABCDEFG est un parallélépipède rectangle d'arêtes 4, 5 et 6.

1. Pour chacune des droites (OC) ; (DE) ; (BC) ; (GF) ; (OF) ; déterminer deux plans qui la contiennent puis en donner un système d'équations cartésiennes.
2. Identifier chacune des droites

$$\mathcal{D}_1 : x = y = 0 ; \mathcal{D}_2 : y = z = 0 ; \mathcal{D}_3 : x = y = z.$$



5. Equations cartésiennes dans un repère orthonormé

Activité 1

Soit O et A deux points distincts de l'espace.

Déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OA} = 0$.

Théorème

Soit A un point de l'espace et $\vec{n}$ un vecteur non nul.

L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Activité 2

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère le point A(1, 1, -1) et le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Donner une équation cartésienne du plan passant par A et de vecteur normal $\vec{u}$.

Activité 3

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points A(1, 1, -1), B(-1, 1, 1) et C(2, 0, 3).

1. Vérifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Montrer que le vecteur $\vec{n} = 2\vec{i} + 10\vec{j} + 2\vec{k}$ est normal au plan (ABC).
3. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

Activité 4

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points E(0, 2, 0) et S(8, 8, 6). Déterminer une équation cartésienne du plan médiateur du segment [ES].

Activité 5

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère le plan $\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0$ et A(x_0, y_0, z_0) un point de $\mathcal{P}$.

1. Soit le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

- a. Montrer que pour tout point M(x, y, z) appartenant à $\mathcal{P}$, $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.
- b. En déduire que le vecteur $\vec{n}$ est normal à $\mathcal{P}$.

Propriété

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Si un plan $\mathcal{P}$ a pour équation $ax + by + cz + d = 0$, alors le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est normal à $\mathcal{P}$.

Activité 6

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère le plan $\mathcal{P} : 2x - y + z + 2 = 0$ et le point $A(1, 0, -1)$.

1. Déterminer une équation du plan passant par A et parallèle à $\mathcal{P}$.
2. Déterminer une équation du plan passant par O et perpendiculaire à $\mathcal{P}$.

6. Droites et plan perpendiculaires

Activité 1

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace.

On considère le plan $\mathcal{P} : 6x - 7y + 7z + 8 = 0$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par O et perpendiculaire à $\mathcal{P}$.
2. En déduire les coordonnées du projeté orthogonal de O sur $\mathcal{P}$.

Activité 2

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace.

On considère les points $A(2, 0, 1)$, $B(-1, 1, 1)$ et $C(0, 2, 1)$.

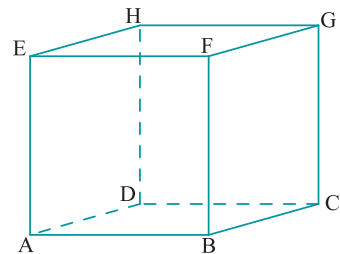
1. Montrer que A , B et C ne sont pas alignés.
2. Montrer que le vecteur $\vec{n} = -4\vec{k}$ est normal au plan (ABC) .
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par B et perpendiculaire au plan (ABC) .

Activité 3

Soit $ABCDEFGH$ un cube d'arête 1.

On note I le milieu de l'arête $[BF]$ et on rapporte l'espace au repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. Déterminer une équation cartésienne du plan (HAD) .
2. Déterminer une équation du plan passant par I et perpendiculaire à (AG) .



QCM – VRAI – FAUX

QCM

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Cocher la réponse exacte.

1. Soit la droite $\mathcal{D} : \begin{cases} x = 1 - \alpha \\ y = -2 + 2\alpha \\ z = \alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$. Alors

☐ $A(1, 0, 0) \in \mathcal{D}$ ☐ $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ ☐ $A(-1, 2, 1) \in \mathcal{D}$.

2. Soit le plan $\mathcal{P}$ et la droite $\mathcal{D}$ définis par

$\mathcal{P} : \begin{cases} x = 1 - 2\alpha - 3\beta \\ y = 2 + 2\beta \\ z = -1 - \alpha + 2\beta \end{cases} ; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{D} : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -2 \\ z = -t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$. Alors

☐ $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont strictement parallèles ☐ $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont sécants ☐ $\mathcal{D}$ est incluse dans $\mathcal{P}$.

3. Le plan $\mathcal{P} : x + 2y - 2z + 10 = 0$ est perpendiculaire à la droite

☐ $\begin{cases} x + 2y - 2z = 2 \\ y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$ ☐ $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ 2x + z = 1 \end{cases}$ ☐ $\begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 2 - 2\alpha \\ z = -2 + 2\alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$.

4. La droite $\mathcal{D}$ passant par O et de vecteur directeur $\vec{k}$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$

☐ $\mathcal{P} : z = 2$ ☐ $\mathcal{P} : y + z = 2$ ☐ $\mathcal{P} : x + y = 2$.

5. La droite $\mathcal{D}$ passant par O et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est orthogonale au plan $\mathcal{P}$

☐ $\mathcal{P} : x = 0$ ☐ $\mathcal{P} : -x + y + z = 2$ ☐ $\mathcal{P} : y + z = 2$.

VRAI – FAUX

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Tout équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ est celle d'un plan.

2. Tout système d'équations de la forme $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ est celui d'une droite.

3. Si $ax + by + cz + d = 0$ est l'équation d'un plan alors le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est normal à ce plan.

4. Le plan d'équation $z = 0$ est parallèle au plan d'équation $x = 0$.

5. Le plan d'équation $y = 1$ est perpendiculaire au plan d'équation $x + z = 0$.

Situation : Distance d'un point à une droite

Soit A un point de l'espace et $\mathcal{D}$ une droite, $\mathcal{P}$ le plan passant par A et perpendiculaire à $\mathcal{D}$, H le point d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$.

1. Montrer que pour tout point M de $\mathcal{D}$, $AM \geq AH$.

La distance AH est alors la plus petite distance du point A à un point quelconque de $\mathcal{D}$. AH est appelée la distance du point A à la droite $\mathcal{D}$.

2. L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit la droite $\mathcal{D}$:
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = t \end{cases} ; t \in \mathbb{R} \text{ et soit } A(-1, 1, 1).$$

On se propose de calculer la distance du point A à la droite $\mathcal{D}$.

- Montrer que l'équation $2x + y + z = 0$ est une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.
- Déterminer les coordonnées du point H .
- En déduire la distance du point A à la droite $\mathcal{D}$.

Exercices et problèmes

Exercice 1

L'espace est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soit $A(1, 2, 2)$, $B(-1, 2, -1)$ et $C(0, 0, 1)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique des droites (AB) , (AC) et (BC) .
2. Déterminer une représentation paramétrique des droites $\mathcal{D} (A, \overline{AB} + \overline{AC})$, $\mathcal{D}' (A, \overline{AB} - 2\overline{BC})$.

Exercice 2

L'espace est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soit $A(1, 2, 2)$, $B(-1, 2, -1)$ et $C(0, 0, 1)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique du plan (ABC) .
2. Déterminer une représentation paramétrique des plans $\mathcal{P} (C, \overline{AB}, \overline{AB} + \overline{AC})$, $(O, \overline{AB} - 2\overline{BC}, \overline{AB} + 2\overline{BC})$.

Exercice 3

L'espace est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère le point $A(0, -1, -2)$ et la droite

$$\Delta : \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 2 - \alpha \\ z = -1 - \alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que le point A et la droite Δ définissent un plan $\mathcal{P}$.
2. Donner une représentation paramétrique de $\mathcal{P}$.

Exercice 4

L'espace est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère les points $A(1, 0, -1)$, $B(-2, 1, 3)$ et $C(0, -1, 0)$.

1. Montrer que ces trois points sont non alignés.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) .

Exercice 5

Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x - y + z - 3 = 0$.

1. Vérifier que les points $A(0, 0, 3)$, $B(3, 0, 0)$ et $C(0, -3, 0)$ appartiennent au plan $\mathcal{P}$.
2. Donner une représentation paramétrique de $\mathcal{P}$.

Exercice 6

L'espace est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soit le plan $\mathcal{P}$ et la droite $\mathcal{D}$ définis par

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = -3\alpha \\ y = 2 - \alpha \\ z = -1 + 2\alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } \mathcal{P} : 2x + z = 0$$

1. Déterminer un point commun à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$.
2. La droite $\mathcal{D}$ est-elle incluse dans $\mathcal{P}$?

Exercice 7

L'espace est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère les droites Δ et Δ' définies par

$$\Delta : \begin{cases} x = 1 - 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = -1 - \alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } \Delta' : \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}.$$

1. Montrer que les deux droites Δ et Δ' sont strictement parallèles.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ contenant ces deux droites.

Exercice 8

L'espace est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère les droites Δ et Δ' définies par

$$\Delta : \begin{cases} x = 1 - \alpha \\ y = -2 + 2\alpha \\ z = \alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } \Delta' : \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}.$$

Montrer que Δ et Δ' sont coplanaires et déterminer une équation cartésienne du plan qui les contient.

Exercice 9

L'espace est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Déterminer l'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.

- a. $\mathcal{P} : 2x + 3y - 4 = 0$ et $\mathcal{P}' : 3x - 2z + 2 = 0$.
- b. $\mathcal{P} : x - y + 2z = 1$ et $\mathcal{P}' : 3x - 2y + 5z = 6$.

Exercice 10

L'espace est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit les points $A(2, 0, -1)$, $B(1, -1, 0)$ et $C(0, 1, 4)$.

1. a. Montrer que A, B et C ne sont pas alignés.
b. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) .
2. Soit D le point de coordonnées $(3, -1, -2)$.
a. D appartient-il au plan (ABC) ?
b. Donner une équation cartésienne du plan P passant par D et parallèle au plan (ABC) .

Exercice 11

Soit $ABCDEFGH$ un cube. On munit l'espace du repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

On considère les points M, N et P tels que

$$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CD}, \quad \overrightarrow{DN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DH} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BF}.$$

1. Exprimer $\overrightarrow{MN}$ à l'aide de $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{DH}$.
2. Donner une représentation paramétrique du plan (MNP) .
3. a. Donner une représentation paramétrique de la droite (AE) .
b. Montrer que (MNP) et (AE) sont sécants.
On désigne par Q leur point d'intersection.
c. Déterminer les coordonnées de Q .

Exercice 12

Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier. On munit l'espace du repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.

On considère les points I, J et K tels que

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CD}.$$

1. Donner une équation cartésienne du plan (IJK) .
2. Montrer que la droite (AD) coupe le plan (IJK) en un point qu'on note L .
3. Déterminer les coordonnées de L .

Exercice 13

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les plans $\mathcal{P} : x - y + z - 2 = 0$

et $\mathcal{P}' : 2x + y - z + 2 = 0$.

1. Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont perpendiculaires.
2. Soit le point $A(1, 1, 1)$.

Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par A et perpendiculaire à $\mathcal{P}$.

Exercice 14

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x - 2y + z + 7 = 0$ et A le point de coordonnées $(2, 1, -1)$.

1. Donner une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ passant par A et perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$.
2. Calculer les coordonnées du point H , intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$.
3. En déduire la distance de AH .

Exercice 15

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(0, 2, 1)$, $B(3, 0, 2)$ et $C(1, 2, 0)$.

1. Placer les points A, B et C .
2. Donner une équation cartésienne du plan (ABC) .
3. Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par C et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.

Exercice 16

Soit $ABCDEFGH$ un cube de côté 1. On note I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[BC]$ et on munit l'espace du repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. Sans justifications, donner une équation cartésienne de chacun des plans (ABC) , (ABE) et (ADE) .
2. a. Donner une équation cartésienne du plan (CFH) .
b. En déduire que $\overrightarrow{AG}$ est un vecteur normal au plan (CFH) .
3. a. Donner une équation cartésienne du plan (IJG) .
b. Le point E appartient-il au plan (IJG) ?

Exercice 17

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par le point $A(3, -1, 2)$ et de

vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et soit B le point de

coordonnées $(3, 1, -2)$.

1. Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ contenant B et perpendiculaire à $\mathcal{D}$.
2. a. Calculer les coordonnées du point H , intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$.
b. En déduire la distance de BH .

Exercice 18

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On donne les points $A(2, 0, 1)$, $B(-1, 1, 2)$, $C(3, 2, 2)$ et l'on désigne par $\mathcal{P}$ le plan perpendiculaire à (AB) passant par B .

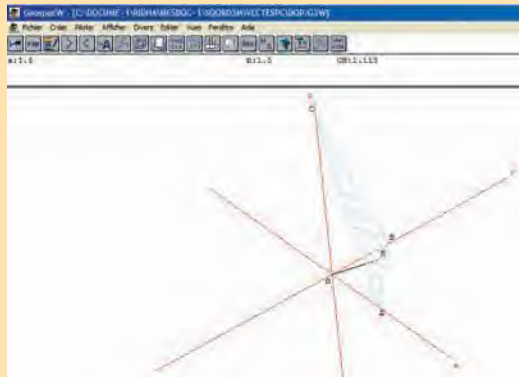
1. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A .
2. a. Donner une représentation paramétrique de la droite D passant par C et parallèle à (AB) .
b. Calculer les coordonnées du point H intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$.
c. Quelle est la nature du quadrilatère $ABHC$?

Avec l'ordinateur

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le point A de coordonnées $(a, 0, 0)$ avec $a \geq 0$, et les points mobiles B $(0, b, 0)$ et C $(0, 0, c)$ tels que $b \leq a$; $c \geq a$ et $bc = 2a^2$.

On se propose à l'aide du logiciel GeospacW, d'étudier les variations de distance du point O au plan (ABC) lorsque le réel b varie dans l'intervalle $[0, a]$ pour une valeur de a fixée.

1. Dans un nouveau fichier GeospacW, créer une variable réelle positive nommée a, puis une autre nommée b dans l'intervalle [0, a].
2. Créer les points A(a, 0, 0) et B(0, b, 0) puis le point C $\left(0, 0, \frac{2a^2}{b} \right)$.
3. Créer le triangle ABC en tant que polygone.
4. Créer la droite perpendiculaire au plan ABC en O, puis le point d'intersection H de D et du plan ABC.
5. Dans le menu " créer ", afficher les variables déjà définies a et b.
6. Dans le menu " créer ", afficher la longueur du segment [OH].

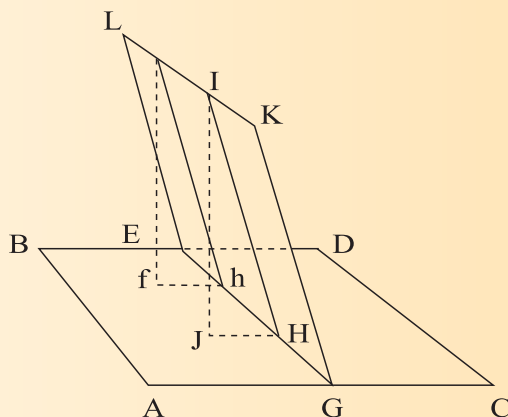


7. En utilisant le menu " Piloter ", on pourra piloter au clavier séparément les réels a et b.
pour un réel a donné, faire varier le réel b et conjecturer sur la valeur de b pour laquelle la distance OH est maximale.
8. Exprimer en fonction de a et b, la distance $d_a(b)$ du point O au plan ABC.
9. Etudier les variations de la fonction qui à b associe $d_a(b)$. Démontrer votre conjecture.



René Descartes (1596-1650)

L'apport principal de Descartes consiste dans l'application des méthodes de l'algèbre aux problèmes traditionnels de la géométrie tels qu'ils ont été pratiqués sans changement majeur depuis l'antiquité grecque (Apollonius et Archimède notamment). C'est parce qu'il veut épargner une inutile fatigue à l'imagination que Descartes invente le moyen d'exprimer les relations géométriques (entre les droites et les courbes) en équations algébriques, fondant par là ce que l'on appellera la géométrie analytique.



Le début de la Géométrie montre bien en quoi consiste cette nouvelle méthode de réduction des problèmes géométriques à ceux, plus simples et plus faciles, de l'algèbre ; après avoir comparé les opérations de l'arithmétique à celles de la géométrie " touchant les lignes qu'on cherche ", Descartes ajoute ceci : " *Ainsi, voulant résoudre quelque problème, on doit d'abord le considérer comme déjà fait, et donner des noms à toutes les lignes qui semblent nécessaires pour le construire, aussi bien à celles qui sont inconnues qu'aux autres. Puis, sans considérer aucune différence entre ces lignes connues et inconnues, on doit parcourir la difficulté selon l'ordre qui montre, le plus naturellement de tous, en quelle sorte elles dépendent mutuellement les unes des autres...* ".

Chapitre 8

Dénombrement

" La mathématique est une science dangereuse : elle dévoile les supercheries et les erreurs de calcul. "

Galilée

Pour commencer**Activité 1**

On considère un tableau à 4 cases alignées, numérotées de 1 à 4, qui sont de couleurs distinctes : bleue, jaune, rouge, verte.

1	2	3	4
---	---	---	---

1. Donner un tableau vérifiant la condition suivante:

- la case 1 est verte et la case 4 est rouge.

2. Donner un tableau vérifiant la condition suivante :

- la case 2 est à côté de la case rouge et la case 4 est verte.

3. Donner un tableau vérifiant les conditions suivantes :

- la case 3 est jaune et la case 4 est bleue,
- si la case 1 est verte alors la case 2 est rouge.

Activité 2

On considère un ensemble de 10 boules dont chacune est soit noire soit blanche, soit pleine soit creuse.

On considère une partie X de 3 boules parmi ces 10 telle que

- il existe au moins une boule blanche et creuse ;
- si X contient une boule pleine alors celle-ci est noire.

1. Donner un ensemble X vérifiant de plus la condition suivante :

- X contient 3 boules creuses.

2. Donner un ensemble X vérifiant de plus la condition suivante :

- X contient une boule noire et creuse.

3. Donner un ensemble X vérifiant de plus la condition suivante :

- X contient 3 boules pleines.

4. Donner un ensemble X vérifiant de plus la condition suivante :

- X contient au moins deux boules pleines.

1. Cardinal d'un ensemble fini

Activité 1

1. Déterminer le nombre d'éléments de l'ensemble des entiers naturels pairs et inférieurs à 100.
2. Déterminer le nombre d'éléments de l'ensemble des entiers naturels impairs et inférieurs à 100.

Vocabulaire et notation

Un ensemble qui a un nombre fini d'éléments est dit fini.

Dans ce cas, on appelle cardinal de E le nombre de ses éléments.

Lorsqu'un ensemble E a n éléments, on dit que son cardinal est n.

On note alors $\text{card } E = n$.

Un ensemble qui a zéro éléments, est appelé l'ensemble vide et est noté $\emptyset$.

Activité 2

On désigne par C l'ensemble des diviseurs de 15, D l'ensemble des diviseurs de 8 et E l'ensemble des diviseurs de 12.

1. Déterminer $\text{card}(C \cap D)$; $\text{card}(E \cap D)$;
 $\text{card}(C \cap E)$.
2. Déterminer $\text{card}(C \cup D)$; $\text{card}(E \cup D)$;
 $\text{card}(C \cup E)$.

Activité 3

1. Déterminer l'ensemble E des diviseurs de 42.
2. Déterminer l'ensemble A des éléments de E, qui sont impairs.
3. Déterminer l'ensemble $\bar{A}$ des éléments de E qui n'appartiennent pas à A.

Activité 4

Soit E l'ensemble des entiers n tels que $1 \leq n \leq 100$.

Pour tout entier naturel a, on note M(a) l'ensemble

$M(a) = \{ n \in E \text{ tel que } n \text{ est un multiple de } a \}$.

1. a. Calculer $\text{card}M(2)$, $\text{card}M(5)$ et $\text{card}M(10)$.

Soit A et B deux ensembles finis.

Leur intersection $A \cap B$, qui se lit "A inter B", est l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B.

Les ensembles A et B sont dits disjoints lorsqu'ils n'ont aucun élément en commun.

A et B sont disjoints équivaut à $A \cap B = \emptyset$.

Soit A et B deux ensembles finis.

Leur réunion $A \cup B$, qui se lit "A union B", est l'ensemble dont les éléments appartiennent à A ou à B.

Si A et B sont disjoints, alors

$\text{card}(A \cup B) = \text{card}A + \text{card}B$.

Si A et B ne sont pas disjoints, alors

$\text{card}(A \cup B) = \text{card}A + \text{card}B - \text{card}(A \cap B)$.

Soit E un ensemble fini, de cardinal n et A une partie de E.

Le complémentaire $\bar{A}$ de A dans E est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A.

On a alors .

$A \cup \bar{A} = E$; $A \cap \bar{A} = \emptyset$

$\text{card } \bar{A} = n - \text{card } A$.

- b. En déduire le nombre d'éléments de E qui sont divisibles par 2 et non par 5.
- c. Calculer le nombre d'éléments de E qui sont divisibles soit par 2, soit par 5.
3. Calculer $\text{card}M(3)$, $\text{card}M(7)$ et $\text{card}(M(3) \cup M(7))$.
4. Calculer $\text{card}(M(6) \cup M(25))$.

Activité 5

On considère l'ensemble E et deux parties A et B de E, tels que

$$E = \{ (1, 1) ; (1, 2) ; (1, 3) ; (2, 3) \},$$

$$A = \{ (1, 2) \},$$

$$B = \{ (1, 1) ; (1, 3) \}.$$

Déterminer le cardinal des ensembles $\bar{A}$, $A \cup B$, $A \cap \bar{B}$; $\bar{A} \cup \bar{B}$.

2. Produit cartésien d'ensembles finis

Activité 1

On désigne par E l'ensemble des entiers naturels non nuls, inférieurs ou égaux à 6 et par F l'ensemble des entiers négatifs non nuls supérieurs ou égaux à -6.
Déterminer le cardinal de l'ensemble $E \times F$.

Le produit cartésien $E \times F$, se lit " E croix F ", est l'ensemble des couples (x, y) tels que x appartient à E et y appartient à F. On a
 $\text{card}(E \times F) = \text{card}E \times \text{card}F$.

Activité 2

Un centre culturel propose un abonnement pour deux activités, une le samedi et une le dimanche.

En l'an 2003, les activités du samedi étaient théâtre, musique et sport.

(On les note par $\{T, M, S\}$), celles du dimanche étaient cinéma et peinture.

(On les note par $\{C, P\}$).

Un abonnement est représenté par le couple (a, b) , où a désigne une activité proposée le samedi et b une activité proposée le dimanche.

a \ b	C	P
T	(T, C)	
M		
S		

1. Compléter le tableau ci-contre pour déterminer tous les abonnements possibles.
2. Combien a-t-on d'abonnements possibles ?
3. En l'an 2005, les activités du samedi sont devenues au nombre de 5 et celles du dimanche au nombre de 6. Combien a-t-on d'abonnements possibles ?

Activité 3

On lance une pièce de monnaie et le résultat est soit pile (noté P) soit face (noté F).

1. On lance la pièce deux fois. On modélise une issue par le couple (a, b) où a et b appartiennent à $\{F, P\}$.

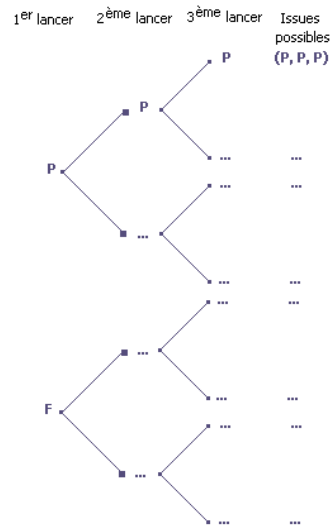
- a. Combien a-t-on d'issues possibles ?
- b. Déterminer les issues où figure une seule fois face. Combien y en a-t-il ?
- c. Déterminer les issues où figure une seule fois pile. Combien y en a-t-il ?
- d. Déterminer les issues où ne figure aucune fois pile. Combien y en a-t-il ?

2. On lance la pièce trois fois.

On modélise une issue par le triplet (a, b, c)

où a, b, c appartiennent à $\{P, F\}$.

- Compléter l'arbre de choix ci-contre.
- Combien a-t-on d'issues possibles ?
- Dans combien d'issues figure une seule fois face ?
- Dans combien d'issues figurent trois fois pile ?
- Dans combien d'issues ne figure aucune fois face ?



Activité 4

Dans une urne, il y a trois boules portant respectivement les lettres A, I et L.

On tire une boule et on note la lettre puis on la remet dans l'urne.

- On effectue cette opération trois fois, on obtient alors un triplet.

Combien a-t-on de triplets possibles ?

- On effectue cette opération dix fois, on obtient alors un dix-uplet.

Combien a-t-on de dix-uplets possibles ?

Soit E un ensemble non vide et fini.

Le produit cartésien $\underbrace{E \times E \times \dots \times E}_{p \text{ fois}}$

est l'ensemble des p -uplets $(x_1, x_2, \dots, x_p)$

tels que x_i appartient à E . On le note E^p et on a $\text{card}(E^p) = (\text{card}E)^p$.

Activité 5

En informatique un " bit " (binary digit) vaut soit 0 soit 1, un " octet " est une succession de huit bits (exemple : 00011001).

- Combien existe-t-il d'octets possibles ?
- Combien existe-t-il d'octets possibles commençant par 1 ?
- Combien existe-t-il d'octets possibles commençant par 0 ?
- Combien existe-t-il d'octets possibles commençant par 00 ?

Activité 6

Une commode contient trois tiroirs. On range des objets distincts dans cette commode. On suppose que chaque tiroir peut ne pas contenir d'objet ou en contenir un ou plusieurs.

- Déterminer le nombre de rangements possibles que l'on peut réaliser, si on veut ranger deux objets.
- Déterminer le nombre de rangements possibles que l'on peut réaliser, si on veut ranger trois objets.
- Déterminer le nombre de rangements possibles que l'on peut réaliser, si on veut ranger vingt objets.

Activité 7

La porte d'entrée d'un immeuble est commandée par un code d'accès composé d'une lettre suivie de trois chiffres.

On dispose d'un clavier comportant les lettres A, B et C, et les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.

1. Combien de codes peut-on proposer ?
2. Combien de codes commençant par la lettre A , peut-on proposer ?
3. Combien de codes commençant par B9 , peut-on proposer ?
4. Combien de codes comportant trois chiffres distincts, peut-on proposer ?

3. Permutations

Activité 1

1. On appelle anagramme du mot MAI tout mot (ayant un sens ou non) formé des trois lettres M, A et I. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot MAI ?
2. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot NATUREL ?

Activité 2

Huit personnes choisissent un nombre compris entre 1 et 8.

Combien y a-t-il de choix distincts possibles ?

Définition

Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n .

On appelle permutation des n éléments de E tout n-uplet d'éléments distincts de E.

Activité 3

On dispose d'un mot de n lettres distinctes. Combien y a-t-il d'anagrammes possibles ?

Le nombre de permutations des n éléments de E est égal à $n \times (n-1) \times \dots \times 1$.

Notation

Soit n un entier naturel non nul.

On appelle factorielle de n et on note $n!$, l'entier $1 \times 2 \times \dots \times n$. Par suite, le nombre de permutation des n éléments de E est égal à $n!$.

On convient que $0! = 1$.

Activité 4

1. Calculer $4!$; $5!$; $6!$; $7!$; $8!$.

2. Calculer $\frac{5!}{3!}$; $\frac{5!}{8!}$; $\frac{125!}{123!}$; $\frac{104!}{99!}$.

3. Soit un entier naturel $n \geq 3$.

Simplifier les écritures $\frac{n!}{(n-1)!}$, $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$ et $\frac{(n-2)!}{n!}$.

4. Arrangements

Activité 1

On veut former des mots à deux lettres distinctes, avec les lettres A, B, C, D, E et F. A l'aide d'un arbre de choix, déterminer le nombre de mots possibles.

Activité 2

Un parking comporte dix places libres repérées par les numéros 1 à 10.

1. De combien de façons peut-on garer une voiture ?
2. De combien de façons peut-on garer deux voitures ?
3. De combien de façons peut-on garer trois voitures ?
4. De combien de façons peut-on garer neuf voitures ?
5. De combien de façons peut-on garer dix voitures ?

Définition

Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n et p un entier naturel tel que $1 \leq p \leq n$. On appelle arrangement de p éléments de E tout p-uplet d'éléments distincts de E.

Activité 3

Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n et p un entier naturel tel que $1 \leq p \leq n$.

1. Montrer que le nombre d'arrangements de p éléments de E est égal au produit $n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1)$.

2. En déduire que $n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$.

Théorème

Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n et p un entier naturel tel que $1 \leq p \leq n$.

Le nombre d'arrangements de p éléments de E est l'entier noté A_n^p , (on lit «A, n, p»), tel que

$$A_n^p = n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

On convient que $A_n^0 = 1$.

Activité 4

Une association comporte 50 membres. On doit élire un bureau composé de quatre membres (un président, un vice-président, un secrétaire et un trésorier).

Combien y a-t-il de bureaux possibles ?

Activité 5

Un sac contient six jetons numérotés de 10 à 15.

On tire successivement trois jetons, sans les remettre dans le sac.

Déterminer le nombre de tirages possibles.

Activité 6

1. Soit E un ensemble à quatre éléments et F un ensemble à trois éléments.

Dénombrer les applications injectives de E vers F .

2. Soit E un ensemble à quatre éléments et F un ensemble à dix éléments.

Dénombrer les applications injectives de E vers F .

3. Soit E un ensemble à p éléments et F un ensemble à n éléments tels que $n \geq p$.

Dénombrer les applications injectives de E vers F .

Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F .

On dit que f est injective lorsque pour tous x, x' de E tels que $x \neq x'$, on a $f(x) \neq f(x')$.

5. Combinaisons

Activité 1

On considère l'ensemble $E = \{a, b, c, d\}$.

1. Dénombrer les parties de E à un élément, les parties à trois éléments, les parties à quatre éléments.
2. On convient que la seule partie de E à zéro élément est la partie vide et on note $P(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E . Déterminer $\text{card}(P(E))$.

Activité 2

Une association culturelle propose à ses adhérents six activités diverses.

De combien de façons différentes, un adhérent peut-il choisir ses activités ?

Définition

Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n et p un entier naturel tel que $0 \leq p \leq n$. On appelle combinaison de p éléments de E , toute partie à p éléments distincts de E .

Le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments est l'entier naturel noté

$$C_n^p, \text{ (on lit « } C, n, p \text{ »), ou } \binom{n}{p}$$

Activité 3

Soit n un entier naturel .

1. Vérifier que $C_0^0 = 1$ et que $C_n^0 = 1$.

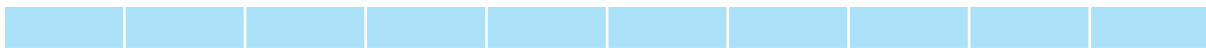
On suppose que $n \geq 1$.

2. Vérifier que $C_n^1 = n$ et $C_n^n = 1$.

3. Montrer que $C_n^{n-1} = n$.

Activité 4

1. On veut écrire un mot de dix lettres et on dispose de trois fois la lettre a et sept fois la lettre b.



On commence par mettre les a, en choisissant trois cases parmi les dix. On place ensuite les b.

Le nombre de mots est donc C_{10}^3 .

Qu'obtient-on en commençant par mettre les b ?

2. Soit E un ensemble fini de cardinal n et p tel que $0 \leq p \leq n$.
- Vérifier que choisir une partie à p éléments de E revient à choisir une partie à $n - p$ éléments.
 - En déduire que $C_n^{n-p} = C_n^p$.

Activité 5

Au jeu de loto, on tire chaque semaine six nombres distincts parmi les entiers compris entre 1 et 49.

On désigne par " résultat " l'ensemble des six nombres tirés.

On se propose de déterminer le nombre de résultats possibles.

1. On appelle tirage un arrangement de six nombres parmi les quarante neuf nombres.

Combien y a-t-il de tirages au loto ?

2. On a effectué le tirage 21, 10, 7, 43, 2, 29.

Combien y a-t-il de permutations de l'ensemble de ces six nombres ?

3. Combien de tirages conduisent au même ensemble de nombres tirés ?

Activité 6

Soit n et p deux entiers naturels tels que $n \geq 1$ et $0 \leq p \leq n$.

Montrer que pour tout $0 \leq p \leq n$, $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$.

Théorème

Soit n et p deux entiers naturels tels que $0 \leq p \leq n$. Alors $C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$.

Activité 7

Une urne contient trois boules blanches et cinq boules noires.

On tire simultanément quatre boules de l'urne.

- Combien y a-t-il de tirages possibles ?
- Combien y a-t-il de tirages qui contiennent une seule boule blanche ?
- Combien y a-t-il de tirages qui contiennent deux boules blanches ?
- Combien y a-t-il de tirages qui contiennent trois boules blanches ?
- Combien y a-t-il de tirages qui contiennent quatre boules blanches ?
- Combien y a-t-il de tirages qui contiennent au moins une boule blanche ?
- Combien y a-t-il de tirages qui contiennent quatre boules noires ?
- Combien y a-t-il de tirages qui contiennent deux boules noires ?

Activité 8

Soit deux entiers n et p tels que $1 \leq p \leq n - 1$.

1. Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n et e un élément de E .

a. Dénombrer les parties à p éléments de E qui contiennent e .

b. Dénombrer les parties à p éléments de E qui ne contiennent pas e .

c. En déduire que $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$.

2. La formule $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$ permet de calculer de proche en proche les nombres C_n^p .

En effet si on place dans un tableau à la n -ème ligne et p -ième colonne le nombre C_n^p , (voir schéma ci contre), on obtient un tableau appelé triangle de Pascal.

	$p - 1$	p
$n - 1$	C_{n-1}^{p-1}	C_{n-1}^p
n		$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$

Compléter le triangle de Pascal pour $n = 6$ représenté ci-dessous.

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	...	...	...		
5	...	...	...	...	...	...	
6	...	...	...	...	...	...	...

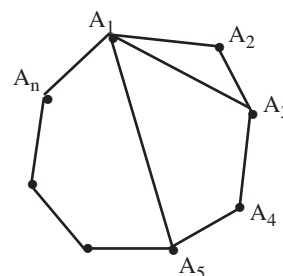
Activité 9

Soit un polygone $A_1 A_2 \dots A_n$ à n côtés, $n \geq 3$.

1. Dénombrer les segments d'extrémités deux sommets du polygone.

2. Une diagonale du polygone est un segment d'extrémités deux sommets non consécutifs de celui-ci.

Dénombrer les diagonales d'un polygone à n côtés, $n \geq 3$.



Activité 10

Dans un jeu de 32 cartes, on appelle main tout ensemble de cinq cartes.

1. Combien y a-t-il de mains possibles ?

2. Combien y a-t-il de mains contenant le valet de pique ?

3. Combien y a-t-il de mains contenant exactement une carte de couleur rouge ?

4. Combien y a-t-il de mains contenant au plus une reine ?

5. Combien y a-t-il de mains ne contenant aucun roi ?

6. Combien y a-t-il de mains contenant au moins un roi ?

Activité 11

Soit un entier naturel $n \geq 3$. On considère l'ensemble $E = \{0, 1, \dots, n\}$.

1. a. Soit un entier p tel que $0 \leq p \leq n$. Combien y a-t-il de couples (x, p) d'éléments de E avec $x < p$?
b. Combien y a-t-il de couples (x, y) d'éléments de E tels que $x < y$?
c. En déduire que $1+2+\dots+n = C_{n+1}^2$.
2. a. Soit un entier p tel que $0 \leq p \leq n$. Combien y a-t-il de triplets (x, p, z) d'éléments de E avec $x < p < z$?
b. Combien y a-t-il de triplets (x, y, z) d'éléments de E avec $x < y < z$?
c. En déduire que $(n-1)+2(n-2)+\dots+p(n-p)+\dots+(n-1) = C_{n+1}^3$.

6. Le Binôme de Newton

Activité 1

Soit a et b deux réels.

1. a. Développer $(a+b)^3$.
b. Vérifier que $(a+b)^3 = C_3^0 a^3 b^0 + C_3^1 a^2 b^1 + C_3^2 a^1 b^2 + C_3^3 a^0 b^3$.
2. A l'aide du triangle de Pascal développer
 - a. $(a+b)^4$;
 - b. $(a+b)^5$;
 - c. $(a+b)^6$.
3. Développer $(a+1)^6$, $(a-1)^5$.

Binôme de Newton

Soit a et b deux réels.

Pour tout entier naturel non nul n , on a,

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^n a^0 b^n$$

Activité 2

1. Soit n un entier naturel non nul.
 - a. Développer $(2+1)^n$.
 - b. En déduire la valeur de $C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2 C_n^2 + \dots + 2^n C_n^n$.
2. Soit un entier pair $n \geq 2$.
 - a. Développer $(1+1)^n$ et $(1-1)^n$.
 - b. En déduire que les nombres $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots + C_n^n$ et $C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots + C_n^{n-1}$ sont égaux et donner leur valeur commune.

Activité 3

Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n .

1. Montrer que le nombre de toutes les parties de E est égal à $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n$.
2. En déduire que le nombre de toutes les parties de E est égal à 2^n .

Activité 4

1. Soit la fonction $f : x \mapsto (1+x)^n$, où n est un entier naturel, supérieur ou égal à 2.
 - a. Calculer de deux façons différentes le nombre dérivé $f'(x)$.
 - b. En déduire le calcul de $S_1 = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n$.
2. Calculer de même $S_2 = 2C_n^2 + 6C_n^3 + \dots + n(n-1)C_n^n$.
3. En déduire le calcul de $S_3 = 2^2 C_n^2 + 3^2 C_n^3 + \dots + n^2 C_n^n$.

QCM – VRAI – FAUX

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. En utilisant les lettres Q, C et M, on écrit tous les mots à trois lettres distinctes. On en obtient

☐ 6

☐ 9

☐ 27.

2. Une urne contient quatre boules numérotées 1, 2, 3, 4. On tire successivement avec remise trois boules de l'urne. Le nombre de tirages possibles est

☐ 6

☐ 12

☐ 64.

3. Une assemblée élit un bureau de trois membres parmi quatre candidats. Le nombre de bureaux possibles est

☐ 24

☐ 4

☐ 64.

4. Le nombre de droites passant par deux sommets distincts d'un pentagone est égal à

☐ C_5^2

☐ A_5^2

☐ 2^5 .

5. Les triangles formés par trois sommets distincts d'un pentagone sont au nombre de

☐ 3^5

☐ A_5^3

☐ C_5^3 .

VRAI – FAUX

1. Les anagrammes du mot ANANAS sont au nombre de $6!$.

2. Les anagrammes du mot ANANAS sont au nombre de $\frac{6!}{2! \times 3!}$.

3. Lorsqu'on lance successivement quatre dés, plus que la moitié des issues possibles contiennent au moins 1.

4. Parmi les mots de 8 lettres écrits à l'aide des lettres O et S, il y a $2^8 - (1 + C_8^1 + C_8^2)$ mots qui contiennent au moins 3 fois la lettre S.

5. Dans un jeu de 32 cartes, le nombre de mains de 5 cartes contenant 2 as et 3 cœurs est $C_4^2 \times C_8^3$.

Mobiliser ses compétences

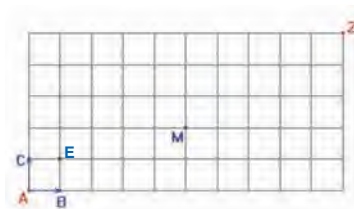
Situation 1

1. Dénombrer les anagrammes du mot ESSENTIEL.
2. Dénombrer les anagrammes du mot MATHEMATIQUES.

Situation 2

On peut se déplacer sur le réseau ci-contre, en ne se dirigeant que vers la droite ou bien vers le haut (ainsi de A on ne peut aller que vers B ou C).

1. Dénombrer les mots à 15 lettres qui contiennent 10 fois la lettre d et 5 fois la lettre h.
2. En déduire le nombre de chemins qui joignent A à Z.
3. a. Déterminer le nombre de chemins qui joignent A à E.
b. Déterminer le nombre de chemins qui joignent E à Z.
c. En déduire le nombre de chemins qui joignent A à Z en passant par E.
4. Déterminer le nombre de chemins qui joignent A à Z en passant par E puis par M.



Exercices et problèmes

Exercice 1

Un appareil électroménager fabriqué en très grande série, peut être défectueux à cause de deux défauts seulement désignés par A et B.

Sur cent appareils on a en moyenne les résultats suivants :

- dix appareils présentent le défaut A (et peut-être aussi le défaut B),
- huit appareils présentent le défaut B (et peut-être aussi le défaut A),
- quatre appareils présentent simultanément les deux défauts.

Combien d'appareils en moyenne, sur cent, ne présentent aucun défaut ?

Exercice 2

1. Calculer pour tout $0 \leq p \leq 8$, $\frac{10!}{p!}$.
2. Soit un entier $n \geq 2$.
 - a. Montrer que $(n-1)n$ est pair.
 - b. En déduire que pour tout entier $0 \leq p \leq n-2$, $\frac{n!}{p!}$ est un entier pair.

Exercice 3

Montrer que

- a. $2 \times 4 \times \dots \times (200) = 2^{100} 100!$;
- b. $\frac{2 \times 4 \times \dots \times (2000)}{3 \times 5 \times \dots \times (2001)} = \frac{(2^{1000} 1000!)^2}{(2001)!}$.

Exercice 4

1. Calculer $n!$ pour n appartenant à $\{2, 3, 4, 5\}$.
2. A partir de quelle valeur de l'entier n a-t-on $n!$ est un multiple de 10 ?
3. A partir de quelle valeur de l'entier n a-t-on $n!$ est un multiple de 20 ?
4. A partir de quelle valeur de l'entier n a-t-on $n!$ est un multiple de 100 ?
5. A partir de quelle valeur de l'entier n a-t-on $n!$ est un multiple de 1000 ?
6. Trouver les trois derniers chiffres en écriture décimale de $1! + 2! + 3! + 4! + \dots + 2006!$.

Exercice 5

1. Combien peut-on former de nombres de quatre chiffres ?
2. Combien peut-on former de nombres de quatre chiffres distincts ?
3. Combien peut-on former de nombres pairs de quatre chiffres ?
4. Combien peut-on former de nombres pairs de quatre chiffres distincts ?
5. Combien peut-on former de nombres de quatre chiffres distincts contenant au moins l'un des chiffres 0, 1, 2 ?

Exercice 6

Parmi toutes les mains de 8 cartes extraites d'un jeu de 32 cartes, dénombrer celles contenant

- a. un seul as ;
- b. exactement deux as ;
- c. au moins un as ;
- d. au moins un as et au moins un valet.

Exercice 7

Pour construire une grille de mots croisés de 10 lignes et 12 colonnes, on noircit 23 cases.

Combien de grilles distinctes peut-on obtenir ?

Exercice 8

On dispose de 4 lettres A, 5 lettres B et 9 lettres C. Combien de mots à 18 lettres peut-on écrire avec ces lettres ?

Exercice 9

On lance simultanément deux dés de couleurs différentes dont les faces sont numérotées 1, 2, 3, 4, 5, 6.

1. Déterminer le nombre d'issues possibles.
2. Dans combien de cas obtient-on deux chiffres pairs ?
3. Dans combien de cas obtient-on un chiffre pair et un chiffre impair ?
4. Dans combien de cas obtient-on une somme égale à 4 ?
5. Dans combien de cas obtient-on une somme égale à 9 ?
6. Dans combien de cas obtient-on une somme supérieure strictement à 3 ?

Exercice 10

Une grenouille monte un escalier de 13 marches. Elle peut progresser en sautant d'une marche à la suivante ou en sautant par dessus une marche (de la marche n à la marche $n+2$).

De combien de façons distinctes peut-elle arriver au sommet de l'escalier ?

Exercice 11

Une ligne de chemin de fer comporte 25 stations. Chaque station délivre des billets, de première ou bien de deuxième classe, pour chacune des autres stations. On distingue le billet A vers B du billet B vers A.

La ligne est prolongée de trois stations.

Combien doit-on imprimer de nouveaux types de billets ?

Exercice 12

1. De combien de façons trois personnes peuvent-elles s'asseoir autour d'une table ronde ?
2. De combien de façons quatre personnes peuvent-elles s'asseoir autour d'une table ronde ?
3. De combien de façons huit personnes peuvent-elles s'asseoir autour d'une table ronde ?

Exercice 13

A partir du mot BLANCHE, on forme des anagrammes.

1. Combien y en a-t-il ?
2. Combien se terminent par E ?
3. Dans combien de mots E suit-il H ?
4. Combien ne commencent pas par B ?
5. Dans combien de mots les voyelles sont-elles séparées exactement par deux lettres ?

Exercice 14

De combien de façons peuvent s'asseoir trois filles et trois garçons dans une rangée de six places, sachant que filles et garçons doivent alterner ?

Exercice 15

De combien de façons peut-on séparer douze personnes en trois groupes,

- a. de deux, quatre et six chacun ;
- b. de quatre chacun.

Exercice 16

Un hôtel propose à sa clientèle la pratique de huit activités diverses.

De combien de façons un client peut-il choisir ses activités ?

Exercice 17

Un caractère de l'écriture Braille est formé de points obtenus en piquant une feuille de papier à travers au moins l'un des six trous de la grille ci-contre.

1. Combien y a-t-il de caractères Braille formés avec 5 trous ?

2. Combien y a-t-il de caractères Braille formés avec 4 trous ?

3. Combien y a-t-il de caractères Braille formés avec 3 trous ?

4. Combien y a-t-il de caractères Braille ?



Exercice 18

On lance simultanément trois dés dont les faces sont numérotées 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Déterminer le nombre d'issues possibles lorsque

- a. les dés sont discernables ;
- b. les dés sont indiscernables.

Exercice 19

1. Calculer les sommes

$$A = C_{100}^0 + C_{100}^2 + C_{100}^4 + \dots + C_{100}^{100}$$

$$\text{et } B = C_{100}^1 + C_{100}^3 + C_{100}^5 + \dots + C_{100}^{99}.$$

2. Soit deux entiers n et p tels que $1 \leq p \leq n+1$.

a. Vérifier que $C_{n+1}^p = \frac{n+1}{p} C_n^{p-1}$.

b. En déduire la somme

$$S = \frac{1}{1} C_{100}^0 + \frac{1}{2} C_{100}^1 + \dots + \frac{1}{101} C_{100}^{100}.$$

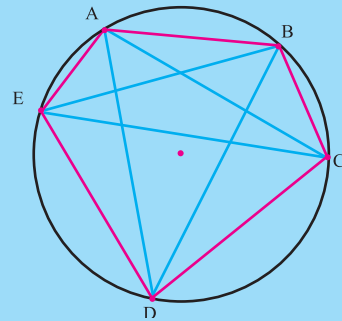
Exercice 20

De combien de façons peut-on choisir trois entiers compris entre 1 et 9 qui soient trois termes consécutifs d'une suite arithmétique ?

Séquence 1

On sait que le nombre de diagonales d'un quadrilatère convexe est égal à deux et que celui d'un triangle est zéro.

1. A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, construire un pentagone ABCDE inscrit dans un cercle C.
2. Déterminer le nombre de diagonales du pentagone.
3. En plaçant un nouveau point F sur l'arc $\widehat{AE}$, déterminer le nombre de diagonales de l'hexagone ABCDEF.
4. Conjecturer le nombre de segments obtenus pour un polygone P_n de n sommets puis déterminer le nombre de ses diagonales.
5. Démontrer cette conjecture.



Séquence 2

Après avoir écrit le titre **Triangle de "PASCAL"**, on inscrit le nombre 1 dans toutes les cellules du champ **A6:A16**. Puis, on saisit, dans les dix cellules du champ **B7:B16**, les nombres successifs de **1 à 10**.

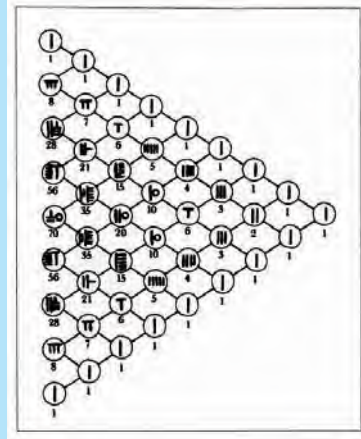
De même, on tape, dans les dix cellules du champ **B7:K7** les nombres successifs de **1 à 10**.

Dans la cellule C3, recopier la formule **=SI(\$B3>=C\$2;COMBIN(\$B3;C\$2);"")** en respectant scrupuleusement la présence ou l'absence des caractères "\$".

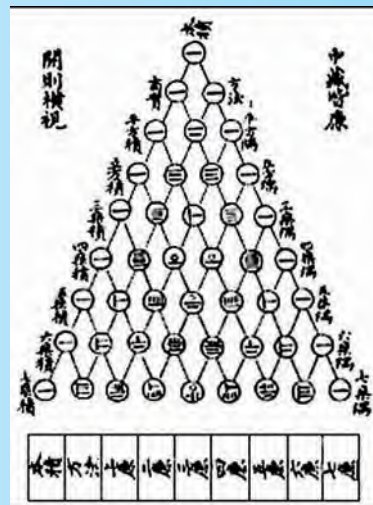
Recopier la formule dans toutes les cellules du champ **C3:K11** puis masquer les cellules **C2:K2** en leur donnant, par exemple, une couleur de police identique à la couleur de fond. Le triangle est terminé.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1				Triangle de "PASCAL"							
2											
3											
4											
5											
6	1										
7	1	1									
8	1	2	1								
9	1	3	3	1							
10	1	4	6	4	1						
11	1	5	10	10	5	1					
12	1	6	15	20	15	6	1				
13	1	7	21	35	35	21	7	1			
14	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
15	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
16	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

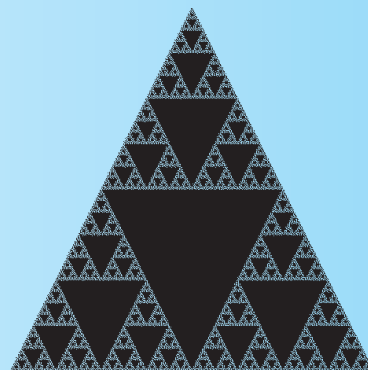
Le triangle dit de Pascal, a été décrit par Zhu Shijie en 1303 dans son livre *le Miroir de Jade des Quatre Inconnues*. Dans ce livre, Zhu présente le triangle comme une méthode ancienne (de plus 200 années avant son temps) pour déterminer les coefficients du binôme, ce qui indique que la méthode était connue en Chine cinq siècles avant Pascal. Elle était également connue des mathématiciens arabes, par exemple Al Karaji et Omar Khayam.



Lorsque Pascal construit en 1654 son triangle arithmétique, il est loin d'être le premier à avoir organisé les nombres de cette façon. Le triangle arithmétique est même connu en Chine, en Inde ou dans les pays arabes dès le XI^e ou le XII^e siècle. L'apport de Pascal est une étude systématique, et surtout pour réaliser cette étude, il utilise pour la première fois le raisonnement par récurrence.



En remplaçant dans le triangle de Pascal les nombres pairs par 0 et les impairs par 1, ou encore les entiers pairs par un carreau noir et les impairs par un carreau rouge, nous obtenons ce qu'on appelle le triangle de Sierpinski.



Chapitre 9

Statistiques

*" Il n'y a pas de place durable
dans le monde pour les
mathématiques laides. "*

Hardy

L'information chiffrée sert à expliquer des phénomènes, à prendre des décisions et à faire des projections.

Les données numériques sont soit discrètes, soit continues.

Dans le cas où les données sont discrètes, le nombre de fois où l'on retrouve la même valeur s'appelle effectif de cette valeur. Si cet effectif est exprimé en pourcentage, on parle de fréquence de cette valeur.

Dans le cas où les données sont continues, on les répartit en classes de même amplitude ou d'amplitudes différentes, on prend le centre des classes et on procède comme dans le cas des données discrètes.

Pour analyser les données dont on dispose :

- On représente graphiquement les données à l'aide d'un histogramme, d'un diagramme en boîte, d'un diagramme en bâtons, d'un diagramme circulaire, d'un polygone des effectifs ou des fréquences etc.
- On cherche à déterminer les valeurs centrales (ou paramètres de position) de la série (mode, moyenne, médiane, quartiles).
- On cherche à déterminer les paramètres de dispersion qui indiquent la tendance qu'ont les valeurs de la distribution d'un caractère à se disperser, ou à se regrouper de part et d'autre d'une valeur centrale.

A chaque valeur centrale, on peut associer des paramètres de dispersion.

Le tableau ci-dessous décrit la relation entre paramètres de position et paramètres de dispersion.

Paramètre de position	Paramètre de dispersion
Mode, classe modale.	Etendue
Médiane, quartiles.	Ecart interquartile
Moyenne.	Ecart-type, variance.

1. Médiane et quartiles

1.1. Définition

Activité 1

On a recueilli dans le tableau ci-dessous les températures minimales (en °C) relevées en l'année 2000 dans plusieurs villes tunisiennes.

3.5	1.9	1.0	0.7	0.8	0.8	0.6	2.5	1.2	4.3	4.5	3.6	5.5
1.1	0.8	1.4	5.8	1.7	0.1	3.3	2.6	1.5	2.4	1.0	0.1	1.1

1. Ranger les valeurs de la série dans l'ordre croissant
2. a. Déterminer la médiane, le premier quartile Q_1 le troisième quartile Q_3 .
b. En déduire $Q_3 - Q_1$.
3. Représenter le diagramme en boîte de la série puis l'interpréter.

Soit X une série statistique de valeurs $(x_1, \dots, x_N)$ rangées dans l'ordre croissant.

Le réel $x_{\left[\frac{N}{4}\right]+1}$ (où $\left[\frac{N}{4}\right]$ est la partie entière de $\frac{N}{4}$) est dit premier quartile de X .

Le réel $x_{\left[\frac{N}{2}\right]+1}$ (où $\left[\frac{N}{2}\right]$ est la partie entière de $\frac{N}{2}$) est dit médiane de X .

Le réel $x_{\left[\frac{3N}{4}\right]+1}$ (où $\left[\frac{3N}{4}\right]$ est la partie entière de $\frac{3N}{4}$) est dit troisième quartile de X .

Soit X une série statistique de valeurs $(x_1, \dots, x_N)$ rangées dans l'ordre croissant. Soit Q_1 le premier quartile et Q_3 le troisième quartile.

On appelle écart interquartile la différence $Q_3 - Q_1$.

Soit une série statistique X dont les valeurs sont rangées dans l'ordre croissant. La médiane de X est telle que au moins 50% des valeurs lui sont inférieures et au moins 50% des valeurs lui sont supérieures.

Le premier quartile de X est tel que au moins 25% des valeurs lui sont inférieures et au moins 75% des valeurs lui sont supérieures.

Le troisième quartile de X est tel que au moins 75% des valeurs lui sont inférieures et 25% des valeurs lui sont supérieures.

L'écart interquartile est l'étendue de la distribution sur laquelle se trouve concentrée la moitié des éléments dont les valeurs de X sont les moins différentes de la médiane. On exclut alors de la distribution les 25% des valeurs les plus faibles et les 25% des valeurs les plus élevées.

Le diagramme en boîte est un moyen de résumer une série statistique à l'aide de cinq valeurs : la valeur la plus faible, la valeur la plus élevée, le premier quartile, la médiane et le troisième quartile.

Activité 2

Dans le tableau ci-dessous, on a résumé le degré de motivation de 20 élèves à suivre une session de formation dans les technologies de l'information.

On a codé chacune des modalités de la manière suivante :

1 = très peu motivé, 2 = peu motivé, 3 = motivé et 4 = très motivé.

Modalités	Effectifs
1	5
2	7
3	6
4	2

1. Calculer la médiane, le premier quartile Q_1 , le troisième quartile Q_3 et l'écart interquartile de la série.
2. Représenter le diagramme en boîte de la série puis l'interpréter.

Activité 3

Les données ci-dessous représente l'âge de 59 patients d'une clinique.

Classe	21 - 27	28 - 34	35 - 41	42 - 48	49 - 55	56 - 62	63 - 69
Effectif	3	7	12	15	12	7	3

1. Représenter le polygone des fréquences cumulées croissantes.
2. En déduire la médiane, le premier et le troisième quartile.
3. Déterminer l'écart interquartile et l'interpréter.

Soit une série statistique X dont les valeurs sont groupées en classes.
 L'abscisse du point de la courbe des fréquences cumulées croissantes d'ordonnée 0.5 est une valeur convenable de la médiane de X .
 L'abscisse du point de la courbe des fréquences cumulées croissantes d'ordonnée 0.25 est une valeur convenable du premier quartile de X .
 L'abscisse du point de la courbe des fréquences cumulées croissantes d'ordonnée 0.75 est une valeur convenable du troisième quartile de X .

1.2 Propriétés de la médiane et des quartiles

Activité 1

Dans une entreprise, les salaires (en dinars) des employés sont résumés dans le tableau ci-dessous.

	Minimum	Premier quartile	Médiane	Troisième quartile	Maximum
Salaires	350	400	430	600	1200

Le conseil d'administration décide d'augmenter tous les salaires de 2% et d'accorder une indemnité mensuelle de 20 dinars à chaque employé.

Calculer le salaire minimum, les quartiles Q_1 et Q_3 et la médiane correspondant à la nouvelle série de salaires. Que remarque-t-on ?

Soit X une série statistique de valeurs $(x_1, \dots, x_N)$ rangées dans l'ordre croissant, de médiane m et de quartiles Q_1 et Q_3 . Soit a et b deux réels tels que $a > 0$ et Y la série statistique de valeurs $(ax_1 + b, \dots, ax_N + b)$.

Alors Y est de médiane $am + b$ et de quartiles $aQ_1 + b$ et $aQ_3 + b$.

1.3 Comparaison de deux séries statistiques

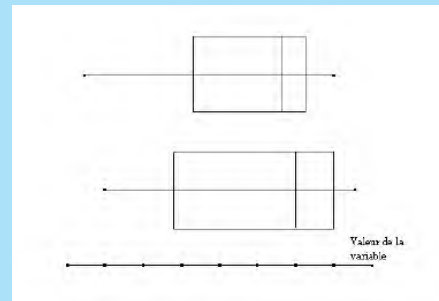
Activité 1

Un chercheur a effectué deux séries de mesures pour étudier le taux de caféine contenu dans différentes boissons.

Les mesures sont consignées dans les tableaux ci-dessous.

Série 1				Série 2			
0.04	1.09	2.1	1.9	0.06	3.32	2.9	3.06
2.9	0.059	0.06	1.87	3	2.3	0.9	3.3
2.81	2.23	3.1	5	1.11	1.88	1.05	3.21

Pour comparer deux séries statistiques, on représente le diagramme en boîte de chacune d'elles et on les lit à la même échelle.



1. Représenter le diagramme en boîte de chacune des séries.
2. En comparant la médiane et l'écart interquartile des deux séries, citer la série qui contient les boissons ayant constamment un taux plus élevé de caféine.

Activité 2

Les tableaux ci-dessous donnent les relevés pluviométriques en millimètre pour 25 stations tunisiennes pendant les années 2000 et 2001.

Année 2000				
741.1	436.4	345.5	476.3	454
335.1	311.0	390.6	425.9	490.0
261.4	1822	1422	1327	270.9
94.6	93.1	104.1	80.6	28.5
97.8	51.3	59.2	37.5	74.7

Année 2001				
928.3	489.2	416.1	402.8	403.1
320.2	304.2	324.8	325.1	401.8
316.8	113.1	258.8	231.7	200.2
220.3	107.9	86.5	107.1	27.7
74.7	58.0	25.5	43.0	81.0

1. Regrouper, pour chaque série, les données en classes d'amplitude 300.
2. Déterminer les centres des classes.
3. Représenter le polygone des fréquences cumulées croissantes.
4. Représenter les diagrammes en boîtes des deux séries et les interpréter.

Activité 3

Dans les tableaux ci-dessous, on a recueilli les poids (en kg) de pères et de leurs fils aînés âgés entre trois et quatre ans.

Série 1 : Poids des pères			
77	93	100	89
84	93	84	84
72	92	96	99
88	73	88	82
85	95	77	73
87	82	79	86
88	86	79	86
84	77	87	84

Série 2 : Poids des fils			
17.8	18.5	18.5	17.8
18.5	18.5	18	17.8
17.3	17.8	19.1	18.8
18.3	17.3	18.5	17.8
17.5	18.8	18	17.8
19.1	18.5	18	18.3
18	17.8	17.5	17.8
18	18	18.5	17.8

1. Représenter les diagrammes en boîte de chacune des séries.
2. On désigne par m_1 et e_1 (respectivement m_2 et e_2) la médiane et l'écart interquartile de la série 1 (respectivement de la série 2).

a. Calculer $\frac{e_1}{m_1}$ et $\frac{e_2}{m_2}$.

- b. Comparer les dispersions des deux séries et interpréter le résultat obtenu.

L'écart interquartile relatif d'une série statistique à une variable quantitative est égal au quotient de l'écart interquartile par la médiane de la série. C'est un nombre sans unité qui peut être exprimé en pourcentage. On utilise l'écart interquartile relatif lorsqu'on veut comparer les dispersions autour de la médiane de deux séries statistiques dont les valeurs respectives ont des ordres de grandeur différents. Plus l'écart interquartile relatif est faible, plus la dispersion autour de la médiane est faible.

2. Moyenne et écart-type

2.1. Définition

Activité 1

On a mesuré au centième de millimètre le diamètre de 100 pièces prises au hasard dans la production d'une machine et on a regroupé les résultats dans le tableau ci-dessous.

Diamètre	60.56	60.57	60.58	60.59	60.60	60.61	60.62
Effectif	25	20	19	11	10	9	6

1. Déterminer la moyenne de cette série.
2. On désigne par σ l'écart-type de cette série.
On admet qu'un réglage de la machine s'impose dès que $\sigma > 0.13$. Faut-il régler la machine ?

L'écart-type est une mesure de dispersion qu'on utilise pour mesurer la dispersion des valeurs d'une variable statistique à variable quantitative autour de la moyenne de cette série.

Soit X une série statistique de valeurs $x_1, \dots, x_p$ d'effectifs respectifs $n_1, \dots, n_p$.

On désigne par N l'effectif total (c'est à dire $N = n_1 + n_2 + \dots + n_p$).

Le réel $\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i x_i$ est la moyenne de la série.

Le réel $V = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i x_i^2 - \bar{X}^2$ est la variance de la série.

Le réel $\sigma = \sqrt{V}$ est l'écart-type de la série.

Activité 1

Le tableau ci-dessous donne la répartition de 220 employés d'une entreprise en fonction de leur charge horaire durant une semaine.

fluorescence	Effectif
[15, 20[	8
[20, 25[	13
[25, 30[	21
[30, 35[	20
[35, 40[	14
[40, 45[	4

1. Déterminer le centre des classes et représenter le polygone des effectifs de cette série.
2. Calculer la moyenne et l'écart-type σ de la série.

2. 2 Propriétés de la moyenne et de l'écart-type

Activité 1

Dans une entreprise de production d'outils informatiques les prix de vente (en dinars) des articles sont résumés dans le tableau ci-dessous.

3.5	Minimum	Premier quartile	Médiane	Troisième quartile	Maximum
Prix de vente	28	89	173	212	310

Le conseil d'administration décide d'augmenter les prix de ventes de tous les articles de 2% et de majorer le prix final de 3 dinars pour tous les articles.

1. Calculer le prix de vente moyen et l'écart type de la nouvelle série de prix de ventes.
2. Que remarque-t-on ?

Soit X une série statistique de valeurs $(x_1, \dots, x_N)$ de moyenne $\bar{X}$ et d'écart-type σ .

Soit a et b deux réels et Y la série statistique de valeurs $(ax_1 + b, \dots, ax_N + b)$.

On désigne par $\bar{Y}$ et σ' la moyenne et l'écart-type de Y . Alors

$\bar{Y} = a\bar{X} + b$ et $\sigma' = |a| \sigma$.

2. 3 Distribution normale

Activité 1

On a mesuré la fluorescence de la chlorophylle (en millivolts) dans un océan.

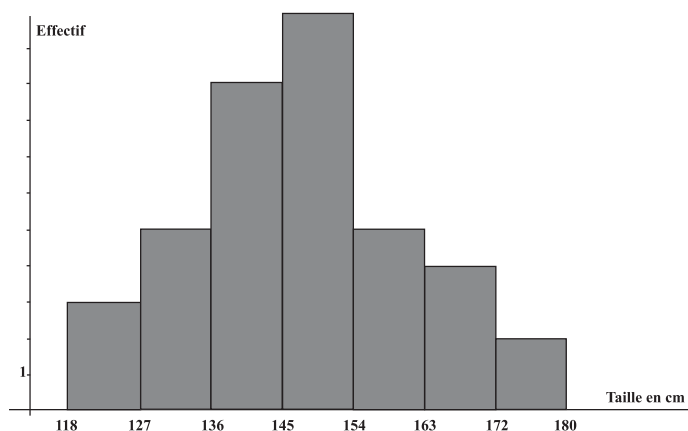
Dans le tableau ci-dessous, on a regroupé en classes ces mesures de fluorescence.

Fluorescence	Effectif
[15, 20[	8
[20, 25[	13
[25, 30[	21
[30, 35[	20
[35, 40[	14
[40, 45[	4

1. Déterminer le centre des classes et représenter le polygone des effectifs de cette série.
2. Calculer la moyenne et l'écart-type σ de la série.
3. Déterminer le pourcentage de chlorophylle dont la fluorescence appartient à l'intervalle
 - a. $[\bar{X} - \sigma, \bar{X} + \sigma]$;
 - b. $[\bar{X} - 2\sigma, \bar{X} + 2\sigma]$;
 - c. $[\bar{X} - 3\sigma, \bar{X} + 3\sigma]$.

Activité 2

Dans la figure ci-dessous, on a représenté l'histogramme de la série des tailles (en cm) de 39 élèves.

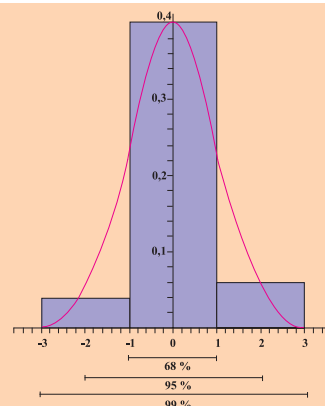


1. Calculer la moyenne et l'écart-type de cette série.
2. Déterminer les intervalles centrés en $\bar{X}$, dans lesquels se situent 68%, 95% et 99% des élèves.

Soit X une série statistique de moyenne $\bar{X}$ et d'écart-type σ .
On dit que X est une distribution normale ou gaussienne lorsque le polygone des effectifs est tel que environ

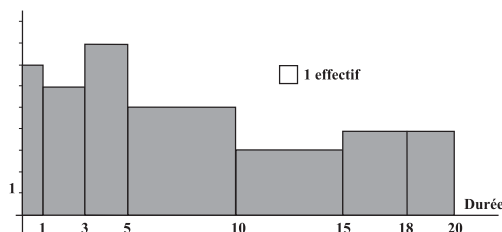
- 68% des effectifs sont situés dans l'intervalle $[\bar{X} - \sigma, \bar{X} + \sigma]$,
- 95% des effectifs sont situés dans l'intervalle $[\bar{X} - 2\sigma, \bar{X} + 2\sigma]$,
- 99% des effectifs sont situés dans l'intervalle $[\bar{X} - 3\sigma, \bar{X} + 3\sigma]$.

Dans ce cas, le polygone des effectifs a la forme d'une cloche symétrique par rapport à la moyenne.



Activité 3

L'histogramme ci-dessous donne la répartition des durées de 95 communications (en minute) d'un abonné, pendant un mois.



1. Faire apparaître, dans un tableau, les classes, les centres des classes, les effectifs et les fréquences de cette série.
2. a. Quelle est la durée moyenne des communications ?
b. Quelle est la durée la plus fréquente ?
3. Calculer l'écart-type σ de la série.
4. a. La distribution est-elle une distribution normale ?
b. Etait-il possible de répondre à la question précédente, à partir de l'histogramme de la série ?

Activité 4

Dans un lycée secondaire, la moyenne des QI de 1200 élèves est égale à 100 et l'écart-type 15.

On suppose que la série des QI est une distribution normale.

Le QI est le quotient intellectuel, il est égal au quotient de l'âge mental par l'âge exact exprimé sous forme d'un pourcentage.

1. Déterminer le pourcentage des élèves qui ont un QI compris entre 85 et 115.
2. Déterminer le pourcentage des élèves qui ont un QI compris entre 70 et 130.
3. Déterminer le pourcentage des élèves qui ont un QI compris entre 55 et 145.
4. Déterminer le pourcentage des élèves qui ont un QI inférieur à 55 ou un QI supérieur à 145.
5. Déterminer le pourcentage des élèves qui ont un QI inférieur à 145.

Activité 5

On a effectué des prélèvements sanguins sur un échantillon d'individus, en vue de mesurer les taux de cholestérol et de glycémie. On admet que les taux suivent une distribution normale.

- Sachant que pour le cholestérol, 95% des taux observés se trouvent entre 0.5 et 1.5 g/l.
 - Calculer la moyenne et l'écart- type de l'échantillon.
 - Dans quel intervalle se trouvent 99% des taux ?
- Sachant que pour la glycémie, la moyenne observée est de 0.97g/l et l'écart- type est de 0.09g/l.
 - Déterminer le pourcentage des individus dont le taux de glycémie est compris entre 0.88 et 1.06.
 - Déterminer le pourcentage des individus dont le taux de glycémie est compris entre 0.79 et 1.15.
 - Déterminer le pourcentage des individus dont le taux de glycémie est compris entre 0.7 et 1.24.

2. 4 Comparaison de deux séries statistiques

Activité 1

Le tableau ci-dessous représente la structure de la population tunisienne par tranches d'âge.

Tranche d'âge	0 - 4 ans	5 - 14 ans	15 - 59 ans	60-95 ans	Total
Année 1990	12.4	24.3	55.6	7.7	100
Année 2000	8.6	21.3	61.0	9.1	100

- Pour chacune des séries, donner la moyenne d'âge et l'écart- type.
- Comparer la dispersion des deux séries autour de la moyenne.
 - Commenter le résultat obtenu.
- Peut-on prévoir la structure de la population dans 10 ans ?

Soient X et Y deux séries statistiques dont les valeurs ont le même ordre de grandeur et d'écarts- type respectifs σ et σ' . Plus l'écart- type est faible, plus la dispersion autour de la moyenne est faible.

Activité 2

Un scientifique compare deux échantillons de mesure d'un produit. Il obtient les résultats ci-dessous.

Echantillon A	4	6	8	10	12	14	16
Echantillon B	4	7	9	10	11	13	16

- Pour chaque échantillon, déterminer la moyenne et l'écart- type.
- Quel est l'échantillon qui présente les mesures les moins dispersées autour de la moyenne ?

Activité 3

Dans le tableau ci-dessous, on a représenté les temps de course de cinq athlètes sur deux parcours.

	1500 m	5000 m
Coureur 1	3'58''17	14'58''12
Coureur 2	4'05''48	14'47''08
Coureur 3	4'12''97	15'37''85
Coureur 4	4'08''29	13'57''70
Coureur 5	4'00''12	14'48''34

1. a. Pour chaque série, calculer le quotient de l'écart-type par la moyenne.
b. Laquelle des deux courses a les temps les plus dispersés autour de la moyenne ?
2. a. Calculer la médiane, le premier et le troisième quartile de chacune des deux séries.
b. Calculer les écarts interquartiles relatifs de chacune des deux séries.
Est-il possible d'utiliser ces résultats pour répondre à la question 1.b ?

Soit X une série statistique de moyenne $\bar{X}$ et d'écart-type σ .

Le réel $\frac{\sigma}{\bar{X}}$ est dit écart-type relatif de X .

Il peut-être exprimé en pourcentage.

Pour comparer deux séries statistiques qui n'ont pas le même ordre de grandeur, on peut comparer leurs écarts-type relatifs respectifs. Plus l'écart-type relatif est faible, plus la dispersion autour de la moyenne est faible.

Activité 4

Le tableau ci-dessous, indique pour 8 années, le pourcentage de la population active occupée en Tunisie, dans deux secteurs d'activités.

	X : Agriculture et Pêche	Y : Industrie, Mines, Energie, Bâtiment et travaux public
1994	21.9	35.0
1997	22.0	34.0
1999	22.7	33.8
2000	22.1	33.2
2001	22.0	33.9
2002	21.0	33.9
2003	21.4	33.3
2004	16.3	34.3

Dans quel secteur d'activités, les pourcentages de la population active occupée sont-ils les moins dispersés autour de la moyenne, durant les 8 années ?

Activité 5

Un élève a obtenu 12 à son examen de mathématiques et il a obtenu 16 dans son examen d'histoire.

La moyenne des notes de la classe en mathématique est égale à 10 et l'écart-type σ_1 est égal 1.

La moyenne des notes de la classe en histoire est égale à 14 et l'écart-type σ_2 est égal à 2. Dans quelle matière l'élève est-il le mieux classé ?

Soit une série à variable statistique X de moyenne $\bar{X}$ et d'écart-type σ .

L'écart d'une valeur x de la variable par rapport à la moyenne en unités d'écarts-type est égale à $\frac{x - \bar{X}}{\sigma}$.

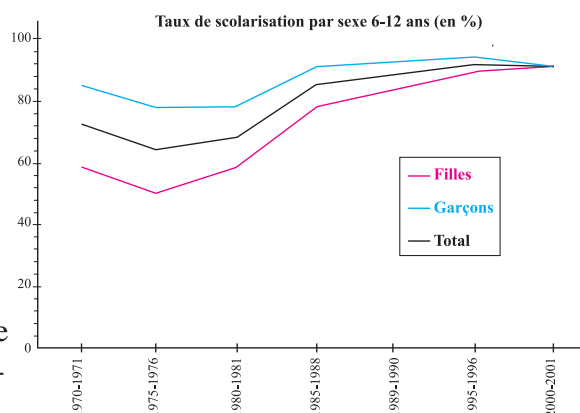
On l'utilise pour comparer la dispersion de deux valeurs prises par deux variables statistiques, par rapport à leurs moyennes respectives.

3. Comparaison de séries chronologiques

Activité 1

Dans le graphique ci-contre, les trois courbes représentent l'évolution du taux de scolarisation des enfants âgés de 6 à 12 ans de l'année scolaire 1970-1971 à l'année scolaire 2000-2001.

1. Pour chacune des trois courbes, déterminer les coefficients multiplicateurs arrondis au dixième qui permettent de passer de l'année scolaire 1980-1981 à l'année scolaire 1990-1991.
2. Pour chacune des trois courbes, déterminer les coefficients multiplicateurs arrondis au dixième qui permettent de passer de l'année scolaire 1990-1991 à l'année scolaire 2000-2001.
3. Peut-on prévoir l'évolution du taux de scolarisation des enfants âgés de 6 à 12 ans, dans dix années ?



Activité 2

Le tableau suivant indique les effectifs des élèves suivant leur orientation.

	Scientifiques	Techniques	Lettres	Economie-Gestion
1975-1976	7945	1264	3376	—
1980-1981	10552	2045	7101	—
1985-1986	21077	2755	16895	—
1990-1991	23261	2637	22458	—
1994-1995	20234	6642	14614	8028
1997-1998	29891	9338	18421	10105
1998-1999	33046	10425	19080	12030
2000-2001	33967	10874	17438	13859

1. Représenter dans un même graphique les courbes d'évolution des effectifs des élèves selon leur orientation dans les sections sciences, techniques et lettres (Indice 100 en 1975-1976).
2. a. En quelle année scolaire, y a-t-il eu une baisse de l'effectif des élèves orientés vers la section lettres ?
b. Durant cette même année, y a-t-il eu une baisse des effectifs des élèves orientés vers les sections mathématiques et sciences ? techniques ?
3. Pour chacune des trois courbes, déterminer les pourcentages d'augmentation des effectifs à partir de l'année scolaire 1994-1995 jusqu'à 2000-2001.
4. A partir de l'année scolaire 1994-1995, la section économie et gestion a été introduite.
a. Compléter le tableau suivant.

Année scolaire	1994-1995	1997-1998	1998-1999	2000-2001
Effectif des élèves de la section économie-gestion				
Coefficient multiplicateur arrondi au centième	1			
Indice	100			

- b. Quelles sont les sections les plus demandées à partir de l'année scolaire 1994 -1995 ?

Activité 3

Le tableau ci-dessous, donne le dosage de la quantité d'ADN (en unité arbitraire) contenue dans le noyau d'une cellule au cours de sa division.

Temps	0h	1h	1h45	1h50	3h	5h50	7h	9h	10h	12h	13h45	13h50	15h
Quantités d'ADN	8	8	8	4	4	4	5	7	8	8	8	4	4

1. Représenter la courbe d'évolution de la quantité d'ADN en fonction du temps.
2. Interpréter les variations des taux observés.

4. Série statistique à deux variables

4.1 Définition

Il arrive que l'on soit amené à effectuer deux séries de mesure sur un même échantillon et que l'on s'interroge sur les relations possibles entre ces mesures.

On dit alors que l'on a une série statistique à deux variables.

On dit qu'un couple (X, Y) de variables statistiques définit une série double si les deux variables X et Y sont observées simultanément sur une même population.

Dans le cas où X et Y sont quantitatives, la série double correspondante est l'ensemble des couples de valeurs numériques prises respectivement par X et Y .

Soit (X, Y) une série statistique double.

La distribution marginale de la variable X est la distribution des différentes valeurs prises par la variable X .

La distribution marginale de la variable Y est la distribution des différentes valeurs prises par la variable Y .

Activité 1

Une classe de 3^{ème} année secondaire contient 30 élèves. Dans le tableau ci-dessous on a relevé pour chacun des élèves ses moyennes en mathématiques au deuxième et troisième trimestre.

Elève	X : Moyenne au deuxième trimestre	Y : Moyenne au troisième trimestre
1	8.5	13.25
2	14.5	16.5
3	10.25	8.75
4	17.25	19.25
5	9.25	16.25
6	10	9.5
7	3.25	7.25
8	11.5	15.25
9	8.5	12.25
10	12.75	15.75
11	7.5	10.75
12	6.25	6.25
13	1	6.5
14	3	7.25
15	9	10.25
16	13.5	15
17	14.75	14.25
18	16.75	15.25
19	7.5	12
20	10.25	6.75
21	12.5	12
22	9.5	9.5
23	11	8.5
24	15.25	14
25	7	6
26	5	5.5
27	2.25	2
28	15.5	14
29	12	13.5
30	4.5	6.75

- Calculer la moyenne $\bar{X}$ et l'écart-type σ_X de la variable X.
 - Calculer la moyenne $\bar{Y}$ et l'écart-type σ_Y de la variable Y.
 - Comparer la dispersion des moyennes des élèves dans les deux trimestres ?
- Représenter, dans un repère orthogonal, les points M(X, Y).
 - Placer dans ce repère le point G ($\bar{X}$, $\bar{Y}$)
 - Que peut-on dire de cette affirmation : « les points du nuage se répartissent sensiblement autour d'une droite passant par le point G. » ?

Le plan est muni d'un repère. Soit (X, Y) une série statistique double.

Le nuage de points représentant la série (X, Y) est l'ensemble des points $M(x, y)$ où (x, y) est un couple de valeurs numériques prises respectivement par X et Y .

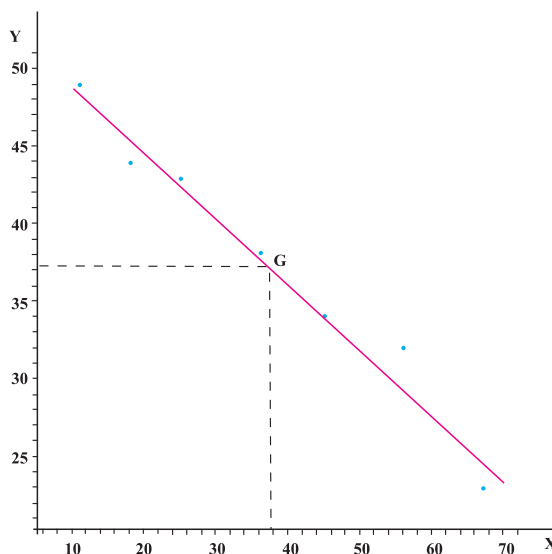
Si on désigne par $\bar{X}$ et $\bar{Y}$ les moyennes respectives des séries X et Y alors le point $G(\bar{X}, \bar{Y})$ est appelé point moyen du nuage de points.

Activité 2

La consommation maximale de dioxygène ($VO_2\max$) d'un individu dépend de l'effort qu'il fournit et de son âge.

On définit la série statistique double (X, Y) , où X est l'âge du sujet (en année) et Y est la quantité de $VO_2\max$ correspondante.

Dans le graphique ci-dessous, on a représenté le nuage de points de (X, Y) , le point moyen $G(\bar{X}, \bar{Y})$ ainsi que la droite D passant par G et d'équation $y = -0.42x + 52.9$.



La droite D est un ajustement affine du nuage de points de la série double (X, Y) .

Soit (X, Y) une série double et D un ajustement affine du nuage de points. Si x est une valeur donnée de la variable X alors l'ordonnée du point de D d'abscisse x est une estimation de la valeur de la variable Y correspondante.

Si y est une valeur donnée de la variable Y alors l'abscisse du point de D d'ordonnée y est une estimation de la valeur de la variable X correspondante.

1. Comment semblent se répartir les points du nuage autour de la droite D ?
2. Donner une estimation de la quantité de $VO_2\max$, d'un sujet âgé de 17 ans.
3. Donner une estimation de l'âge du sujet, au moment où la quantité de $VO_2\max$ est égale à $30 \text{ mL} \cdot \text{min}^{-1} \cdot \text{Kg}^{-1}$.

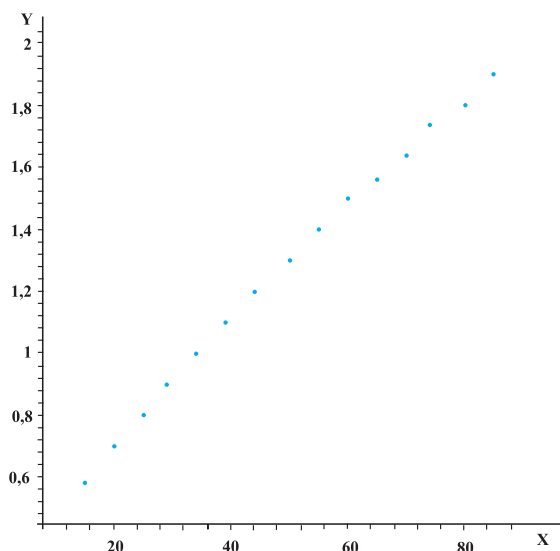
Activité 3

L'énergie dépensée par un sujet dépend de sa surface corporelle.

Dans le tableau ci-dessous, on a relevé le poids (en Kg) et la surface corporelle (en m^2) correspondante de 15 sujets.

	X : Masse	Y : Surface corporelle
1	15	0.58
2	20	0.7
3	25	0.8
4	29	0.9
5	34	1
6	39	1.1
7	44	1.2
8	50	1.3
9	55	1.4
10	60	1.5
11	65	1.56
12	70	1.64
13	74	1.74
14	80	1.8
15	85	1.9

1. a. Calculer la moyenne $\bar{X}$ et l'écart-type σ_X de la variable X.
b. Calculer la moyenne $\bar{Y}$ et l'écart-type σ_Y de la variable Y.
2. Dans le graphique ci-dessous, on a représenté le nuage de points de (X, Y).



- a. Placer le point G ($\bar{X}$, $\bar{Y}$).
- b. On scinde l'ensemble des 15 points du nuage en deux parties. La première partie (I) correspond aux sujets 1 à 8 et la deuxième partie (II) correspond aux sujets 9 à 15.
On désigne par G_1 et G_2 les points moyens respectifs de la partie (I) et de la partie (II).
Vérifier que G, G_1 et G_2 sont alignés et tracer la droite (G_1G_2).
- c. Comment semblent se répartir les points du nuage autour de la droite (G_1G_2).
3. Donner une estimation de la surface corporelle d'un sujet qui pèse 61 KG.

Soit (X, Y) une série statistique double et G son point moyen.

On scinde le nuage de point de (X, Y) en deux parties contenant à peu près le même nombre de points obtenant ainsi deux nuages de points. On désigne par G_1 et G_2 les points moyens de ces deux nuages.

La droite (G_1G_2) passe par le point G et définit un ajustement affine du nuage de points représentant la série statistique double (X, Y) .

Activité 4

On suppose que la quantité offerte sur le marché, exprimée en milliers d'unités, d'un produit fabriqué par une entreprise, est proportionnelle au prix unitaire exprimé en dinars.

1. a. Compléter le tableau suivant sachant que pour un prix de 2.5 dinars la quantité offerte sur le marché est 280000 unités.

X : Prix unitaire	2.15	2.26	2.40	2.57	2.63	2.75	2.82	2.90
Y : Quantité offerte								

- b. Déterminer un ajustement affine D du nuage de points de la série double (X, Y) .

2. Dans le tableau ci-dessous, on a recueilli le nombre d'unités demandées (en milliers d'unités) en fonction du prix unitaire exprimé en dinars.

X' : Prix unitaire	2.15	2.26	2.40	2.57	2.63	2.75	2.82	2.90
Y' : Quantité demandée	360	345	325	300	290	275	265	250

Déterminer un ajustement affine D' du nuage de points de la série double (X', Y') .

3. Déterminer graphiquement le prix d'équilibre, c'est à dire le prix pour lequel l'offre est égale à la demande.

Activité 5

Le tableau suivant donne l'effectif de la population scolaire de la 3^{ème} année de l'enseignement secondaire du mois d'octobre 1997 au mois d'octobre 2002.

X : Année	1997	1998	1999	2000	2001	2002
Y : Population scolaire en 3 ^{ème} année	67755	74581	79266	76138	80123	90087

- Déterminer un ajustement affine du nuage de points de la série double (X, Y) .
- Donner une estimation de la population scolaire en 3^{ème} année secondaire au mois d'octobre 2010.

Activité 6

Le tableau ci-dessous, indique la répartition du nombre d'étudiants dans trois universités tunisiennes durant l'année universitaire 2002-2003.

X : Secteur de formation Y : Université	Sciences fondamentales	Lettres, arts, sciences humaines et islamiques	Sciences médicales et biologiques	Sciences juridiques, économiques et gestion	Sciences techniques
Tunis - El-Manar	10044	3814	6292	19752	3284
Université du centre	6335	17398	6378	15393	4814
Université du sud	10730	11191	2240	17540	5298

- Présenter à l'aide d'un tableau chacune des distributions marginales des variables X et Y.
- Représenter par un histogramme en bâtons la distribution marginale de la variable X.
 - Représenter par un diagramme circulaire la distribution marginale de la variable Y.
- Quel secteur de formation est le plus demandé ?
 - Quelle est l'université qui accueille le nombre le plus élevé d'étudiants ?

Activité 7

Dix personnes jouent à jeter simultanément 5 pièces de monnaie identiques. Chaque personne est libre de répéter autant de fois le jet et compte le nombre de " face " obtenu. Le tableau ci-dessous décrit le résultat final à l'issue de 1000 jets.

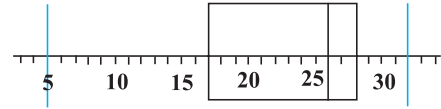
X : Numéro de la personne Y : Nombre de faces	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Totaux
0	4	3	5	3	4	3	5	4	4	3	38
1	15	12	17	14	15	13	16	15	14	13	144
2	34	29	39	32	35	34	38	37	34	30	342
3	29	24	32	27	29	29	32	31	28	26	287
4	16	15	18	16	17	16	18	18	16	14	164
5	3	2	3	2	3	2	3	3	2	2	25
Totaux	100	85	113	95	102	98	112	108	99	88	1000

- Représenter le polygone des fréquences cumulées croissantes de la distribution marginale de la variable Y.
 - Quel est le pourcentage de jets pour lesquels il y a moins de deux faces ?
- Présenter par un tableau $\bar{X}$ la distribution marginale de la variable X.
 - Calculer la moyenne $\bar{X}$ et l'écart-type σ_X de la variable X.
- Représenter graphiquement le nuage des points de (X, Y) et son point moyen.
 - Est-il possible de donner un ajustement affine de (X, Y) ?

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. Dans la figure ci-contre, on a représenté le diagramme en boîte d'une série à une variable statistique.



50% des valeurs de la variable statistique appartiennent à l'intervalle

☐ [17, 28]

☐ [5, 32]

☐ [17, 26] .

2. Soit une série statistique de valeurs $(x_1, \dots, x_N)$ rangées dans l'ordre croissant, de médiane m_e et de quartiles Q_1 et Q_3 . Alors la série statistique $(2x_1+5, \dots, 2x_N+5)$ a respectivement pour médiane, premier quartile et deuxième quartile les nombres suivants :

☐ $2m_e+5, 2Q_1+5$ et $2Q_3+5$

☐ $2m_e+5, 2Q_3+5$ et $2Q_1+5$

☐ $2m_e+5, Q_1$ et Q_3 .

3. Soit une série statistique de valeurs $(x_1, \dots, x_N)$ de moyenne m , et d'écart-type σ . Alors la série statistique $(-x_1+100, \dots, -x_N+100)$ a respectivement pour moyenne et pour écart type

☐ $-m +100$ et $-\sigma +100$

☐ $m +100$ et $\sigma +100$

☐ $-m +100$ et σ .

4. Dans une distribution gaussienne de moyenne 12.5 et d'écart-type 1, 68% des valeurs de la variable statistique appartiennent à l'intervalle

☐ [10.5, 14.5]

☐ [9.5, 12.5]

☐ [11.5, 13.5].

5. Soit (X, Y) une série statistique double dont les valeurs sont consignées dans le tableau ci-contre.

X	15	20	10	11
Y	5	5	4	2

Alors le point moyen de (X, Y) a pour coordonnées

☐ (20, 5)

☐ (14, 4)

☐ (21, 8).

VRAI – FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Il existe un réel tel que 50% des valeurs d'une variable statistique lui sont inférieures et 50% de ses valeurs lui sont supérieures.
2. La médiane d'une série à une variable statistique ne change pas lorsqu'on change la valeur la plus faible ou la valeur la plus élevée de la variable statistique.
3. Si X est une distribution gaussienne alors 50% des valeur de X sont inférieures à la moyenne.
4. Si la droite D est un ajustement affine d'une série statistique double alors tout point du nuage de points de cette série appartient à D .
5. Toute série statistique double possède au moins un ajustement affine.

Situation 1 : Variable centrée réduite

Soit X une série statistique à une variable de valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$, de moyenne $\bar{X}$ et d'écart-type σ .

On désigne par Z la série statistique de valeurs $z_1, z_2, \dots, z_n$ tels que $z_i = \frac{x_i - \bar{X}}{\sigma}$ où $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ (z_i est appelé variable centrée réduite en x_i).

Vérifier que la série statistique Z a pour moyenne 0 et pour écart-type 1.

Application 1

Les experts d'une entreprise ont partagé les personnes postulant pour le poste d'ingénieur en trois groupes. Chaque personne passe un test technique de recrutement.

Les moyennes des scores des groupes I, II et III sont respectivement égales à 82, 93 et 24.

Les écarts-type de la série des scores des groupes I, II et III sont respectivement égaux à 7, 2 et 9.

Trois personnes A, B et C faisant partie respectivement des groupes I, II et III, ont obtenu les scores suivants : 76, 89 et 21.

Laquelle de ces trois personnes est la plus performante dans son groupe ?

Application 2

On a regroupé le quotient intellectuel de 480 élèves d'un même lycée en classes de même amplitude.

Le tableau ci-dessous indique les centres des classes et les effectifs correspondants.

Centre de la classe	70	74	78	82	86	90	94	98	102	106	110	114	118	122	126
Effectif	4	9	16	28	45	66	85	72	54	38	27	18	11	5	2

1. Calculer la moyenne $\bar{X}$ et l'écart-type σ de cette série.
2. Transformer les QI en unités centrées réduites en remplissant le tableau suivant.

Centre de la classe	70	74	78	82	86	90	94	98	102	106	110	114	118	122	126
Variable centrée réduite $z = \frac{x - \bar{X}}{\sigma}$															
Effectif	4	9	16	28	45	66	85	72	54	38	27	18	11	5	2

- a. Construire le polygone des effectifs en fonction de la variable centrée réduite.
- b. La distribution des QI est-elle une distribution normale ?

Exercices et problèmes

Exercice 1

Le tableau ci-dessous indique les moyennes générales, arrondies à l'unité, de deux classes de 3^{ème} année Sciences d'un même lycée.

Moyenne générale	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Effectifs 3S1	0	3	4	4	5	7	3	4	2	1	0	0
Effectifs 3S2	2	4	3	3	3	4	3	2	2	3	1	2

- Vérifier que la médiane de chacune des deux séries est égale à 10.
 - Déterminer le premier et le troisième quartile de chacune des deux séries.
- Représenter les diagrammes en boîtes des deux séries.
 - Que peut-on dire de cette affirmation : « les deux classes ont le même profil puisque dans les deux cas, la médiane est égale à 10. » ?

Exercice 2

On a recueilli dans le tableau ci-dessous 45 nombres aléatoires de 1 à 20.

1	2	5	7	9	11	13	15	18
1	3	5	8	9	11	14	15	19
1	4	5	8	10	12	14	16	19
1	4	6	8	10	12	14	16	19
2	5	6	9	11	12	14	17	20

- Représenter ces données, par un tableau statistique à deux lignes, où la première ligne indique le nombre aléatoire et la deuxième ligne indique l'effectif correspondant.
- Calculer la médiane, le premier et le troisième quartile de cette série.
- Représenter le diagramme en boîte de cette série.
 - Commenter les résultats obtenus.

Exercice 3

Le tableau ci-dessous indique l'évolution du nombre de médecins en Tunisie en quatorze ans.

Année	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
Médecins	4425	4500	5099	5257	5344	5965	6177	6464	6819	7149	7444	7767	7964	8189

- Déterminer la médiane, le premier et le troisième quartile de cette série.
- Représenter le diagramme en boîte de cette série puis commenter le résultat obtenu.

Exercice 4

Les tableaux ci-dessous donnent les moyennes des températures (en °C) dans 25 stations tunisiennes pendant les années 2000 et 2001.

Année 2000				
20.4	20.2	21.4	21.5	19.7
21	16.6	20.7	20	20.4
21.9	22.1	21.5	22.7	19.6
19.7	21.3	20.4	20.6	23.2
21.6	22.2	21.1	23.3	23.6

Année 2001				
19.8	19.6	21.3	21.1	19.4
20.7	16.6	20.7	20.2	20.3
21.3	22.7	21.8	23.1	20.1
20.1	20.7	22.1	21.9	24.6
23.1	23.2	23	23.2	24.1

Représenter les diagrammes en boîtes des deux séries et commenter les résultats obtenus.

Exercice 5

Deux tireurs s'entraînent au tir à la cible. On a recueilli dans le tableau ci-dessous, leurs résultats en points, obtenus au bout de 30 tirs.

Points	50	30	20	10	0
Tireur A	8	9	8	4	1
Tireur B	6	16	3	3	2

1. Calculer la moyenne et l'écart-type des deux séries.
2. Comparer ces résultats. Lequel des deux tireurs est le plus régulier ?

Exercice 6

Quarante candidats passent un examen (noté de 0 à 20). La moyenne de la série des notes est égale à 9.5 et l'écart-type est égal à 2. Les examinateurs veulent effectuer un ajustement affine afin d'obtenir une moyenne de 10 et un écart-type de 3.

Notons $(x_i)_{1 \leq i \leq 40}$ les notes initiales de moyenne et $(y_i)_{1 \leq i \leq 40}$ les notes obtenus après l'ajustement affine.

On désigne par $f(x) = a x + b$, l'ajustement affine effectué.

Déterminer les valeurs de a et de b .

Exercice 7

Les élèves d'une classe ont été divisés en deux groupes pour passer un contrôle écrit sur un même sujet.

On a consigné les résultats dans les tableaux ci-dessous.

Groupe A							
Note	5	7	8	9	10	11	16
Effectif	1	2	1	3	2	3	1

Groupe B								
Note	6	7	9	10	11	13	14	16
Effectif	2	1	2	2	1	3	2	1

1. Lequel des deux groupes a obtenu en moyenne de meilleurs résultats ?
2. Comparer la dispersion des deux séries de notes.

Exercice 8

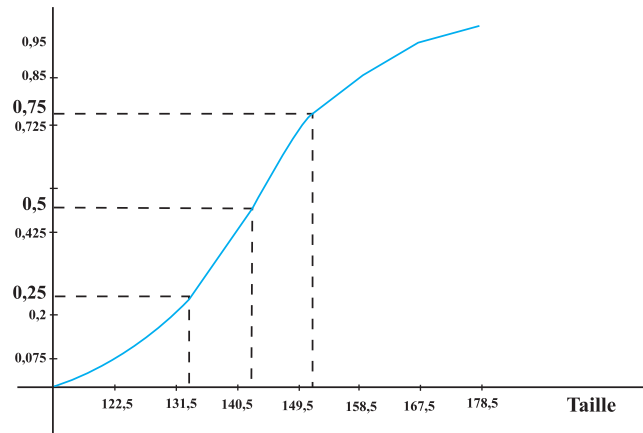
L'élève A a obtenu les dix notes suivantes : 10, 15, 16, 13, 8, 11, 12, 12, 13 et 15.

L'élève B a obtenu les dix notes suivantes : 11, 9, 9, 10, 15, 7, 12, 12, 14 et 13.

Quel est l'élève qui a obtenu les résultats les moins dispersés ?

Exercice 9

Dans le graphique ci-dessous, on a représenté le polygone des fréquences cumulées croissantes de la série des tailles (en cm) de 40 élèves d'une classe, rangées en classes d'amplitude 9 et tels que la valeur la plus faible observée est égale à 118.



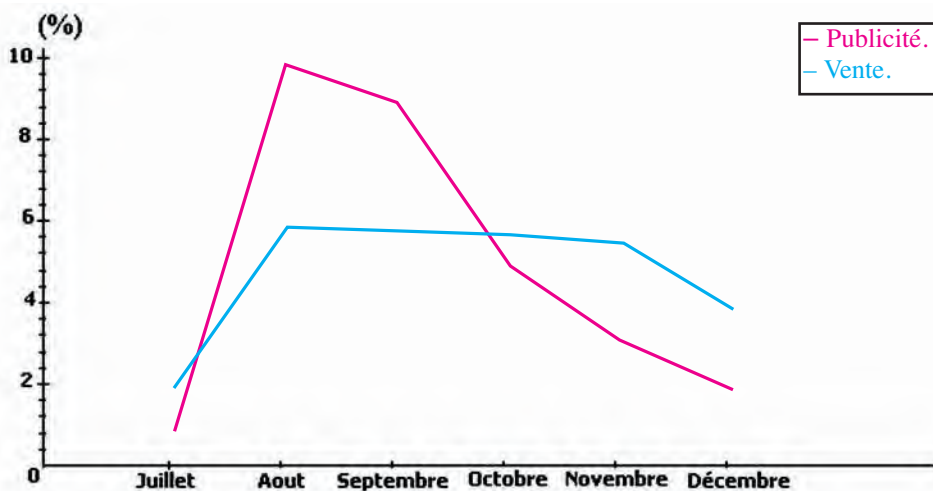
- Organiser les données de cette série en tableau, en précisant les classes et les effectifs correspondants.
- Déterminer la médiane, le premier et le troisième quartile de cette série.
 - Représenter le diagramme en boîte de cette série.
- Calculer la moyenne et l'écart-type de cette série.
- A-t-on une distribution normale ?

Exercice 10

Une entreprise qui fabrique des logiciels, lance sur le marché en juillet 2006 un nouveau logiciel. Elle accompagne le lancement du nouveau produit par une campagne publicitaire.

Après six mois, le département de marketing fait une étude pour juger de l'efficacité de la stratégie adoptée.

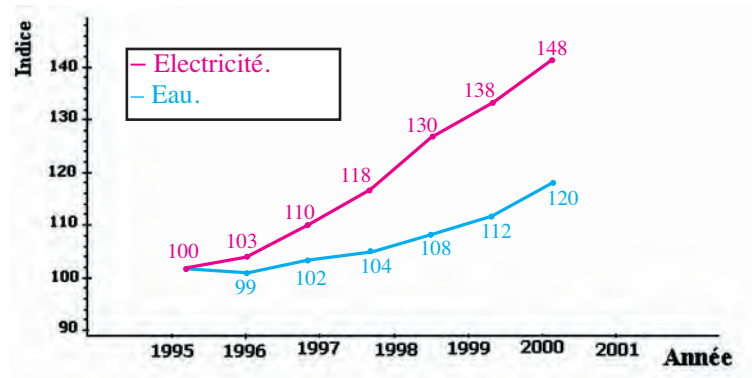
Le graphique ci-dessous représente la courbe des dépenses (en pourcentage du volume total des dépenses) consacrées à la promotion du logiciel et la courbe des ventes (en pourcentage du volume total des ventes).



- Comparer les variations des deux courbes.
- Est-ce qu'une augmentation du budget consacré à la publicité implique une augmentation du volume des ventes ?
- Expliquer la baisse du volume des ventes à partir de septembre.

Exercice 11

Le graphique ci-dessous décrit l'évolution de la production d'électricité (en 10^6 KWH) et l'évolution de la production d'eau (en 10^6 m³) en Tunisie entre les années 1995 et 2001.



1. Donner pour chacune des courbes, le coefficient multiplicateur qui permet de passer de 1995 à 2001.
2. On sait que la production d'eau en 2001 est égale à $373 \cdot 10^6$ m³.
Trouver la production d'eau en 2000.
3. On sait que la production d'électricité en 2001 est égale à $10853 \cdot 10^6$ KWH.
Trouver la production d'électricité en 2000.
4. Estimer les productions d'eau et d'électricité en 2010.

Exercice 12

Pour avoir une idée sur sa popularité, un directeur d'une grande entreprise effectue à la fin de chaque année un sondage auprès de ses employés.

Le résultat (en %) de l'année 1996 à l'année 2002 est représenté par le graphique ci-dessous.



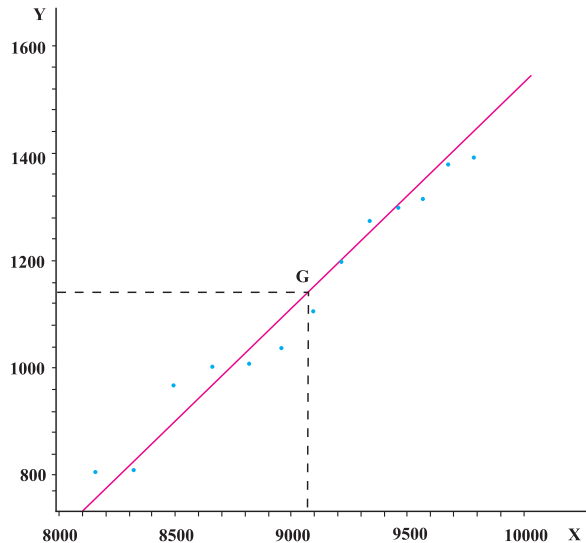
1. Pour chaque année additionner les pourcentages correspondants à la bonne et à la mauvaise popularité ?
A-t-on 100% chaque année ? Quelle explication peut-on donner ?
2. En quelle année la popularité de ce chef d'entreprise a-t-elle été la plus forte ?

Exercice 13

On a relevé durant 14 ans à partir de 1990, l'estimation de la population totale (en milliers) et le nombre de dentistes en Tunisie.

Dans le graphique ci-dessous, on a représenté les points $M(X, Y)$, où X désigne l'estimation de la population totale (en milliers) et Y le nombre de dentistes pour la même année, le point moyen $G(\bar{X}, \bar{Y})$ ainsi que la droite D passant par G et d'équation $y = 0.42x - 2665.5$.

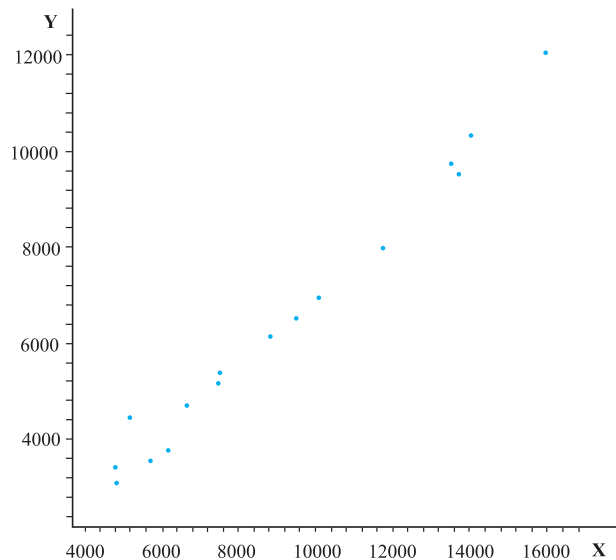
1. Comment semblent se répartir les points du nuage autour de la droite D ?
2. Donner une estimation du nombre de dentistes si la population atteint 9 millions d'habitants.
3. Donner une estimation de la population de sorte qu'il y ait au moins 1600 dentistes.



Exercice 14

On a relevé dans le tableau ci-dessous, le montant total (en million de dinars) du commerce extérieur en Tunisie (importations et exportations) depuis l'année 1990 jusqu'à l'année 2004.

	X : Importations	Y : Exportations
1990	4826.4	3087.4
1991	4788.9	3417.1
1992	5688.8	3549.7
1993	6172.1	3760
1994	6647.3	4696.6
1995	7464.3	5172.5
1996	7498.8	5372
1997	8793.5	6147.9
1998	9489.5	6518.3
1999	10070.5	6966.9
2000	11738	8004.8
2001	13697.3	9536.2
2002	13510.9	9748.6
2003	14038.9	10342.6
2004	15960.3	12054.9



1. a. Calculer la moyenne $\bar{X}$ et l'écart-type σ_X de la variable X .
b. Calculer la moyenne $\bar{Y}$ et l'écart-type σ_Y de la variable Y .
2. Comparer et commenter la dispersion des deux séries.
3. On a représenté ci-dessus, le nuage de points de la série double (X, Y) .
a. Placer le point $G(\bar{X}, \bar{Y})$.
b. Donner un ajustement affine de la série double (X, Y) .
c. Donner une estimation du montant des exportations si le montant de l'importation est égal à 17000 millions de dinars.

Exercice 15

On a relevé dans le tableau ci-dessous, l'âge et la tension artérielle maximale de 6 femmes.

X : Age	36	42	48	54	60	66
Y : Tension artérielle	11.8	14	12.6	15	15.5	15.1

1. Représenter le nuage de points de la série double (X, Y).
2. Donner un ajustement affine de la série double (X, Y).
3. Quelle tension maximale devrait avoir une femme de 25 ans ?

Exercice 16

On a relevé dans le tableau ci-dessous, les poids (en Kg) respectifs de 12 pères et de leurs fils aînés.

X : Poids du père	65	63	67	64	68	62	70	66	68	67	69	71
Y : Poids du fils	68	66	68	65	69	66	68	65	71	67	68	70

Quel poids devrait avoir le fils aîné d'un homme qui pèse 87 Kg ?

Exercice 17

On a relevé dans le tableau ci-dessous, l'intensité de travail (en Kilojoules par minute) et la fréquence cardiaque de 8 personnes.

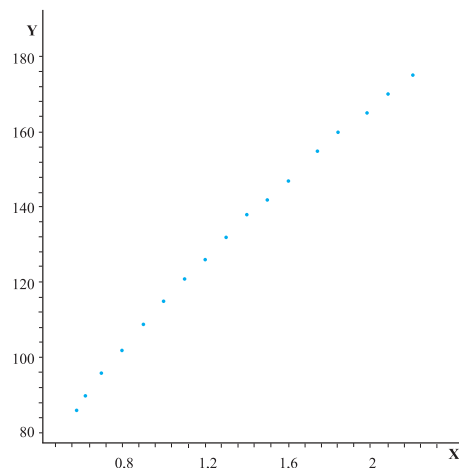
X : Intensité du travail	9.6	12.8	18.4	31.2	36.8	47.2	49.6	56.8
Y : Fréquence cardiaque	70	86	90	104	120	128	144	154

Quelle devrait être la fréquence cardiaque d'une personne dont l'intensité de travail est égale à 28.1 Kilojoules par minute ?

Exercice 18

On a représenté ci-dessous, le nuage de points de la série double (X, Y), où X est la surface corporelle (en m²) et Y est la taille (en cm) correspondante de 15 sujets.

Estimer la taille (en cm) que devrait avoir une personne dont la surface corporelle (en m²) est égale à 1.24.



Exercice 19

On a relevé dans le tableau ci-dessous l'évolution du chiffre d'affaire (en milliers de dinars) réalisé par une société à partir de 1995 jusqu'en 2004.

X : Année	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Y : Chiffre d'affaire	200	205	211	216	220	225	240	260	280	300

Utiliser deux méthodes pour estimer le chiffre d'affaire de cette société dans 10 ans.

Exercice 20

On a recueilli dans le tableau ci-dessous, le nombre de kilomètres parcourus avant la première grande panne et la puissance en chevaux fiscaux de 100 voitures.

X : Nombre de km Y : Puissance	Moins de 60	[60,100]	[100,140[	[140,180[	[180,220[	220 et plus
5	1	2	5	6	1	0
6	1	3	3	8	4	1
7	1	1	2	5	8	3
8	0	1	2	5	5	2
9	0	0	1	6	8	5
10 et plus	0	0	1	2	4	3

1. Représenter le nuage de points de la série double (X, Y).
2. Déterminer les coordonnées du point moyen G.
3. Est-il possible de donner un ajustement affine de la série double (X, Y) ?
4. Présenter par un tableau chacune des distributions marginales des variables statistiques X et Y.
5. Etudier et commenter la dispersion de la série à variable statistique X.

Exercice 21

On a recueilli dans le tableau ci-dessous, le nombre de naissances suivant l'âge de la mère dans les 7 régions de la Tunisie, durant l'année 2001.

X : Classe d'âges Y : Région	[15,20]	[20,25]	[25,30]	[30,35]	[35,40]	[40,45]	[45,50]
District de Tunis	298	2983	6256	6505	3761	722	33
Nord-Est	523	4073	6191	5303	2721	493	61
Nord-Ouest	265	2492	4545	4124	2325	500	67
Centre-Ouest	657	4479	7645	6812	4605	1395	195
Centre-Est	1060	8437	12641	9858	5486	1132	194
Sud-Ouest	164	1436	2803	2843	1898	543	73
Sud-Est	245	2592	4718	4074	2536	720	67

1. Présenter par un tableau chacune des distributions marginales des variables X et Y.
2. a. Représenter la distribution marginale de la variable Y par un histogramme en bâtons.
b. Quelle région de la Tunisie présente le taux le plus élevé de naissances ?
3. a. Calculer la moyenne de la série à variable statistique X puis interpréter le résultat obtenu.
b. Représenter le polygone des effectifs de la série à variable statistique X.
c. La distribution de la variable X est-elle une distribution normale ?

Avec l'ordinateur

Le tableau ci-dessous présente le chiffre d'affaires d'un magasin en fonction des frais de publicité qu'il engage.

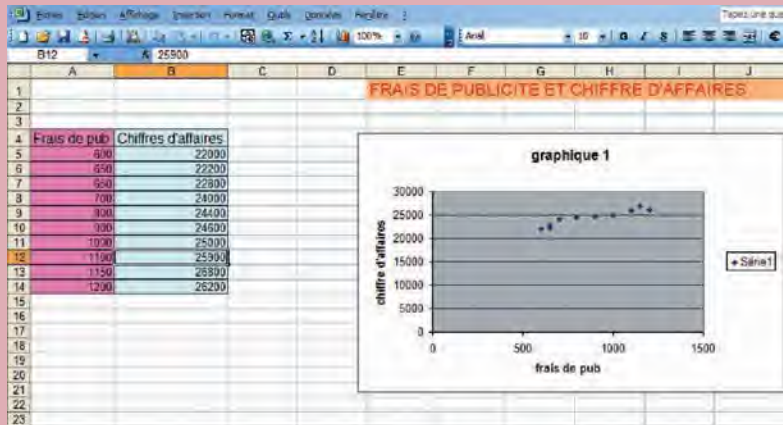
Frais de publicité (en dinars)	600	650	650	700	800	900	1000	1 100	1 100	1 150
Chiffre d'affaires (en dinars)	22 000	22 200	22 800	24 000	24 400	24 600	25 000	25 900	26 800	26 200

1. Saisie des données

Saisir les données de cette série statistique dans une feuille de calcul Excel

2. Tracé du nuage de points.

- Sélectionner l'ensemble du tableau en maintenant le bouton gauche de la souris enfoncé.
- Cliquer sur l'icône " Assistant graphique ".
- Sélectionner " Nuage de points " et le type de graphique : " Points placés dans un repère " ; appuyer sur " Suivant ".
- Sélectionner " Titres " : taper le titre choisi " graphique 1 ".
- Sélectionner " Axe des abscisses " : taper " Frais de publicité ".
- Sélectionner " Axe des ordonnées " : taper " Chiffre d'affaires ".
- Sélectionner " Légende " : cliquer sur " Afficher la légende " ; cliquer sur " Suivant " ; puis " Afficher le graphique en tant qu'objet dans feuille 1 " ; cliquer sur " Fin ".



3. Point moyen de la série.

- Copier dans une nouvelle feuille, le tableau des données de la série.
- Surligner la colonne des " Frais de pub " puis sélectionner l'icône " Σ ".
- Recommencer l'opération pour la colonne " Chiffres d'affaires ".
- Calculer les moyennes de chaque colonne en taper en I5 " = C12 / 10 ".
- Recommencer les mêmes opérations en I7 " = D12 / 10 "
- En déduire les coordonnées du point moyen.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1			Frais de pub	Chiffres d'affaires					
2			600	22000					
3			650	22200					
4			650	22800					
5			700	24000					
6			800	24400					
7			900	24600					
8			1000	25000					
9			1100	25900					
10			1150	26800					
11			1200	26200					
12			Totaux	8750					
13									

4. Courbe de tendance.

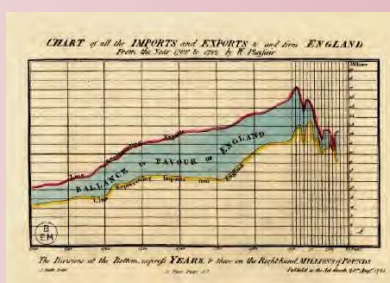
- Faire un clic droit sur un point de la courbe.
- Choisir " Ajouter une courbe de tendance ".
- Choisir la droite. Choisir dans le menu Options : " Afficher une équation ". Valider.

5. Exploitation de la courbe de tendance.

Les frais de publicité s'élevant à 1 300 dinars, déterminer le chiffre d'affaires de ce magasin.

A la fin du XVII^e siècle, on sent poindre une manière originale d'utiliser le calcul. John Graunt et William Petty en Angleterre, Witt en Hollande, créent une nouvelle science, qui est, comme l'écrit Diderot dans L'Encyclopédie, " celle dont les opérations ont pour but des recherches utiles à l'art de gouverner les peuples, telles que celles du nombre des hommes qui habitent un pays ; de la quantité de nourriture qu'il doivent consommer ; du travail qu'ils peuvent faire ; du temps qu'ils ont à vivre ; de la fertilité des terres ; de la fréquence des naufrages, etc. " .

Si cette conception présente quelques espoirs idéologiques, et une certaine aspiration à la perfection, cette science est de nos jours pratiquée selon une approche très objective, n'en faisant qu'un moyen d'estimer, selon une logique statistique, l'importance et l'influence de certains facteurs économiques sur la politique d'un Etat.



Chapitre 10

Probabilités

« Calculer la probabilité d'un événement n'a aucun sens une fois que l'on sait qu'il s'est produit. »

Jacquard

Pour commencer

Activité 1

Dans la plupart des calculatrices, il y a une touche Random.

Lorsqu'on appuie sur cette touche, il s'affiche un nombre appartenant à l'intervalle $[0, 1[$. Dans la plupart des cas, ce nombre s'affiche avec trois décimales. Chacun de ces nombres a la même chance d'apparaître. Cela permet d'obtenir chaque fois trois chiffres aléatoires.

Exemples :

Random = 0.268 donne 2, 6 et 8.

Random = 0.420 donne 4, 2 et 0.

Utiliser la calculatrice pour obtenir 50 chiffres aléatoires.

Activité 2

- On se propose de simuler 500 lancers d'une pièce de monnaie ;
 - utiliser la calculatrice pour obtenir 500 chiffres aléatoires,
 - noter P pour chaque chiffre pair obtenu et F pour chaque chiffre impair obtenu ,
 - organiser les résultats dans le tableau ci-dessous.

Issue	P	F
Fréquence		

Lorsqu'on tire au sort un nombre, ou qu'on lance une pièce de monnaie ou un dé, il est impossible de prévoir le résultat, car ce résultat est soumis au hasard. On dit alors que le résultat est aléatoire.

Les expériences telles que tirer au sort une question dans un examen, tirer au sort un nombre, lancer un dé non truqué ou une pièce de monnaie sont appelées expériences aléatoires ou épreuves.

- A-t-on autant de chances de voir apparaître P que de voir apparaître F ?

Activité 3

On a simulé 10000 lancers d'une pièce de monnaie puis on a organisé les résultats dans le tableau ci-dessous.

Nombre de lancers	100	500	1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000	10000
Nombre d'apparitions de pile	52	242	502	1002	1513	2034	2513	3035	3544	4020	4518	5008

- Calculer la fréquence de l'issue «pile».
- Tracer dans un même repère la courbe de fréquence de l'issue «pile» et la droite d'équation $y = 0.5$.
- Vers quelle valeur la fréquence de l'issue «pile» tend-elle à se stabiliser ?

1. Définition d'une probabilité

Activité 1

Un sac contient 1000 jetons numérotés de 1 à 1000.
 Une expérience consiste à tirer un jeton au hasard.

- Combien y-a-t-il d'issues possibles ?
- Dénombrer chacun des évènements ci-dessous.
 - A «obtenir un jeton portant un numéro qui commence par 1».
 - B «obtenir un jeton portant un numéro qui finit par 2».
 - C «obtenir un jeton portant un numéro impair qui commence par 2».

- Montrer que les événements A et C sont incompatibles.
 - Montrer que les événements B et C sont incompatibles.
- On suppose que chaque issue apparaît avec la même fréquence égale à $\frac{1}{1000}$.
 Déterminer la fréquence d'apparition de chacun des évènements $A, \bar{A}, B, C, A \cap B, \bar{A} \cap B, A \cup B, A \cup B \cup C$.

Lorsqu'on fait une expérience aléatoire,un résultat est appelé issue.
 L'ensemble des issues possibles est appelé univers des possibles.
 Un événement est une partie de l'univers des possibles.
 Un événement qui se réduit à une seule issue est appelé événement élémentaire.
 Deux événements sont dits incompatibles, si leur intersection est vide.

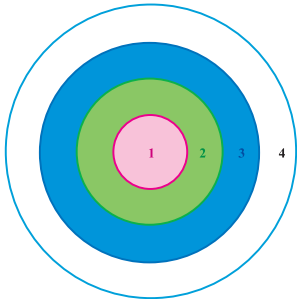
Activité 2

Une cible est formée de quatre zones concentriques numérotées 1, 2, 3 et 4.

Les cercles limitant ces zones ont pour rayons respectifs, 10cm, 20cm, 30cm, 40cm.

Une expérience consiste à envoyer une fléchette sur la cible.

Une simulation a montré que les différentes zones sont atteintes avec les fréquences suivantes.



Zone	1	2	3	4
Fréquence	0.1	0.15	0.2	0.25

- Déterminer la fréquence de l'événement «n'atteindre aucune zone».
- Déterminer la fréquence de l'événement «atteindre la zone 1 ou 2».
- Déterminer la fréquence de l'événement «ne pas atteindre la zone 1».

Définition

Soit E l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des évènements de E. On appelle probabilité sur E, toute application p, de $\mathcal{P}(E)$ dans $[0, 1]$ telle que

- $p(E) = 1$,
- l'image $p(A)$ d'un évènement A, est la somme des images des évènements élémentaires de A,
- l'image $p(\emptyset)$ de l'ensemble vide est égale à 0.

Vocabulaire

Soit $E = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ l'ensemble des issues et p une probabilité sur E .

L'événement E est appelé événement certain.

L'événement vide est appelé événement impossible.

L'image $p(A)$ d'un événement A est appelée probabilité de A .

Soit $E = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ l'ensemble des issues et p une probabilité sur E .
La probabilité d'un événement élémentaire $\{a_i\}$ est notée $p(a_i)$ et on a $\sum_{i=1}^n p(a_i) = 1$.

Activité 3

On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

1. Déterminer l'ensemble des issues de l'expérience.
2. On suppose que la probabilité d'apparition d'un nombre impair est le double de la probabilité q d'apparition d'un nombre pair.
Montrer que $9q = 1$ puis déterminer la probabilité de chaque événement élémentaire.
3. Déterminer la probabilité de chacun des événements ci-dessous.
A «obtenir un nombre pair».
B «obtenir un nombre impair inférieur ou égal à 3».
C «obtenir un nombre pair strictement supérieur à 3».
D «obtenir un multiple de 3 ou un nombre pair».

Activité 4

Soit E un ensemble fini et p une probabilité sur E .

1. Soit A un événement et $\bar{A}$ l'événement complémentaire.
Montrer que $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.
2. Soit B un événement tel que A et B sont incompatibles.
Montrer que $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.
3. Soit D un événement tel que A et D ne sont pas incompatibles.
On désigne par C l'ensemble des éléments de D qui n'appartiennent pas à A .
 - a. Montrer que $A \cup D = A \cup C$ et que $D = C \cup (A \cap D)$.
 - b. En déduire que $p(A \cup D) = p(A) + p(D) - p(A \cap D)$.

L'événement complémentaire d'un événement A est dit l'événement contraire de A .

Soit E un ensemble fini et p une probabilité sur E .

- Pour tout événement A , $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.
- Pour tous événements A et B , $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.
- Pour tous événements incompatibles A et B , $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

Activité 5

Un sac contient des jetons non identiques, numérotés de 10 à 19.

Une expérience aléatoire consiste à tirer un jeton du sac.

Le tableau ci-dessous donne les probabilités d'apparition des numéros.

a_i	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
p_i	0.2	0.1	0.05	0.06	0.04	0.1	0.1	0.15	0.15	0.05

Déterminer la probabilité de chacun des évènements ci-dessous.

1. Le chiffre obtenu est pair.
2. Le chiffre obtenu est un carré parfait.
3. Le chiffre obtenu est un multiple de 3 ou un multiple de 4.
4. Le chiffre obtenu n'est pas un carré parfait.
5. Le chiffre obtenu n'est ni un multiple de 3, ni un multiple de 4.

2. Loi uniforme

Lorsque dans une expérience aléatoire toutes les issues ont la même probabilité d'apparaître, on dit qu'il y a équiprobabilité.

C'est le cas, par exemple, lorsqu'on lance une pièce de monnaie bien équilibrée, on jette un dé non pipé ou on effectue un tirage au hasard.

Soit E un ensemble fini des issues dans une situation d'équiprobabilité.

Si le cardinal de E est égal à N et si p est la probabilité sur E, on a

- pour tout événement élémentaire a_i , $p(a_i) = \frac{1}{N}$,
- pour tout événement A, $p(A) = \frac{\text{card}A}{N}$.

Activité 1

Un joueur tire au hasard et simultanément trois cartes dans un jeu de 52 cartes.

Trouver la probabilité de chacun des événements ci-dessous.

A «obtenir trois cartes rouges».

B «obtenir trois cartes de même couleur».

C «obtenir trois as».

D «obtenir au moins un as».

E «n'obtenir aucun as».

Activité 2

Un sac contient des jetons, indiscernables et numérotés de 10 à 59.

On tire un jeton au hasard.

Déterminer la probabilité de chacun des événements ci-dessous.

1. Le numéro obtenu commence par 2.
2. Le numéro obtenu est supérieur ou égal à 30.
3. Le numéro obtenu ne finit pas par un chiffre pair.
4. Le numéro obtenu ne finit pas par un chiffre impair.
5. Le numéro obtenu est divisible par 3 et comporte des chiffres distincts.

Activité 3

On a rangé trois paires de chaussures de couleurs différentes dans un tiroir.

On tire au hasard deux chaussures. Déterminer la probabilité de chacun des événements A «les chaussures appartiennent à la même paire» et B «il y a un pied droit et un pied gauche».

Activité 4

On lance deux dés, numérotés de 1 à 6 et on s'intéresse à la somme des chiffres obtenus. Déterminer la probabilité des événements ci-dessous.

1. La somme des deux chiffres est 8.
2. La somme des deux chiffres est paire.
3. La somme des deux chiffres est impaire.
4. La somme des deux chiffres est supérieure ou égale à 11.
5. La somme des deux chiffres est inférieure ou égale à 10.

Activité 5

1. On range quatre livres sur trois étagères.
 - a. Calculer la probabilité pour que les livres soient tous rangés sur la même étagère.
 - b. Calculer la probabilité pour que chaque livre soit rangé sur une étagère différente.
 - c. Calculer la probabilité pour qu'il y ait au moins deux livres rangés sur une même étagère.
 - d. Calculer la probabilité pour que seulement deux livres soient rangés sur la même étagère.
2. Reprendre la question 1, avec quatre livres et cinq étagères.

Activité 6

Une chaîne de télévision organise un sondage, auprès de 500 téléspectateurs pour déterminer quels sont les films qu'ils apprécient. On donne ci-dessous les résultats.

- 150 téléspectateurs n'aiment ni les films policiers, ni les films de science fiction.
- 120 téléspectateurs n'aiment pas les films de science fiction et aiment les films policiers.
- 200 téléspectateurs aiment les films policiers et n'aiment pas les dessins animés.
- 180 téléspectateurs n'aiment ni les films policiers, ni les dessins animés.

On choisit un téléspectateur au hasard parmi ceux qui ont été interrogés.

Déterminer la probabilité de chacun des événements ci-dessous.

1. Le téléspectateur aime les films policiers ou les films de science fiction.
2.
 - a. Le téléspectateur n'aime pas les films de science fiction.
 - b. Le téléspectateur aime les films de science fiction.
3.
 - a. Le téléspectateur n'aime pas les dessins animés.
 - b. Le téléspectateur aime les dessins animés.

Activité 7

Dans une gare les arrivées des trains se font toutes les heures de midi jusqu'à minuit. Chaque train reste deux heures dans la gare puis repart et ne revient que le lendemain.

On se propose de calculer la probabilité que deux trains A et B se rencontrent dans cette gare.

On désigne par a et b les heures d'arrivée respectives des trains A et B.

1.
 - a. Vérifier que l'univers des possibles est défini par
$$E = \{(a, b) \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des entiers compris entre } 12 \text{ et } 24\}.$$
 - b. Calculer le cardinal de E.
2.
 - a. On suppose que le train A arrive à 17 heures. Quelles sont les heures d'arrivée possibles du train B, pour qu'il rencontre le train A ?
 - b. On suppose que le train A arrive à 23 heures. Quelles sont les heures possibles d'arrivée du train B pour qu'il rencontre le train A ?

3. On munit le plan d'un repère, et on désigne par G l'ensemble des points M de coordonnées (a, b) telles que les trains A et B se rencontrent.
 - a. Représenter l'ensemble G .
 - b. Quel est le cardinal de G ?
 - c. En déduire la probabilité pour que les deux trains A et B se rencontrent dans la gare.
 - c. On suppose que le train A arrive à midi. Quelles sont les heures possibles d'arrivée du train B pour qu'il rencontre le train A ?

3. Epreuves successives et événements indépendants

Activité 1

On lance une pièce de monnaie, bien équilibrée et on note à chaque fois le côté qui apparaît: P pour pile et F pour face.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir pile ?
2. On répète l'expérience deux fois et on note à chaque fois le côté qui apparaît.
Soit A_1 un événement réalisé lors du premier lancer et A_2 un événement réalisé lors du deuxième lancer.
 - a. La réalisation de A_1 influe-t-elle sur celle de A_2 ?
 - b. A l'aide d'un arbre de choix, déterminer et dénombrer l'ensemble E des issues possibles.
 - c. Déterminer la probabilité d'un événement élémentaire de E .
 - d. Calculer la probabilité des événements ci-dessous.
 A «obtenir pile au premier lancer».
 B «obtenir face au deuxième lancer».
 C «obtenir face au premier lancer et pile au deuxième lancer».
 - e. Calculer la probabilité des événements $\bar{A}$, $A \cap B$, $\bar{A} \cap B$, $A \cup B$ et $A \cup B \cup C$.

On considère une expérience, constituée de n épreuves successives.

Soit A_1 un événement réalisé avec la probabilité p_1 lors de la première épreuve, A_2 un événement réalisé avec la probabilité p_2 lors de la deuxième épreuve, et A_n est un événement réalisé avec la probabilité p_n lors de la $n^{\text{ème}}$ épreuve.

On dit que les événements sont indépendants si la réalisation de l'un n'influe pas sur la réalisation du suivant. Dans ce cas la probabilité pour que les événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ soient successivement réalisés est égale à $p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n$.

Activité 2

Une urne contient deux boules blanches et huit boules rouges.

On tire au hasard une boule.

1. a. Calculer la probabilité de tirer une boule blanche.
 b. Calculer la probabilité de tirer une boule rouge.
2. On répète l'expérience trois fois en remettant après chaque essai la boule tirée dans l'urne.
 Etablir un arbre de choix, puis calculer la probabilité de chacun des événements ci-dessous.

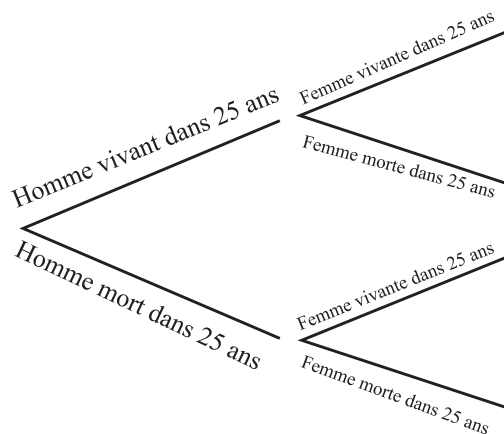
- La première boule tirée est blanche.
- La deuxième boule tirée est rouge.
- La dernière boule tirée est blanche.
- Aucune boule tirée n'est blanche.
- Le tirage contient au moins une boule blanche.

Activité 3

La probabilité pour qu'un homme soit vivant dans 25 ans est $\frac{3}{5}$ et la probabilité pour que sa femme soit vivante dans 25 ans est $\frac{2}{3}$.

Observer l'arbre de choix ci-contre et déterminer la probabilité pour que dans 25 ans

- les deux soient vivants.
- seulement l'homme soit vivant.
- seulement la femme soit vivante.
- au moins l'un des deux soit vivant.



Activité 4

Trois élèves A, B et C travaillent indépendamment sur un problème.

La probabilité que A résolve le problème est 0.5 ; celle de B est $\frac{1}{3}$ et celle de C est 0.4.

- Etablir un arbre de choix.
- Calculer la probabilité pour que le problème ne soit pas résolu.
- En déduire la probabilité que le problème soit résolu.

Activité 5

On suppose que 10% des ampoules produites par une machine sont défectueuses.

On choisit 10 ampoules au hasard. Quelle est la probabilité pour que parmi les 10 ampoules choisies

- aucune ampoule ne soit défectueuse ?
- au moins une ampoule soit défectueuse ?
- exactement une ampoule soit défectueuse ?
- au moins deux ampoules soient défectueuses ?

Activité 6

On suppose que les probabilités d'avoir un garçon ou une fille sont égales.

Parmi 500 familles à 4 enfants chacune, quelle est la probabilité qu'une famille

- n'ait aucune fille ?
- ait au moins un garçon ?
- ait exactement deux filles ?
- ait au moins deux garçons ?

4. Epreuves successives et événements dépendants

Activité 1

Une urne contient deux boules blanches et huit boules rouges.

On tire au hasard une boule.

1. a. Calculer la probabilité de tirer une boule blanche.
- b. Calculer la probabilité de tirer une boule rouge.

On répète l'expérience deux fois sans remettre la boule tirée dans l'urne.

2. Etablir un arbre de choix, puis calculer la probabilité de chacun des événements ci-dessous.
 - a. La première boule tirée est blanche.
 - b. La deuxième boule tirée est rouge.
 - c. La dernière boule tirée est blanche.
 - d. Aucune boule tirée n'est blanche.
 - e. Le tirage contient au moins une boule blanche.

On considère une expérience, constituée de n épreuves successives.

Soit A_1 un événement réalisé lors de la première épreuve, A_2 un événement réalisé lors de la deuxième épreuve et A_n est un événement réalisé lors de la $n^{\text{ème}}$ épreuve. On dit que les événements sont dépendants si la réalisation de l'un influe sur la réalisation du suivant.

Soit p_1 la probabilité de A_1 , p_2 la probabilité de A_2 si A_1 se réalise, et p_n la probabilité de A_n si A_{n-1} se réalise. Alors la probabilité pour que les événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ se réalisent successivement est égale à $p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n$.

Activité 2

Au cours d'une expérience sur le comportement des animaux, un lapin doit choisir entre quatre portes d'apparence identique, numérotées de 1 à 4.

S'il choisit la porte 1, l'expérience s'arrête.

S'il choisit l'une des autres portes, il retourne à la case départ et fait un autre essai.

1. On suppose qu'à chaque essai, le lapin ne se souvient pas de l'essai précédent.

Déterminer la probabilité de chacun des événements ci-dessous.

A «le lapin choisit la porte 1 au premier essai».

B «le lapin choisit la porte 1 au deuxième essai».

C «le lapin choisit la porte 1 au sixième essai».
2. On suppose maintenant qu'à chaque essai le lapin évite la porte choisie auparavant et choisit entre celles qu'il n'a pas testées.

Déterminer la probabilité de chacun des événements ci-dessous.

A «le lapin choisit la porte 1 au premier essai».

B «le lapin choisit la porte 1 au troisième essai».

C «le lapin choisit la porte 1 au cinquième essai».

Activité 3

Trois boîtes à bijoux identiques ont chacune deux tiroirs. Dans chaque tiroir de la première boîte il y a un collier en or, dans chaque tiroir de la deuxième il y a un collier en argent et dans l'un des tiroirs de la troisième boîte il y a un collier en or et dans l'autre un collier en argent.

On choisit une boîte au hasard. Quelle est la probabilité pour

- a. qu'au moins un tiroir contienne un collier en or ?
- b. qu'un seul tiroir contienne un collier en argent ?

Activité 4

Lors d'un examen, un élève doit tirer successivement et au hasard trois questions parmi 27 questions réparties de la manière suivante :

- 9 questions d'analyse,
- 9 questions de géométrie,
- 5 questions de probabilité,
- 4 questions de statistiques.

Calculer les probabilités des événements ci-dessous.

1. L'élève tire trois questions d'analyse.
2. L'élève ne tire aucune question d'analyse.
3. L'élève tire au moins une question de probabilité et une seule question de statistiques.
4. L'élève ne tire que des questions de géométrie et de probabilité.

QCM – VRAI – FAUX

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. En écrivant des mots de trois lettres distinctes avec les lettres Q, C et M, la probabilité d'obtenir le mot QCM est égale à

☐ $\frac{1}{27}$

☐ $\frac{1}{6}$

☐ $\frac{1}{3}$.

2. En tirant simultanément deux jetons dans un sac contenant trois jetons blancs et trois rouges, la probabilité d'obtenir deux jetons blancs est égale à

☐ 0.5

☐ $\frac{1}{5}$

☐ $\frac{2}{3}$.

3. On tire simultanément trois jetons dans un sac contenant deux jetons blancs et trois rouges ; on note p la probabilité de n'avoir que des jetons blancs et q la probabilité de n'avoir que des jetons rouges. Alors

☐ $p < q$

☐ $p > q$

☐ $q = \frac{2}{3}$.

4. On lance deux fois de suite une pièce non truquée. La probabilité d'obtenir pile au second lancer est égale à

☐ $\frac{1}{2}$

☐ $\frac{1}{4}$

☐ $\frac{1}{3}$.

5. On lance simultanément deux pièces identiques non truquées. La probabilité d'obtenir pile et face est égale à

☐ $\frac{1}{4}$

☐ $\frac{1}{3}$

☐ $\frac{1}{2}$.

VRAI – FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. La probabilité de la réunion de deux événements est la somme des probabilités de ces événements.
2. La probabilité de l'intersection de deux événements est le produit des probabilités de ces événements.
3. La probabilité de la réunion de deux événements élémentaires est la somme des probabilités de ces événements.
4. Si un événement A est inclus dans un événement B alors la probabilité de A est inférieure ou égale à celle de B.
5. Si un événement A est incompatible avec un événement B alors la probabilité de l'intersection de A et B est nulle.

Situation 1

Un singe frappe au hasard 4 fois sur les 50 touches d'un clavier d'ordinateur.

On considère l'évènement « le singe écrit le mot MATH ».

1. a. Déterminer la probabilité pour que cet évènement se produise.
b. En déduire la probabilité pour que cet évènement ne se produise pas.
2. On répète l'expérience n fois, $n \geq 1$.
a. Déterminer la probabilité pour que cet évènement se produise au moins une fois.
b. A l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée à 10^{-8} près de p_{100} , p_{1000} ,
 p_{10^5} , p_{10^6} , p_{10^7} , p_{10^8} , p_{10^9} .
c. Interpréter.

Situation 2

On se propose de calculer la probabilité pour que lors d'un dépouillement d'un scrutin, le vainqueur soit toujours en tête.

On admet que les dépouillements sont équiprobables.

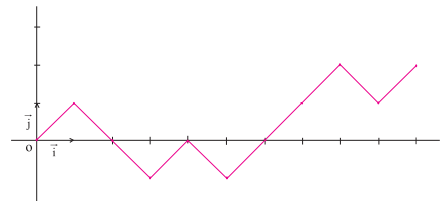
I. Dans cet exemple on suppose qu'il y a 10 votants dont 6 ont voté pour A et 4 ont voté pour B.

Ainsi un dépouillement possible est ABBABAAABA.

1. Déterminer le nombre de dépouillements possibles.
2. On munit le plan d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et on associe à un dépouillement le chemin défini comme suit :

On part du point O, chaque fois que le bulletin tiré est pour le candidat A, on monte en effectuant une translation de vecteur $\vec{i} + \vec{j}$, sinon on descend en effectuant une translation de vecteur $\vec{i} - \vec{j}$.

On a représenté ci-contre le chemin correspondant au dépouillement ABBABAAABA.



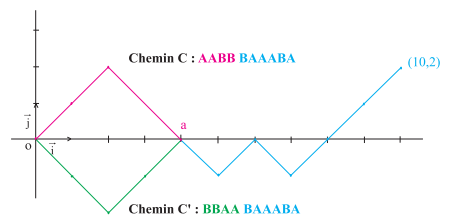
- a. Tracer deux autres chemins associés à d'autres dépouillements. En quel point ces chemins se terminent-ils?
- b. Vérifier que dénombrer les dépouillements où A reste toujours strictement en tête revient à dénombrer les chemins commençant par une montée et ne rencontrant plus l'axe des abscisses.

On appelle bons chemins de tels chemins.

3. On appelle mauvais chemin tout chemin commençant par une montée et rencontrant l'axe des abscisses.

On considère un mauvais chemin C qui rencontre l'axe des abscisses la première fois en un point d'abscisse a.

On lui associe un chemin C' commençant par une descente définie comme l'indique la figure ci-contre.



- a. Tracer un autre mauvais chemin C et son associé C'.
- b. Tracer un chemin C' commençant par une descente et le chemin C auquel il est associé.

On remarque qu'on a autant de mauvais chemins que de chemins commençant par une descente.

c. Montrer que le nombre de chemins commençant par une descente est égal à C_9^3 .

4. a. Montrer que le nombre de bons chemins est égal à $C_{10}^4 - 2C_9^3$.

b. En déduire la probabilité pour que lors d'un dépouillement du scrutin le candidat A reste toujours strictement en tête.

II. En appliquant le même procédé, montrer que s'il y a n bulletins pour A et m bulletins pour B ($n > m$), alors la probabilité pour que lors d'un dépouillement du scrutin le candidat A reste toujours strictement en tête est égale à $\frac{n-m}{m+n}$.

Exercices et problèmes

Exercice 1

Un dé équilibré a deux faces portant le chiffre 4, trois faces portant le chiffre 3 et une face portant le chiffre 6. On lance ce dé une fois.

1. Déterminer l'univers des possibles E ainsi que les probabilités d'apparition de chacun des chiffres.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre pair ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir 4 ou 6 ?

Exercice 2

Un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6, est pipé de sorte que la probabilité d'obtenir un chiffre soit proportionnelle à ce chiffre.

On lance ce dé une fois.

1. Déterminer l'univers des possibles E ainsi que les probabilités d'apparition de chacun des chiffres.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre pair ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre multiple de 3 ?
4. Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre strictement supérieur à 2 ?

Exercice 3

On considère un univers $E = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ et p une probabilité définie sur $\mathcal{P}(E)$ telle que $p(a_1) = 0.04$,

$$p(a_2) = \frac{p(a_1) + p(a_2)}{2} \text{ et } p(a_3) = \frac{p(a_2) + p(a_4)}{2}.$$

Déterminer p .

Exercice 4

Une urne contient deux boules blanches, trois boules rouges et cinq boules noires.

On tire une boule de l'urne et on observe sa couleur.

1. Déterminer l'univers des possibles E ainsi que les probabilités d'apparition de chacune des boules.
- On répète l'expérience deux fois en remettant à chaque fois la boule dans l'urne.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules rouges ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules noires ?
4. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules de même couleur ?
5. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes ?
6. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche et une boule rouge ?
7. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche ?

Exercice 5

Un centre de transfusion sanguine diffuse le tableau suivant donnant la répartition des principaux groupes sanguins des habitants d'une même ville. Par ailleurs, le sang humain possède une caractéristique appelée facteur Rhésus. Cette caractéristique peut revêtir deux formes que l'on appelle Rhésus + et Rhésus -.

	O	A	B	AB
R ₊	39%	36%	9.1%	2.8%
R ₋	5.1%	4.9%	1.4%	1.7%

Un couple de cette ville est choisi au hasard ; déterminer la probabilité de chacun des événements ci-dessous.

1. L'homme est OR₊ et la femme est BR₋.
2. L'homme est A et la femme est AB.
3. L'homme et la femme sont A.
4. L'homme est A et la femme n'est pas A.
5. L'homme ou la femme est A.
6. L'homme et la femme sont R₊.
7. L'homme ou la femme est R₋.
8. L'homme et la femme sont de Rhésus différents.

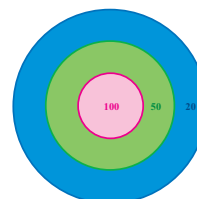
Exercice 6

On considère une population de lapins où le nombre de mâles est la moitié du nombre de femelles. Des études statistiques ont montré que dans cette population 4% des mâles avaient le caractère albinos et 0.26% des femelles avaient ce caractère.

1. Quelle est la probabilité pour qu'une femelle de cette population prise au hasard ne soit pas albinos ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'un lapin de cette population pris au hasard soit albinos ?
3. Quelle est la probabilité pour qu'un lapin albinos de cette population pris au hasard soit un mâle ?

Exercice 7

Une cible est dessinée à l'aide de trois cercles concentriques, de rayons 10, 20 et 30cm. Le disque central donne 100 points, la couronne extérieure donne 20 points et la couronne restante donne 50 points.



On lance une flèche et on suppose que la probabilité d'obtenir 100 points est $\frac{1}{18}$, celle d'avoir 50 points est $\frac{1}{9}$ et celle d'avoir 20 points est $\frac{5}{18}$.

1. Déterminer la probabilité de ne pas atteindre la cible.
2. Déterminer la probabilité d'obtenir au moins 50 points.
3. Déterminer la probabilité d'obtenir au plus 50 points.

Exercice 8

Une urne contient quatre boules numérotées (6) et cinq boules numérotées (-3), indiscernables au toucher. On tire simultanément deux boules de l'urne.

1. Quelle est la probabilité de tirer deux boules portant deux nombres différents ?
2. Quelle est la probabilité de tirer deux boules portant le même nombre ?
3. On note S la somme des nombres des deux boules tirées.
 - a. Quelles sont les différentes valeurs possibles de S ?
 - b. Déterminer la probabilité de chaque valeur possible de S.
 - c. Quelle est la probabilité que S soit positive ?
 - d. Quelle est la probabilité que S soit paire ?

Exercice 9

On considère une droite munie d'un repère $(O, \vec{i})$ et le point A d'abscisse 10.

On place au hasard deux points M et N d'abscisses entières, sur le segment $[OA] \setminus \{O, A\}$.

On obtient alors trois segments de longueurs x, y et z. On se propose de calculer la probabilité de pouvoir construire un triangle dont les côtés mesurent x, y et z.

1. a. Justifier que l'univers des possibles est défini par $E = \{(x, y) \text{ où } x \text{ et } y \text{ sont des entiers compris entre } 0 \text{ et } 10 \text{ tels que } x + y \leq 10\}$.
- b. Représenter dans un repère l'ensemble E.
- c. Calculer le cardinal de E.
2. a. Montrer que l'évènement étudié correspond à la partie A définie par $A = \{(x, y) \in E \text{ tels que } x < 5, y < 5 \text{ et } x + y > 5\}$.
- b. Représenter la partie A.
- c. Quel est le cardinal de A ?
- d. Conclure.

Exercice 10

Dans une classe, il y a 20 filles et 18 garçons.

Le professeur de mathématiques interroge l'un après l'autre trois élèves différents choisis au hasard.

Calculer la probabilité des évènements ci-dessous.

1. Le professeur interroge trois filles.
2. Le professeur interroge trois élèves de même sexe.
3. Le professeur interroge une fille et deux garçons.
4. Le troisième élève interrogé est une fille.

Exercice 11

On lance 100 fois une pièce de monnaie équilibrée.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir 100 fois pile ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois pile ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 50 fois pile ?

Exercice 12

On lance deux dés non truqués, un vert et un bleu. Les faces de chacun d'eux sont numérotées de 1 à 6.

On note p le résultat donné par le dé vert et q le résultat donné par le dé bleu.

On considère l'équation (E) : $x^2 + px - q = 0$.

1. Déterminer la probabilité pour que 0 soit solution de E.
2. Déterminer la probabilité pour que 1 soit solution de E.
3. Déterminer la probabilité pour que -1 et 1 soient solutions de E.
4. Déterminer la probabilité pour que E admette deux solutions distinctes.
5. Déterminer la probabilité pour que E admette une solution double.
6. Déterminer la probabilité pour que E n'admette pas de solutions.

Exercice 13

Dans une classe de 36 élèves aucun élève n'est né un 29 février.

Est-il plus raisonnable de parier sur le fait que deux élèves au moins fêtent leur anniversaire le même jour que de parier sur le contraire ?

Exercice 14

Expliquer pourquoi, lorsqu'on lance trois dés discernables tels que les faces de chacun sont numérotées de 1 à 6, on obtient plus souvent la somme 10 que la somme 9, bien que ces sommes soient obtenues chacune de six façons différentes.

Exercice 15

On considère un octogone régulier ABCDEFGH.

1. Combien peut-on former de triangles distincts ayant pour sommets trois des sommets de l'octogone ?
 2. Une urne contient 8 boules notées A, B, C, D, E, F, G et H. On tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne.
- Calculer la probabilité pour que ces trois lettres désignent les sommets d'un triangle
- a. isocèle,
 - b. non isocèle,
 - c. équilatéral,
 - d. rectangle,
 - e. rectangle et isocèle.

Exercice 16

Le chevalier de Méré, philosophe et homme de lettres vivait au XVII^{ème} siècle. Il augmentait ses revenus de la façon suivante : il pariait qu'avec un dé non truqué, il était capable d'obtenir au moins un six en 4 coups. Il se mit alors à parier qu'il était capable d'obtenir au moins un double six avec deux dés en 24 coups. Il commença à perdre !

1. Déterminer la probabilité de faire apparaître au moins un six en 4 coups avec un dé.
2. En déduire pourquoi le chevalier de Méré gagnait plus de fois qu'il ne perdait lorsqu'il disait faire apparaître au moins un six en 4 coups.
3. Expliquer pourquoi le chevalier de Méré commençait à perdre lorsqu'il pariait sur l'apparition d'au moins un double six en 24 coups avec deux dés.
4. S'il avait parié sur l'apparition d'au moins un double six en 25 coups avec deux dés aurait-il continué de gagner plus de fois qu'il n'aurait perdu ?

Exercice 17

La probabilité qu'un joueur X gagne une partie d'échec est 0.6.

Dans un tournoi de quatre parties, trouver la probabilité de chacun des événements ci-dessous.

1. X gagne la première partie, la troisième partie et perd les deux autres.
2. X gagne au moins une partie.
3. X gagne exactement une partie.
4. X gagne au moins deux parties.
5. X gagne au moins quatre parties.

Exercice 18

Trois personnes A, B et C visent une cible. Ils jouent une seule fois, l'un après l'autre dans l'ordre alphabétique avec des probabilités respectives de l'atteindre

de $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$.

1. Quelle est la probabilité pour qu'aucun n'atteigne la cible ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'au moins un joueur atteigne la cible ?
3. Quelle probabilité a chaque joueur d'atteindre le premier la cible ?

Exercice 19

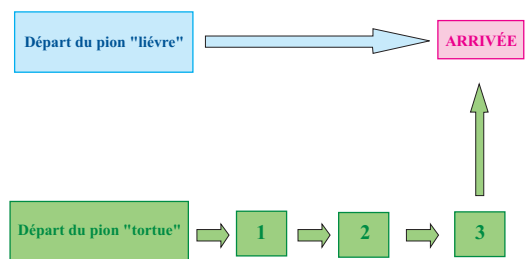
On lance un dé bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Si le résultat est pair le jeu s'arrête et on note S le résultat, sinon on tire au hasard un jeton d'une urne en contenant trois (numérotés 1, 2 et 3) et on note S la somme des chiffres donnés par le dé et le jeton.

1. Déterminer la probabilité pour que S soit égal à 4.
2. Déterminer la probabilité pour que S soit un nombre pair.
3. Déterminer la probabilité pour que S soit inférieur ou égal à 7.

Exercice 20

On considère le jeu décrit ci-dessous.



On lance un dé bien équilibré, dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Si le résultat est 6 le pion « lièvre » atteint la case arrivée et gagne, sinon le pion « tortue » avance d'une case.

On continue jusqu'à ce qu'il y ait un gagnant.

Quelle est la situation la plus enviable : celle du pion « lièvre » ou celle du pion « tortue » ?

Lancer de deux dés.

Une expérience consiste à lancer deux dés puis faire la somme des nombres apparus. On se propose de simuler à l'aide d'un tableur cette expérience, 50 fois, 100 fois et 200 fois afin de calculer la fréquence d'apparition des événements élémentaires.

1. Simulation

- Dans chacune des cellules A1 et B1, on tape la formule =ENT(ALEA()*6+1) pour générer des entiers compris entre 1 et 6.
- Dans la cellule C1, on écrit la formule =A1+B1 pour déterminer la somme des deux faces apparentes des dés lancés.
- Sélectionner A1 et à l'aide de la poignée de recopie, la copier jusqu'à la cellule A200.
- Sélectionner B1 et à l'aide de la poignée de recopie, la copier jusqu'à la cellule B200.
- Sélectionner C1 et à l'aide de la poignée de recopie, la copier jusqu'à la cellule C200.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1	6	1	7															
2	6	5	11															
3	4	5	9															
4	3	2	5															
5	5	4	9															
6	5	2	7															
7	1	5	6															
8	1	6	7															
9	5	6	11															
10	4	1	5															
11	6	5	11															
12	1	2	3															
13	6	5	11															
14	6	3	9															
15	6	6	12															

Somme obtenue	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Fréquence d'apparition pour 50 lancers	0	0.1	0.02	0.12	0.08	0.24	0.08	0.12	0.06	0.14	0.04
Fréquence d'apparition pour 100 lancers	0.03	0.05	0.08	0.1	0.08	0.2	0.1	0.13	0.12	0.09	0.02
Fréquence d'apparition pour 200 lancers	0.025	0.055	0.06	0.13	0.13	0.18	0.12	0.12	0.08	0.07	0.01

2. Fluctuation des fréquences

- On écrit d'abord les titres comme l'illustre la figure ci-haut : "Somme obtenue", "Fréquence d'apparition pour 50 lancers", pour 100 lancers et pour 200 lancers", ainsi que les valeurs possibles des sommes.
- Dans la cellule H8, on écrit la formule =NB.SI(\$C\$1:\$C\$50;H7)/50.
- Sélectionner H8 et la copier jusqu'à R8 en utilisant la poignée de recopie.
- Dans la cellule H9, on écrit la formule =NB.SI(\$C\$1:\$C\$100;H7)/100.
- Sélectionner H9 et la copier jusqu'à R9 en utilisant la poignée de recopie.
- Dans la cellule H10, on écrit la formule =NB.SI(\$C\$1:\$C\$200;H7)/200.
- Sélectionner H10 et la copier jusqu'à R10.
- On pourra donner de nouvelles simulations, en appuyant sur la touche F9 du clavier.

Les premières références publiées sur les chances de gagner au jeu, datent de Cardan (1501-1576) dans son livre " De Ludo Alae ". Des calculs de probabilité apparaissent aussi dans les livres de Kepler (1571-1630) et de Galilée (1564-1642).

Mais les historiens semblent être d'accord sur le fait que le sujet commence réellement à être développé par Pascal (1623-1662) et Fermat (1601-1665), vers 1650 comme un calcul combinatoire. Huyghens, Bernoulli, De Moivre, Euler et Gauss développèrent les idées de Pascal et Fermat, mais il fallut, pour développer la théorie, faute d'outils mathématiques puissants, attendre Laplace qui donna une application magistrale du calcul différentiel et intégral à la théorie des probabilités, dans son " Traité analytique des probabilités " (en 1812).



Blaise Pascal



Jean Bernoulli

D'après les archéologues, les jeux de hasard seraient apparus au troisième millénaire avant notre ère, en Extrême Orient et en Égypte. Platon désignait Toth, dieu égyptien sans doute adopté par les Grecs sous le nom d'Hermès, comme l'inventeur des jeux de hasard. Les "fils" des pharaons seraient donc les premiers " joueurs de hasard ". On a découvert des dés "pipés" dans des sarcophages vieux de 2000 ans !



Citation

" Je parle beaucoup au hasard, c'est mon plus cher confident " .

Alfred De Musset

